

géométrie

CLASSE DE MATHÉMATIQUES

LIGEL — 77, RUE DE VAUGIRARD, PARIS VIe

GÉOMÉTRIE

CLASSE DE MATHÉMATIQUES

54 - M - 11

UNE RÉUNION DE PROFESSEURS

géométrie

CLASSE DE MATHÉMATIQUES

LIGEL

77, RUE DE VAUGIRARD, PARIS-VIe

54 - M - 11

Programme de la classe de Mathématiques

(Arrêté du 6 mars 1962)

GÉOMÉTRIE

I. Géométrie descriptive

(*La géométrie descriptive doit être traitée non comme une discipline séparée, mais comme une partie de la géométrie, où sont étudiés quelques problèmes de représentation de figures de l'espace. Les notions de géométrie descriptive, et, plus généralement, l'opération de projection sur des plans convenablement choisis trouvent leur emploi, soit comme moyen de recherche, soit comme moyen de représentation, dans de nombreuses questions, par exemple : symétries du cube, du tétraèdre régulier, projection orthogonale d'un cercle, etc...*)

Représentation d'un point et d'un ensemble de points à l'aide de projections orthogonales sur deux plans rectangulaires. Vocabulaire relatif aux droites et plans occupant des positions particulières par rapport aux plans de projection.

Changement de plan frontal, changement de plan horizontal.

Représentation des droites et des plans ; problèmes d'intersection, de parallélisme, d'orthogonalité (une fois expliquées les solutions géométriques de ces problèmes, on se bornera à traiter quelques exercices d'application simples, en utilisant éventuellement un changement de plan).

Problème de la perpendiculaire commune à deux droites et de leur plus courte distance :

1° Lorsque les deux droites sont horizontales (ou frontales) ;

2° Lorsque l'une d'elles est verticale (ou de bout).

Rotation autour d'un axe vertical ou de bout (liaison avec l'étude de la transformation par rotation).

Rabattement d'un plan sur un plan horizontal ou frontal (liaison avec la transformation par affinité plane). Relèvement.

Distance de deux points, d'un point à une droite, d'un point à un plan ; angle de deux droites.

II. Compléments de Géométrie orientée

1° *Géométrie plane.* — Angle orienté de deux demi-droites ou de deux vecteurs (rappel). Angle orienté de deux droites.

Mesure, dans un plan orienté, d'un angle orienté de deux demi-droites, de deux droites. Formules de Chasles. Repérage d'une direction d'axe ou de droite dans un plan orienté muni d'un axe polaire : angle polaire.

2° *Géométrie dans l'espace.* — Orientation d'un trièdre, comparaison des sens de deux trièdres orientés.

Orientation de l'espace. Espace orienté par le choix d'un trièdre orienté.

III. Compléments sur le cercle en géométrie plane et sur la sphère

1° Ensemble des points M d'un plan tels que, A et B étant deux points de ce plan, l'angle orienté de vecteurs $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$, ou l'angle orienté de droites (MA, MB), soit égal à un angle donné ;

2° Puissance d'un point par rapport à un cercle. Différence des puissances d'un point par rapport à deux cercles, axe radical de deux cercles.
Cercles orthogonaux.
Faisceaux linéaires de cercles ; faisceaux orthogonaux ;

3° Points conjugués, polaire d'un point par rapport à un cercle ; pôle d'une droite, droites conjuguées.
Définition d'une transformation par polaires réciproques par rapport à un cercle ; transformé d'une division harmonique de quatre points alignés.

4° Cônes et cylindres circonscrits à une sphère.

IV. Coordonnées cartésiennes dans l'espace Notions de Géométrie analytique

(*Le rappel des notions de géométrie analytique plane acquises en Seconde et en Première interviendra naturellement à l'occasion de l'étude de divers chapitres du présent programme ou à l'occasion de problèmes : il ne doit pas donner lieu à une révision systématique*).

1° Définition d'un repère cartésien dans l'espace : axes obliques, axes rectangulaires, choix des unités sur les axes, vecteurs-unités ; repère orthonormé.
Composantes scalaires (coordonnées) d'un vecteur ; coordonnées d'un point. Représentation vectorielle d'un vecteur, d'un point, au moyen de leurs coordonnées et des vecteurs-unités. Paramètres directeurs d'une direction de droites.
Changement de coordonnées par translation du repère.

2° Barycentre d'un système de n points affectés de coefficients dont la somme n'est pas nulle, définition. Coordonnées du barycentre. Centre de gravité d'un triangle, d'un tétraèdre. Transformation d'une somme $\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2$;

3° Représentations paramétriques d'une droite.

4° *Repère orthonormé :* expression analytique du produit scalaire de deux vecteurs.
Distance de deux points ; cosinus de l'angle de deux vecteurs ; condition d'orthogonalité de deux vecteurs ou de deux droites. Équation normale d'une droite en géométrie plane, d'un plan dans l'espace.
Équation d'une sphère donnée par son centre et son rayon. Équation d'un cône ou d'un cylindre de révolution ayant pour axe de révolution l'un des axes de coordonnées.
Hélice circulaire ; représentation paramétrique :

$x = a \cos u,\ y = a \sin u,\ z = bu$;

projection orthogonale sur un plan contenant l'axe Oz.
(*L'étude de problèmes sur les droites et les plans ; intersections, positions relatives, parallélisme... est en dehors du programme*).

5° *Vecteur variable fonction d'un paramètre :* Dérivée vectorielle relativement à un repère donné (indépendant du paramètre). Coordonnées du vecteur dérivé (repère cartésien normé). Dérivées successives.

Dérivée d'une somme vectorielle, du produit d'un vecteur par un scalaire (variable), du produit scalaire de deux vecteurs.

V. Transformations ponctuelles (plan et espace)

1° *Généralités.* — Transformation réciproque d'une transformation. Transformations involutives. Composition de transformations (produit) ; associativité. Groupe de transformations.

2° *Translation.* — Révision des questions figurant au programme de Seconde A', C, M, M'. Produit de translations ; groupe des translations.

3° *Déplacements et symétries en géométrie plane.* Rotation autour d'un point ; symétrie par rapport à un point. Symétrie (orthogonale) par rapport à une droite (symétrie axiale).

Produit de deux symétries axiales ; toute translation ou rotation est un produit de deux symétries axiales. Produits de translations, de rotations et de symétries axiales : formes réduites (une translation, ou une rotation, ou le produit d'une symétrie axiale et d'une translation parallèle à l'axe).

Déplacement. Forme réduite d'un déplacement ; centre de rotation. Groupe des déplacements.

4° *Déplacements dans l'espace.* Rotation autour d'un axe ; retournement (symétrie orthogonale par rapport à une droite).

Produits de deux retournements (axes coplanaires, axes non coplanaires). Toute translation ou rotation est un produit de deux retournements.

Produits de translations et de rotations, forme réduite ; « déplacement hélicoïdal ».

Déplacement dans l'espace. (On pourra admettre que tout déplacement est équivalent à un déplacement hélicoïdal). Groupe des déplacements.

5° *Symétries dans l'espace.* Symétrie par rapport à un point ; symétrie par rapport à un plan. Produits de deux telles symétries.

Toute translation ou rotation est un produit de deux symétries par rapport à un plan.

6° *Plans de symétrie, axes, centres d'une figure.* Définitions. Exemples : couple de droites, couple de plans, triangle équilatéral, cube, tétraèdre régulier.

7° *Homothétie* (plan et espace). Révision des questions figurant au programme de Seconde A', C, M, M'. Produits de deux homothéties, d'une homothétie et d'une translation. Groupe des homothéties — translations.

Applications de l'homothétie — Cercles homothétiques dans l'espace. Centres d'homothétie de deux sphères, de trois sphères prises deux à deux.

8° *Similitudes.* Similitude (directe) en géométrie plane. Forme réduite ; centre de similitude.

Définition des figures semblables dans l'espace (se correspondant par le produit d'un déplacement et d'une homothétie positive). ***L'étude générale de la transformation « Similitude » dans l'espace, la recherche d'une forme réduite sont en dehors du programme.***

Rapport des aires de deux polygones plans semblables, rapport des volumes de deux polyèdres semblables.

9° *Affinité* (*Géométrie plane*). Définition. Produit de deux affinités ayant même axe et même direction. Transformée d'une droite ; transformée de la tangente en un point d'une courbe.

Affinité orthogonale ; interprétation à l'aide d'une rotation et d'une projection orthogonale.

10° *Inversion*. Définition. Produit de deux inversions ayant même pôle ; produit d'une inversion et d'une homothétie ayant pour centre le pôle d'inversion. Cercle (ou sphère) d'inversion.

Étude, *en géométrie plane seulement*, des questions suivantes relatives à l'inversion :

Conservation du contact ; problème de la conservation des angles. Transformés d'une droite, d'un cercle. Inversions pouvant échanger : une droite et un cercle, deux cercles.

Transformés par inversion des cercles d'un faisceau linéaire.

VI. Coniques

(*Le choix des définitions, l'ordre de présentation des diverses questions sur les coniques et, notamment, de leurs propriétés caractéristiques, ne sont nullement imposés, ni même suggérés, par l'ordre d'énumération adopté ci-après*).

1° Définition et propriétés caractéristiques ponctuelles de l'ellipse, de l'hyperbole, de la parabole :

Géométrie plane : lieu des centres des cercles passant par un point donné et tangents à une droite ou à un cercle donné ; lieu des points dont la somme ou la différence des distances à deux points donnés a une valeur donnée.

Géométrie plane : Lieu des points dont le rapport des distances à un point et à une droite a une valeur donnée.

Sections planes d'un cône de révolution. Sections planes d'un cylindre de révolution.

Équation de l'ellipse et de l'hyperbole rapportées à leurs axes de symétrie. Équation de la parabole rapportée à son axe et à sa tangente au sommet.

Étude de la courbe représentée, en coordonnées rectangulaires, par l'équation :

$$y^2 = ax^2 + bx + c.$$

2° Existence de la tangente à une conique en un point.

Asymptotes de l'hyperbole. Équation d'une hyperbole rapportée à ses asymptotes.

Propriétés élémentaires des tangentes relativement aux foyers : projections orthogonales d'un foyer sur les tangentes ; symétriques d'un foyer par rapport aux tangentes.

Notion d'enveloppe de droites, en géométrie plane, à propos de l'étude de l'ensemble des droites telles que la projection orthogonale d'un point donné sur chacune d'elles soit sur un cercle donné, ou sur une droite donnée et de l'ensemble des médiatrices des segments joignant un point fixe aux différents points d'un cercle ou d'une droite.

3° Affinités orthogonales faisant correspondre une ellipse et son cercle principal ; ellipse considérée comme projection orthogonale d'un cercle. Aire de l'ellipse.

(*L'étude des diamètres des coniques, l'extension à une conique, considérée comme projection ou perspective d'un cercle, des propriétés des éléments conjugués par rapport à un cercle, sont en dehors du programme*).

INTRODUCTION

CHAPITRE PREMIER

VECTEURS — PRODUIT SCALAIRE

I. Vecteurs (Révision)

1. Définitions.

Un vecteur est un segment de droite orienté, c'est-à-dire sur lequel on a choisi un sens de parcours.

Soit AB ce segment ; si le sens choisi est de A vers B, A est dit l'**origine** ; B l'**extrémité** du vecteur.

Un vecteur se note $\overrightarrow{AB}$ (ce qui s'énonce vecteur AB).

On appelle **support** du vecteur la droite qui le porte. Ce support peut être un axe.

Deux vecteurs de supports parallèles sont dits **parallèles** ; exemple : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$. Deux vecteurs de même support sont dits **colinéaires** ; exemple : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EF}$.

Un vecteur peut être déterminé :

a) *par son origine* A *et son extrémité* B *;*

b) *par son origine* A, *son support* D (ou sa direction) *son sens sur le support et sa longueur* (ou module) *mesurée avec une unité déterminée.*

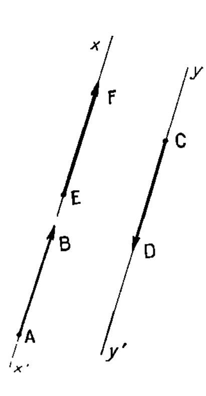


Fig. 1.

2. Vecteurs équipollents.

Deux vecteurs équipollents sont deux vecteurs de même direction, de même sens et de même module.

Exemple : Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.

L'équipollence se note par l'égalité

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}.$$

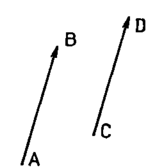


Fig. 2.

3. Vecteur lié, vecteur glissant, vecteur libre.

Vecteur lié : c'est un vecteur dont le *support*, l'*origine* et le *sens* sur ce support sont déterminés.

Vecteur glissant : c'est un vecteur dont le *support* et le *sens* sur le support sont déterminés mais non l'origine. Il peut être remplacé par un vecteur équipollent colinéaire.

Vecteur libre : c'est un vecteur dont la *direction* et le *sens* sont déterminés. Son support parallèle à la direction et son origine sur ce support sont arbitraires. Il peut être remplacé par un vecteur équipollent quelconque.

4. Relation d'équivalence.

Soit $\vec{V}$ un vecteur donné. L'ensemble des vecteurs tels que $\vec{V} = \vec{V'}$ est un sous-ensemble E′ de l'ensemble E des vecteurs de l'espace.

La relation d'équipollence qui définit E′ ($\vec{V}$ étant donné) est :

a) **réflexive** : $\vec{V} = \vec{V}$;

b) **symétrique** : $\vec{V} = \vec{V'} \Rightarrow \vec{V'} = \vec{V}$;

c) **transitive** : $\vec{V} = \vec{V'}$ et $\vec{V'} = \vec{V''} \Rightarrow \vec{V} = \vec{V''}$.

L'**équipollence** est donc une **relation d'équivalence.** L'ensemble E′ comprenant tous les vecteurs équipollents à un vecteur $\vec{V}$ donné est une **classe d'équivalence** dans l'ensemble E de tous les vecteurs de l'espace.

Un vecteur quelconque de l'ensemble E′ est un représentant de cette classe d'équivalence.

5. Rapport de deux vecteurs parallèles.

Soient $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ deux vecteurs parallèles (ou colinéaires).

On appelle rapport de ces deux vecteurs

$$\frac{\vec{AB}}{\vec{CD}}$$

un nombre relatif, positif ou **négatif** suivant que les deux vecteurs sont de *même sens* ou de *sens contraires*, et dont la *valeur absolue est égale au rapport des longueurs des deux segments* AB *et* CD.

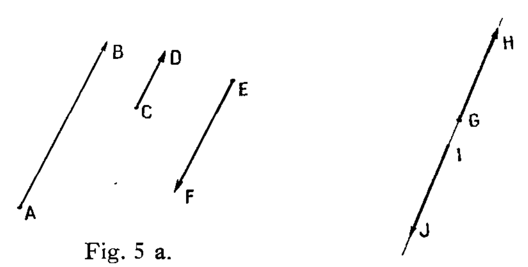


Fig. 5 a.

Fig. 5 b.

Exemple : $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}} = 3 \qquad \dfrac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{EF}} = -\dfrac{3}{2}.$

Si le rapport est égal à 1, les deux vecteurs sont équipollents.

Si le rapport est égal à — 1, les deux vecteurs sont dits **opposés**.

Si deux vecteurs colinéaires ont un rapport égal à — 1, ils sont dits **directement opposés**

Exemple : (Fig. 5b.) $\overrightarrow{GH}$ et $\overrightarrow{IJ}$.

6. Somme vectorielle de deux vecteurs.

Soient deux vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$.

Si, par un point quelconque O, on mène $\overrightarrow{OA_1}$ équipollent à $\vec{v}_1$ et $\overrightarrow{A_1A_2}$ équipollent à $\vec{v}_2$, $\overrightarrow{OA_2}$ est, par définition, la somme vectorielle des vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$.

On la note :

$$\overrightarrow{OA_2} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1A_2} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2.$$

Le point O étant quelconque, le vecteur somme géométrique de deux vecteurs est un vecteur libre.

Achevons le parallélogramme $OA_1A_2A'_1$.

En suivant le contour OA'_1A_2 on aurait d'après la définition :

$$\overrightarrow{OA_2} = \overrightarrow{OA'_1} + \overrightarrow{A'_1A_2} = \vec{v}_2 + \vec{v}_1.$$

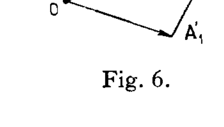


Fig. 6.

On peut donc écrire : $\vec{v}_2 + \vec{v}_1 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2.$

La somme vectorielle de deux vecteurs est commutative.

7. Somme vectorielle de plusieurs vecteurs.

Soient $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \ldots \vec{v}_n$ différents vecteurs ; si par un point O quelconque, on mène $\overrightarrow{OA_1}$ équipollent à $\vec{v}_1$, $\overrightarrow{A_1A_2}$ équipollent à $\vec{v}_2$, $\overrightarrow{A_{n-1}A_n}$ équipollent à $\vec{v}_n$ le vecteur $\overrightarrow{OA_n}$ est par définition, la somme vectorielle des vecteurs $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2 \ldots \vec{v}_n$.

On le note :

$$\overrightarrow{OA_n} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \ldots + \vec{v}_n.$$

O étant arbitraire, la somme vectorielle est un vecteur libre.

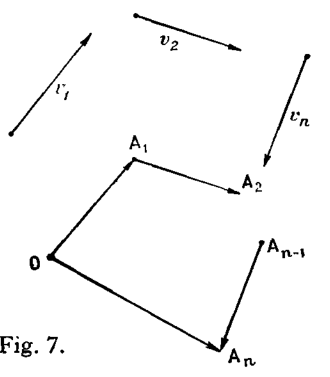


Fig. 7.

8. Propriétés de la somme vectorielle.

D'après le n° 7, on peut intervertir l'ordre de deux vecteurs consécutifs. Or, par des changements successifs, on peut amener les vecteurs dans n'importe quel ordre.

La somme vectorielle de plusieurs vecteurs ne dépend pas de leur ordre ; elle est commutative.

On peut aussi, sans modifier la somme vectorielle, remplacer plusieurs vecteurs par leur somme ou remplacer un vecteur par plusieurs autres dont il est la somme. Cela revient à remplacer un contour polygonal par un autre de mêmes extrémités.

La somme vectorielle est dite associative et distributive.

9. Groupe commutatif.

1° La somme vectorielle $\vec{V} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$, est **partout définie** sur l'ensemble E des vecteurs de l'espace, c'est-à-dire définie quels que soient $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$.

C'est une **opération interne**, c'est-à-dire : $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$ est un élément de E.

2° Cette opération est **associative** :

$$(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) + \vec{v}_3 = \vec{v}_1 + (\vec{v}_2 + \vec{v}_3).$$

3° Il existe dans l'ensemble E un vecteur, le vecteur nul noté $\vec{0}$, tel que : $\vec{v}_1 + \vec{0} = \vec{0} + \vec{v}_1 = \vec{v}_1$ quel que soit $\vec{v}_1$.

Ce vecteur $\vec{0}$ est dit : **élément neutre** pour la somme vectorielle.

4° Pour tout élément $\vec{v}$ de E, il existe un élément $\vec{v}'$ de E, parallèle à $\vec{v}$, de même module et de sens contraire tel que : $\vec{v} + \vec{v}' = \vec{0}$.

$\vec{v}'$ est dit **symétrique** de $\vec{v}$ et se note $-\vec{v}$.

On traduit l'existence de ces quatre propriétés en disant que :

L'ensemble E des vecteurs de l'espace muni de l'opération somme vectorielle a la structure de groupe.

5° La somme vectorielle est **commutative** : $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}_2 + \vec{v}_1$.

Le groupe est dit ***commutatif*** ou ***abélien***.

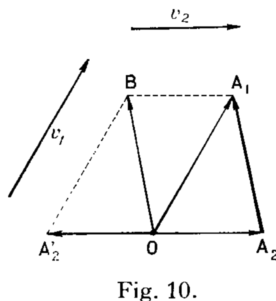


Fig. 10.

10. Différence vectorielle de deux vecteurs.

Soient deux vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$.

On appelle différence vectorielle de ces deux vecteurs, un vecteur $\vec{d}$, s'il existe, tel que ;

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_2 + \vec{d}.$$

Menons par un point O arbitraire,

$\overrightarrow{OA}_1 = \vec{v}_1$ et $\overrightarrow{OA}_2 = \vec{v}_2$.

On aura $$\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{A_2A_1}$$

et, par suite, $$\overrightarrow{\mathbf{A_2A_1}} = \vec{\mathbf{d}}.$$

D'autre part, si l'on mène $\overrightarrow{OA'_2} = -\vec{v}_2$ le parallélogramme OA'_2BA_1 donne

$$\overrightarrow{A_2A_1} = \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA'_2} = \vec{v}_1 + (-\vec{v}_2)$$

que l'on note simplement

$$\vec{d} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2.$$

Règle. Pour former la différence vectorielle $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$ on fait la somme vectorielle : $\vec{v}_1 + (-\vec{v}_2)$.

11. Produit d'un vecteur par un nombre relatif k.

Étant donnés un vecteur $\overrightarrow{AB}$ et un nombre relatif k,

on appelle produit du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par k, un vecteur $\overrightarrow{AC}$:
de même origine et de même support que le vecteur $\overrightarrow{AB}$;
de même sens que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ si k est positif ;
de sens contraire si k est négatif ;
et dont la longueur est celle de AB multipliée par $|k|$.

On écrit : $\overrightarrow{AC} = k.\overrightarrow{AB}$.

Exemple :

$$\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB},$$

$$\overrightarrow{AE} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}.$$

Si $k = -1$, le vecteur

$$\overrightarrow{AF} = (-1).\overrightarrow{AB}$$

lui est directement opposé.

On écrit simplement

$$\overrightarrow{AF} = -\overrightarrow{AB}.$$

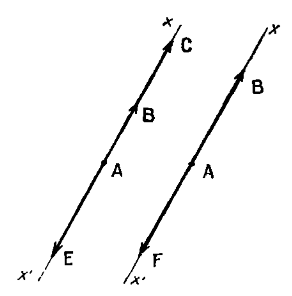


Fig. 11 a.

Si le vecteur donné est un vecteur glissant ou un vecteur libre $\vec{V}$, le vecteur $k\vec{V}$ est aussi un vecteur glissant ou un vecteur libre.

Si $\vec{u}$ est le vecteur unitaire de l'axe qui porte le vecteur glissant $\overrightarrow{AB}$ on a, d'après le n° 5 :

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\vec{u}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{u}}.$$

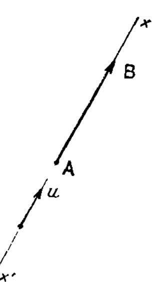


Fig. 11 b.

or, comme $\overline{u} = 1$,

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{u}} = \overline{AB}\,;$$

ou encore $\overrightarrow{\mathbf{AB}} = \overline{\mathbf{AB}}.\overrightarrow{\mathbf{u}}$.

12. Propriétés de ce produit.

1° k étant un nombre relatif, $\overrightarrow{V}$ un vecteur (élément de l'ensemble E des vecteurs de l'espace), l'opération précédente associe au couple $(k, \overrightarrow{V})$ le vecteur $k.\overrightarrow{V}$ de l'ensemble E. On dit que cette opération détermine sur E une **loi de composition externe**. Le nombre k est dit multiplicateur externe.

2° On a : $\boldsymbol{k(\overrightarrow{V}_1 + \overrightarrow{V}_2) = k\overrightarrow{V}_1 + k\overrightarrow{V}_2}$.

Soient $\overrightarrow{V}_1$ et $\overrightarrow{V}_2$ deux vecteurs libres et $\overrightarrow{S}$ leur somme vectorielle.

D'un point O arbitraire, construisons :

$$\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{V}_1, \quad \overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{V}_2$$

$$\overrightarrow{OA'_1} = k\overrightarrow{V}_1, \quad \overrightarrow{A'_1A'_2} = k\overrightarrow{V}_2.$$

On a : $\dfrac{\overrightarrow{OA'_1}}{\overrightarrow{OA_1}} = k = \dfrac{\overrightarrow{A'_1A'_2}}{\overrightarrow{A_1A_2}}$.

Les points O, A_2, A'_2 sont donc alignés et :

$\overrightarrow{OA'_2} = k.\overrightarrow{OA_2}$ soit :

$$\overrightarrow{OA'_1} + \overrightarrow{A'_1A'_2} = k(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1A_2})$$

ou $$k(\overrightarrow{V}_1 + \overrightarrow{V}_2) = k\overrightarrow{V}_1 + k\overrightarrow{V}_2 \qquad (1)$$

Fig. 12.

Le produit d'un nombre relatif par une somme vectorielle est distributif par rapport à cette somme vectorielle.

3° On a aussi :

$$(k_1 + k_2)\overrightarrow{V} = k_1\overrightarrow{V} + k_2\overrightarrow{V} \qquad (2)$$

Le produit est distributif par rapport à l'addition algébrique.

4° $$k_1(k_2\overrightarrow{V}) = (k_1k_2).\overrightarrow{V} \qquad (3)$$

Le produit est associatif par rapport à la multiplication algébrique.

5° $$1.\overrightarrow{V} = \overrightarrow{V} \qquad (4)$$

13. Espace vectoriel.

On a défini sur l'ensemble E des vecteurs :

1° Une loi de **composition interne** qui définit sur E une structure de **groupe abélien** ;

2° Une loi de **composition externe** où l'ensemble des **multiplicateurs est le corps** des réels et possédant les propriétés (1), (2), (3), (4) du n° 12.

On résume ces propriétés en disant que l'ensemble E est un **espace vectoriel**.

14. Projection d'un vecteur sur une droite parallèlement à un plan donné.

Soient (P) et (D) un plan et une droite donnés non parallèles, $\overrightarrow{AB}$ un vecteur, *a* et *b* les projections de A et B sur (D) parallèlement à (P). **$\overrightarrow{ab}$ est la projection de $\overrightarrow{AB}$ sur (D), parallèlement à (P).**

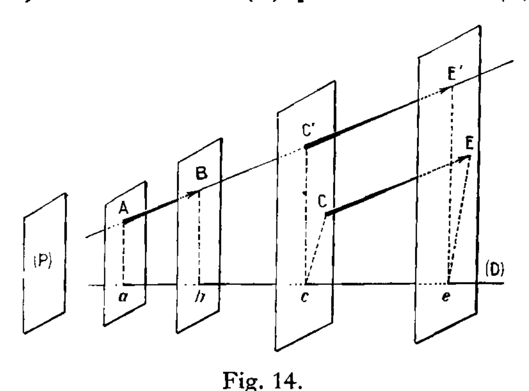


Fig. 14.

Soient $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CE}$ deux vecteurs parallèles (ou colinéaires), $\overrightarrow{ab}$ et $\overrightarrow{ce}$ leurs projections sur une droite (D), parallèlement au même plan (P).

Le support de $\overrightarrow{AB}$ rencontre en C′ et E′ les plans projetant C et E. Les plans parallèles coupant des droites parallèles :

$$\overrightarrow{C'E'} = \overrightarrow{CE}.$$

D'autre part, le théorème de Thalès donne :

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{C'E'}} = \frac{\overline{ab}}{\overline{ce}}.$$

Les vecteurs colinéaires $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{C'E'}$, $\overrightarrow{ab}$ et $\overrightarrow{ce}$ donnent :

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{C'E'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{C'E'}}$$

et

$$\frac{\overrightarrow{ab}}{\overrightarrow{ce}} = \frac{\overline{ab}}{\overline{ce}}$$

d'où

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{C'E'}} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CE}} = \frac{\overrightarrow{ab}}{\overrightarrow{ce}}.$$

Le rapport de deux vecteurs parallèles est le même que celui de leurs projections.

15. Théorème des projections.

Soient $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_2A_3}$, ..., $\overrightarrow{A_{n-1}A_n}$ plusieurs vecteurs et $\overrightarrow{OA_n}$ leur somme géométrique

$$\overrightarrow{OA_n} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1A_2} + ... + \overrightarrow{A_{n-1}A_n}.$$

Projetons ces vecteurs parallèlement au plan (P) sur l'axe $x'x$ en $\overrightarrow{oa_1}$, $\overrightarrow{a_1a_2}$, ... $\overrightarrow{a_{n-1}a_n}$ et $\overrightarrow{oa_n}$

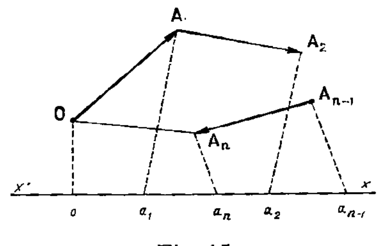


Fig. 15.

La relation de Chasles donne

$$\overline{oa_n} = \overline{oa_1} + \overline{a_1a_2} + ... + \overline{a_{n-1}a_n}$$

ou

$$proj_{x'x}\overrightarrow{OA_n} = proj_{x'x}\overrightarrow{OA_1} + proj_{x'x}\overrightarrow{A_1A_2} + ... + proj_{x'x}\overrightarrow{A_{n-1}A_n}.$$

La mesure algébrique de la projection de la somme géométrique de plusieurs vecteurs sur un axe est égale à la somme des valeurs algébriques des projections de ces vecteurs sur cet axe.

II. Produit scalaire (Révision)

16. Définitions.

On appelle angle de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace l'angle en O du triangle OAB obtenu en menant par un point O quelconque deux vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ équipollents à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Cet angle se note $(\vec{u}, \vec{v})$ ou $\widehat{AOB}$. C'est un angle saillant dont la mesure en radians est comprise entre 0 et π. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont parallèles et de même sens, $(\vec{u}, \vec{v}) = 0$; si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont parallèles et de sens contraires, $(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$.

On appelle produit scalaire de deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$, le nombre réel :

$$|\vec{u}|.|\vec{v}| \cos (\vec{u}, \vec{v}).$$

$|\vec{u}|$ et $|\vec{v}|$ sont les longueurs (ou modules) des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Ce produit scalaire se note : $\vec{u}.\vec{v}$. On écrit donc :

$$\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}| \cos (\vec{u}, \vec{v})$$

ou

$$\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}| \cos \theta \quad \text{avec } \theta = (\vec{u}, \vec{v}).$$

Signe du produit scalaire ($\vec{u} \neq \vec{0}, \vec{v} \neq 0$) :

$$o < \theta < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} > o$$

$$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} < o.$$

Cas particuliers :

$$\vec{u} = \vec{o} \text{ (ou } \vec{v} = 0) \Rightarrow \vec{u}.\vec{v} = o.$$

$$(\vec{u})^2 = \vec{u}.\vec{u} = |\vec{u}|.|\vec{u}| = |\vec{u}|^2$$

17. Orthogonalité de deux vecteurs.

si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$:

$$\vec{u} . \vec{0} = 0 \Leftrightarrow (\vec{u}, \vec{v}) = \pi/2.$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que deux vecteurs non nuls soient orthogonaux est que leur produit scalaire soit nul.

18. Propriétés.

1° Le produit scalaire ne change pas si on remplace les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ par des vecteurs équipollents.

2° Le produit scalaire est **commutatif**, car :

$$\vec{v}.\vec{u} = |\vec{v}|.|\vec{u}| \cos (\vec{v}, \vec{u}) = |\vec{u}||\vec{v}| \cos (\vec{u}, \vec{v}) = \vec{u}.\vec{v}.$$

3° $(\mathbf{m}\, \vec{\mathbf{u}}).\vec{\mathbf{v}} = \mathbf{m}.(\vec{\mathbf{u}}.\, \vec{\mathbf{v}})$ (m étant un nombre relatif).

En effet : $(m\vec{u}).\vec{v} = |m\vec{u}|.|\vec{v}| \cos (m\vec{u}, \vec{v})$.

Si m > 0 : $|m\vec{u}| = m.|\vec{u}|$; $(m\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v})$

Donc : $(m\vec{u}).\vec{v} = m|\vec{u}|.|\vec{v}| \cos(\vec{u}, \vec{v}) = m(\vec{u}.\vec{v})$.

Si m < 0 :

$|m\vec{u}| = -m|\vec{u}|$ et $(m\vec{u}, \vec{v}) = \pi - (\vec{u}, \vec{v})$

Donc :

$(m\vec{u}).\vec{v} = -m|\vec{u}|.|\vec{v}|.[-\cos(\vec{u}, \vec{v})] = m.(\vec{u}.\vec{v})$.

Le produit scalaire étant commutatif, on montrera facilement que :

$$\vec{u}.(n\vec{v}) = n(\vec{v}.\vec{u}) = n(\vec{u}.\vec{v})$$

et que : $(m\vec{u}).(n\vec{v}) = mn(\vec{u}.\vec{v})$ [Poser : $n\vec{v} = \vec{w}$].

4° **Propriété fondamentale.**

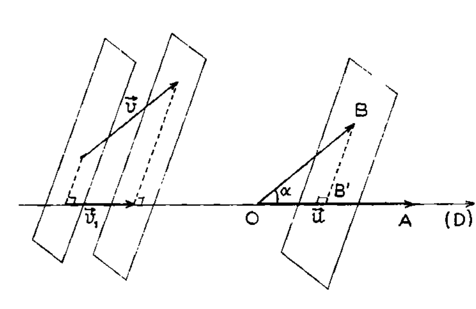


Fig. 18.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace, (D) le support du vecteur $\vec{u}$. Par l'origine O du vecteur $\vec{u}$ menons le vecteur $\overrightarrow{OB}$ équipollent à $\vec{v}$ et posons $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$, $\widehat{AOB} = \alpha$.

On a : $\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}| \cos \alpha$.

Projetons **orthogonalement** B en B' sur (D) et $\vec{v}$ en $\vec{v_1}$ et supposons que *le support* (D) *soit orienté par le vecteur* $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$.

On a : $\overline{OB'} = \bar{v}_1$.

Or $\overline{OB'} = OB \cos \alpha$. Donc :

$$\overrightarrow{OA} . \overrightarrow{OB} = \vec{u}.\vec{v} = OA.\, OB.\, \cos \alpha = OA.\, \overline{OB'} = |\vec{u}|.\, \bar{v}_1$$

Théorème. — **Le produit scalaire de deux vecteurs est égal au produit de la longueur d'un des vecteurs par la mesure algébrique de la projection orthogonale de l'autre sur l'axe orienté par le premier.**

Remarque. Le support (D) a été orienté de O vers A, donc

$OA = \overline{OA}$ et : $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \overline{OA}.\overline{OB'} = \bar{u}.\bar{v}_1$.

Si on change l'orientation de (D), on aura : $OA = -\overline{OA}$ et $OB \cos\alpha = -\overline{OB'}$; donc :

$\overrightarrow{OA}\ \overrightarrow{OB} = OA.OB\cos\alpha = \overline{OA}.\overline{OB'} = \bar{u}.\bar{v}_1$.

Autrement dit :

$$\vec{u}.\vec{v} = \bar{u}\,.\,\overline{\text{proj}_{\vec{u}}\vec{v}}$$

Théorème. — **Le produit scalaire de deux vecteurs est égal au produit de la mesure algébrique d'un des vecteurs sur un axe portant ce vecteur par la mesure algébrique de la projection orthogonale de l'autre vecteur sur cet axe.**

5° $\vec{\mathbf{u}}.(\vec{\mathbf{v}}_1 + \vec{\mathbf{v}}_2 + \ldots + \vec{\mathbf{v}}_n) = \vec{\mathbf{u}}.\vec{\mathbf{v}}_1 + \vec{\mathbf{u}}.\vec{\mathbf{v}}_2 + \ldots + \vec{\mathbf{u}}.\vec{\mathbf{v}}_n$.

On démontrera aisément cette propriété en projetant la somme vectorielle $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \ldots + \vec{v}_n$ sur un axe portant $\vec{u}$.

De même :

$(\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \ldots + \vec{u}_n).\vec{v} = \vec{u}_1.\vec{v} + \vec{u}_2.\vec{v} + \ldots + \vec{u}_n.\vec{v}$.

Le produit scalaire est distributif par rapport à la somme vectorielle.

EXERCICES

1. Décomposer un vecteur en deux autres dont on donne les longueurs.

2. Déterminer un vecteur de longueur donnée, connaissant le rapport des longueurs de ses composantes suivant deux directions données.

3. Décomposer un vecteur en deux autres, connaissant la direction de l'un et la longueur de l'autre.

4. Décomposer un vecteur en deux vecteurs rectangulaires, connaissant la somme des longueurs de ces deux vecteurs.

5. Trouver la somme géométrique des vecteurs obtenus en joignant le centre d'un polygone régulier aux différents sommets.

6. Trouver la somme géométrique des vecteurs obtenus en joignant un sommet d'un hexagone régulier aux différents autres sommets.

7. G étant le point de concours des médianes du triangle ABC, trouver la valeur de la somme géométrique

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}.$$

8. O, G et H étant respectivement le centre du cercle circonscrit, le centre de gravité et l'orthocentre d'un triangle ABC, établir les relations :

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\,\overrightarrow{OG}$$

$$\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 3\,\overrightarrow{HG}.$$

En déduire que les points O, H et G sont alignés.

9. On donne deux droites (D) et (D') non situées dans un même plan. Peut-on déterminer un plan (P) tel que les projections orthogonales de ces deux droites sur ce plan soient parallèles.

Application. — Déterminer un plan sur lequel un quadrilatère gauche donné se projette suivant un parallélogramme.

10. Peut-on déterminer un plan P sur lequel deux droites données se projettent suivant deux droites rectangulaires?

11. On donne quatre points A, B, C et D non situés dans un même plan. Trouver un point O tel que

$$\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}.$$

12. On donne un tétraèdre ABCD. Démontrer que

$$\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB}.$$

Préciser la direction de cette somme.

13. Sur les trois arêtes Ox, Oy, Oz, d'un trièdre trirectangle de sommet O on porte respectivement les longueurs

$$OA = a\ ; \quad OB = b\ ; \quad OC = c.$$

On désigne par A', B', C' les milieux respectifs de BC, CA, AB et par G le centre de gravité du triangle ABC.

1° Montrer que

$$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OA'} + \vec{OB'} + \vec{OC'} = 3.\vec{OG}.$$

2° Évaluer les vecteurs $\vec{AA'}$, $\vec{BB'}$, $\vec{CC'}$ en fonction des vecteurs $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$. En déduire la valeur des trois produits scalaires

$$\vec{OG}.\vec{AA'}, \quad \vec{OG}.\vec{BB'}, \quad \vec{OG}.\vec{CC'}.$$

Quelle relation les longueurs a, b, c doivent-elles vérifier pour que OG soit orthogonal à AA'?

Cette relation étant vérifiée et le point A étant supposé fixe, quel est l'ensemble des points A' lorsque B et C décrivent respectivement les demi-droites Oy et Oz ?

14. Dans un triangle quelconque ABC, soit O le centre du cercle circonscrit, H l'orthocentre, G le centre de gravité, A', B', C' les milieux des côtés BC, CA, AB ; A", B", C" les pieds des hauteurs issues de A, B, C ; α, β, γ les milieux des segments HA, HB, HC. On pose :

$$\vec{HA} = \vec{u}\ ; \ \vec{HB} = \vec{v}\ ; \ \vec{HC} = \vec{w}.$$

1° Montrer que : $\vec{HA}.\vec{BC} = \vec{HB}.\vec{CA} = \vec{HC}.\vec{AB} = 0.$ (1)

En déduire que : $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{w} = \vec{w}.\vec{u}.$

2° *a)* Montrer que : $\vec{HA'} = \frac{1}{2}(\vec{v} + \vec{w})$ et exprimer de façon analogue: $\vec{HB'}$ et $\vec{HC'}$.

b) On pose : $\vec{A'O} = m.\vec{u}$; $\vec{B'O} = n\vec{v}$; $\vec{C'O} = p.\vec{w}$ (m, n, p étant des constantes données). Montrer que :

$$\vec{HO} = \frac{1}{2}(\vec{v} + \vec{w}) + m\vec{u} = \frac{1}{2}(\vec{w} + \vec{u}) + n\vec{v} = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v}) + p.\vec{w}.$$

En déduire que : $m = n = p = \frac{1}{2}$,

et que : $$\overrightarrow{HO} = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}), \qquad (2)$$

$\overrightarrow{AH} = 2.\overrightarrow{OA'}$ et deux autres relations analogues.

3° Montrer que : $3\overrightarrow{HG} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$. (3)

(On remarquera que : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 0$).

Déduire de (2) et (3) que les points O, G, H sont alignés et que $\overrightarrow{HG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{HO}$.

4° Soit ω le point d'intersection des diagonales du parallélogramme $H\alpha OA'$.

a) Montrer que ω est le milieu des segments $A'\alpha$, $B'\beta$ et $C'\gamma$.

b) Montrer que : $\overrightarrow{\omega A'} = \frac{1}{4}(\vec{v} + \vec{w} - \vec{u})$. Quelles sont les formules analogues pour $\overrightarrow{\omega B'}$ et $\overrightarrow{\omega C'}$.

c) En déduire que : $\omega A'^2 = \omega B'^2 = \omega C'^2$ et qu'il existe un cercle (Ω) de centre ω passant par les neuf points : A', B', C', A'', B'', C'', α, β, γ.

d) Montrer que : $\overrightarrow{OA} = \frac{\vec{u} - \vec{v} - \vec{w}}{2}$ et en déduire que le rayon de (Ω) est égal à $\frac{R}{2}$ (R étant le rayon du cercle circonscrit à ABC).

15. 1° On donne un triangle OAB fixe quelconque.

a) Montrer qu'à tout point P du plan de ce triangle on peut associer un couple de nombres (x, y) et un seul satisfaisant à :

$$\overrightarrow{OP} = x.\overrightarrow{OA} + y.\overrightarrow{OB}.$$

b) On désigne par λ un nombre quelconque et l'on considère le point P de la droite AB défini par $\overrightarrow{BP} = \lambda\overrightarrow{BA}$. Mettre $\overrightarrow{OP}$ sous la forme :

$$\overrightarrow{OP} = x.\overrightarrow{OA} + y.\overrightarrow{OB},$$

x et y étant exprimés au moyen de λ.

Comment faut-il choisir λ pour que P soit entre A et B ?

Quelle relation faut-il imposer aux nombres λ et λ' pour que les points P et P' correspondants soient conjugués harmoniques par rapport à A et B ?

c) Quel est le lieu du point P défini par :

$$\overrightarrow{OP} = \lambda\overrightarrow{OA} + (1 - \lambda)\overrightarrow{OB}$$

quand λ varie de $-\infty$ à $+\infty$?

d) On suppose qu'il existe deux axes perpendiculaires $x'Ox$ et $y'Oy$ tels que $\overrightarrow{OA}$ soit porté par $x'Ox$ et $\overrightarrow{OB}$ par $y'Oy$ et l'on pose $\overline{OA} = a$, $\overline{OB} = b$. Exprimer, dans ce cas, en fonction de a, b, λ, les coordonnées du point P défini par :

$$\overrightarrow{OP} = \lambda\overrightarrow{OA} + (1 - \lambda)\overrightarrow{OB}.$$

Retrouver ainsi dans ce cas particulier, le lieu demandé à la question précédente, grâce à son équation.

2° Revenant au cas général, et λ désignant toujours un nombre quelconque, on définit un point M de la droite OA et un point N de la droite OB par les relations :

$$\overrightarrow{OM} = \lambda\overrightarrow{OA} \text{ et } \overrightarrow{ON} = (1 - \lambda)\overrightarrow{OB} ;$$

on désigne par D_λ la droite MN. Les éléments relatifs à un autre nombre λ' seront désignés par M', N' et $D_{\lambda'}$.

a) Existe-t-il des valeurs de λ pour lesquelles D_λ soit confondue avec un des côtés du triangle ? Deux droites D_λ et $D_{\lambda'}$ peuvent-elles être parallèles ? Quelle relation (R) doivent vérifier λ et λ' pour que la division (OAMM') soit harmonique ? Montrer par le calcul que la division (OBNN') est alors harmonique.

Montrer que les points P et P' définis par :

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} \text{ et } \overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{ON'}$$

sont sur la droite AB. Lorsque λ et λ' vérifient la relation (R), que peut-on dire de la division (ABPP') ? Retrouver ainsi la propriété relative aux divisions (OAMM') et (OBNN').

b) On suppose que μ est un nombre quelconque et l'on désigne par Q le point de D_λ défini par : $\overrightarrow{NQ} = \mu\overrightarrow{NM}$. Mettre $\overrightarrow{OQ}$ sous la forme :

$$\overrightarrow{OQ} = u.\overrightarrow{OA} + v.\overrightarrow{OB},$$

u et v étant exprimés en fonction de λ et de μ. A quelle condition doivent satisfaire λ et μ pour que Q soit sur la droite AB ?

u étant donné, peut-on déterminer λ et μ de manière que :

$$\overrightarrow{OQ} = u.\overrightarrow{OA} + (1 - u)\overrightarrow{OB} \text{ ?}$$

Discuter. Montrer que le calcul précédent permet de déterminer les droites D_λ passant par un point donné S de la droite AB. Discuter le nombre de solutions selon la position de S par rapport à A et B.

c) Q désignant toujours le point de D_λ défini par : $\overrightarrow{NQ} = \mu\overrightarrow{NM}$, on demande le lieu du point Q quand, μ étant fixe, λ varie de $-\infty$ à $+\infty$.

Déterminer le lieu du point de rencontre des droites D_λ et D_μ quand λ et μ sont liés par la relation : $\dfrac{1}{\lambda} + \dfrac{1}{\mu} = 2$ et que λ prend toutes les valeurs compatibles avec cette relation. (France métropolitaine, février 1960.)

16. En élevant au carré la relation $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$, retrouver l'une des relations fondamentales de la trigonométrie du triangle.

17. On donne un tétraèdre ABCD. Montrer que :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$$
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}.$$

Si dans un tétraèdre, deux couples d'arêtes opposées sont orthogonales, montrer que les sommes des carrés des arêtes opposées sont égales et que le troisième couple d'arêtes est aussi orthogonal.

18. Étant donnés sur une sphère O trois points A, B et C, P et Q désignant les projections de B et C sur OA, trouver en se servant des relations :

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PB} \text{ et } \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QC},$$

la relation suivante :

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

a, b, c, A, B, C étant les éléments du trièdre OABC.

19. Quelle condition doivent remplir deux vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ pour que leur produit scalaire $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$ soit égal à celui de leurs projections $\overrightarrow{Oa}.\overrightarrow{Ob}$ sur un plan passant par O ? Cette condition nécessaire est-elle suffisante ? Quelle propriété géométrique connue peut-on déduire de là ?

PREMIÈRE PARTIE

Géométrie analytique

CHAPITRE 2

REPRÉSENTATIONS PARAMÉTRIQUES D'UNE DROITE

I. COORDONNÉES CARTÉSIENNES DANS L'ESPACE

1. Repère cartésien dans l'espace.

Soient trois axes $x'Ox$, $y'Oy$, $z'Oz$, de même origine O et non coplanaires, orientés par trois vecteurs : $\overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{OJ}$, $\overrightarrow{OK}$, d'origine O et portés par ces axes.

Ce système d'axes constitue un **repère cartésien** dans l'espace.

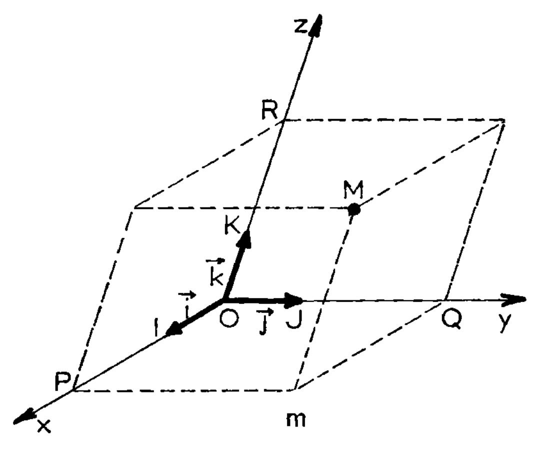


Fig. 1.

Ox, Oy, Oz forment un trièdre, qui est dit de sens **direct**, si un observateur, debout le long de Oz, les pieds en O, et regardant dans le sens Ox, a Oy à sa gauche. C'est la disposition que l'on

donne habituellement au trièdre Oxyz. Dans le cas contraire, le trièdre est dit de sens **rétrograde**. L'espace est ainsi orienté.

Si les axes forment entre eux des angles quelconques, ils constituent un système d'axes obliques.

Si les axes sont deux à deux orthogonaux, on a un système d'axes **rectangulaires**.

2. Vecteurs unités.

Pour mesurer les longueurs des vecteurs sur les axes du repère, on fait choix d'une unité qui peut ne pas être la même sur les trois axes.

On appelle **vecteur-unité** (ou **vecteur unitaire**) d'un axe, un vecteur :

porté par cet axe,
de même sens que lui,
dont la longueur (ou module) est prise pour unité de longueur.

Désignons par $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ les vecteurs unités de $x'x$, $y'y$ et $z'z$ respectivement.

3. Repère orthonormé.

Si $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ ont même module : $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}|$, le repère est dit **normé**.

Si, de plus, les axes sont orthogonaux deux à deux, le repère est dit **orthonormé**.

4. Composantes scalaires, ou coordonnées d'un vecteur.

Soit un repère cartésien Oxyz, non nécessairement orthonormé de vecteurs unités $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

Étant donné un vecteur libre $\vec{V}$, désignons par $\overrightarrow{OM}$ le vecteur lié d'origine O, équipollent à $\vec{V}$ (fig. 1). Projetons M en m sur le plan xoy, et en P, Q, R sur les axes $x'x$, $y'y$, $z'z$, parallèlement à Oz d'une part, et aux plans yOz, xOz et xOy d'autre part.

On peut écrire :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR},$$

ou : $$\overrightarrow{OM} = \overline{OP}\,\vec{i} + \overline{OQ}\,\vec{j} + \overline{OR}\,\vec{k}.$$

Posons : $\overline{OP} = X$; $\overline{OQ} = Y$; $\overline{OR} = Z$.

Les nombres relatifs X, Y, Z sont appelés les composantes scalaires ou coordonnées du vecteur $\vec{V}$.

Tout vecteur $\overrightarrow{V'} = \vec{V}$ de l'espace étant équipollent à $\overrightarrow{OM}$ ses projections sur les axes sont des vecteurs équipollents aux projections correspondantes de $\overrightarrow{OM}$, et ses composantes scalaires sont X, Y, Z.

Réciproquement : X, Y, Z sont les composantes scalaires d'un vecteur $\vec{V}$, déterminé à une équipollence près.

5. Coordonnées d'un point.

Soit un point M de l'espace. Associons-lui le vecteur lié $\overrightarrow{OM}$. On peut écrire (fig. 1) :

$$\overrightarrow{OM} = \overline{OP}\,\vec{i} + \overline{OQ}\,\vec{j} + \overline{OR}\,\vec{k}.$$

Les nombres relatifs $\overline{OP}$, $\overline{OQ}$, $\overline{OR}$ sont appelés les coordonnées du point M.

Par convention on pose : $\overline{OP} = x$, $\overline{OQ} = y$, $\overline{OR} = z$.

x est l'abscisse de M, y son ordonnée, et z sa cote. On écrit :

$$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}.$$

Réciproquement : si l'on se donne trois nombres réels x, y, z, les vecteurs : $\overrightarrow{OP} = x\,\vec{i}$, $\overrightarrow{OQ} = y\,\vec{j}$; $\overrightarrow{OR} = z\,\vec{k}$ sont parfaitement déterminés, leur vecteur somme $\overrightarrow{OM}$ également. Donc x, y, z, pris dans cet ordre, déterminent un point M unique.

Remarque :

Les plans yOz, xOz et xOy s'appellent **plans de coordonnées.**

6. Représentation d'un vecteur.

Soient $M_1(x_1, y_1, z_1)$ et $M_2(x_2, y_2, z_2)$ l'origine et l'extrémité d'un vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$.

$$\overrightarrow{OM_1} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k},$$

$$\overrightarrow{OM_2} = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k},$$

d'où :

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}$$

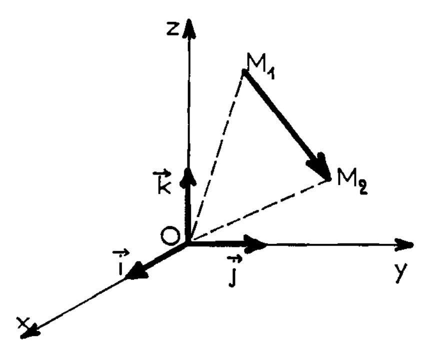


Fig. 6.

$$= (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}. \qquad (1)$$

$(x_2 - x_1)$, $(y_2 - y_1)$, $(z_2 - z_1)$ sont les composantes scalaires du vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$.

Conclusion :

Les composantes scalaires d'un vecteur, s'obtiennent en retranchant les coordonnées de son origine de celles de son extrémité.

On pose : $x_2 - x_1 = X$; $y_2 - y_1 = Y$; $z_2 - z_1 = Z$.

Corollaire :

$$\overrightarrow{V'} = \vec{V} \Leftrightarrow X' = X \; ; \; Y' = Y \; ; \; Z' = Z. \qquad (2)$$

Par suite :

$$\overrightarrow{V'} = h\,\vec{V} \Leftrightarrow X' = h\,X \; ; \; Y' = h\,Y \; ; \; Z' = h\,Z, \qquad (3)$$

ou encore :

$$\overrightarrow{V'} = h\,\vec{V} \Leftrightarrow \frac{X'}{X} = \frac{Y'}{Y} = \frac{Z'}{Z} = h. \qquad (4)$$

Remarque :

On convient que si l'un des dénominateurs est nul, le numérateur correspondant est aussi nul ; on supprime dans ce cas le rapport correspondant : cela se produit lorsque les deux vecteurs sont parallèles à l'un des plans de coordonnées.

7. Paramètres directeurs d'une direction de droites.

Soit, sur la droite (D), définissant la direction donnée, un point fixe M_1 (x_1, y_1, z_1) et un point quelconque $M(x, y, z)$ de (D). Construisons le vecteur :

$$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{M_1M}.$$

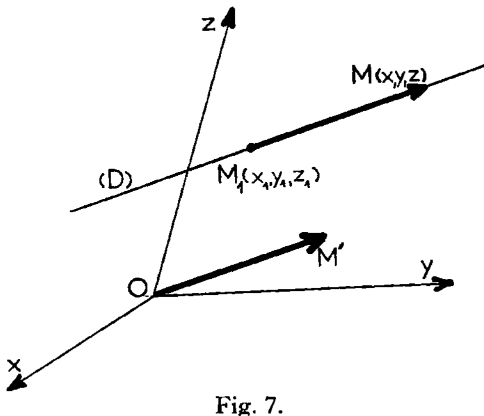


Fig. 7.

$\overrightarrow{OM'}$ est **un** vecteur directeur de (D) ; ses composantes scalaires : a, b, c, sont appelées : **paramètres directeurs de (D)** ; d'où la définition :

On appelle paramètres directeurs de (D), trois nombres, non tous nuls, composantes scalaires d'un vecteur porté par (D) ou par une parallèle à (D).

Si $\overrightarrow{OM'}$ est un vecteur unitaire : $|\overrightarrow{OM'}| = 1$, ses composantes α, β, γ, sont appelées **paramètres directeurs principaux.**

8. Cosinus directeurs.

Supposons le repère **orthonormé.**

Un vecteur unitaire $\vec{u}$ de (D) a pour composantes scalaires α, β, γ :

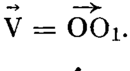
$$\begin{aligned} \alpha &= \vec{i}.\vec{u} = \cos(\overrightarrow{Ox}, \vec{u}) \\ \beta &= \vec{j}.\vec{u} = \cos(\overrightarrow{Oy}, \vec{u}). \\ \gamma &= \vec{k}.\vec{u} = \cos(\overrightarrow{Oz}, \vec{u}) \end{aligned} \qquad (5)$$

C'est pourquoi, dans ce cas, α, β, γ sont appelés les **cosinus directeurs** de (D).

Définition. Les cosinus directeurs d'une direction de droites sont les composantes scalaires d'un vecteur unitaire de (D), dans un repère orthonormé.

9. Changement de coordonnées par translation du repère.

Soit $Oxyz$ un repère cartésien, de vecteurs unitaires $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Appliquons à ce repère la translation de vecteur :



$$\vec{V} = \overrightarrow{OO_1}.$$

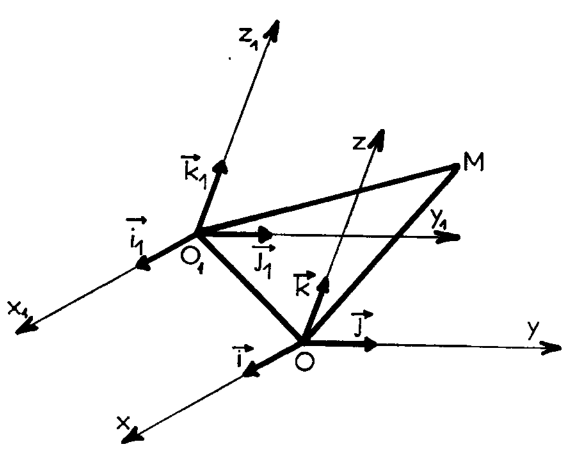


Fig. 9.

Les droites $x'x$, $y'y$, $z'z$ ont pour homologues les droites parallèles : x'_1x_1, y'_1y_1 et z'_1z_1, respectivement.

Les vecteurs unitaires $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ deviennent :

$$\vec{i_1} = \vec{i}\,; \qquad \vec{j_1} = \vec{j}\,; \qquad \vec{k_1} = \vec{k}.$$

Si x_1, y_1, z_1 sont les coordonnées de O_1 dans le repère $Oxyz$, on a :

$$\overrightarrow{OO_1} = x_1\,\vec{i} + y_1\,\vec{j} + z_1\,\vec{k}.$$

Désignons par x, y, z les coordonnées d'un point M dans le premier repère, et X, Y, Z ses coordonnées dans le deuxième.

L'égalité vectorielle :

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1M}$, est équivalente au système.

$$x\vec{i} = x_1\vec{i} + X\vec{i} = (x_1 + X)\vec{i},$$
$$y\vec{j} = y_1\vec{j} + Y\vec{j} = (y_1 + Y)\vec{j},$$
$$z\vec{k} = z_1\vec{k} + Z\vec{k} = (z_1 + Z)\vec{k}.$$

d'où :

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x_1 + X \\ y &= y_1 + Y \\ z &= z_1 + Z \end{aligned}} \qquad (6)$$

Ce sont les formules de changement de coordonnées par translation du repère.

II. LA DROITE DANS L'ESPACE

10. Représentations paramétriques d'une droite.

Une droite (D) peut être déterminée par un de ses points M_1 (x_1, y_1, z_1) et par des paramètres directeurs : a, b, c.

Soit $\vec{V}$ un vecteur de composantes scalaires : a, b, c.

Désignons par $M(x, y, z)$ un point quelconque de (D).

Pour qu'un point M appartienne à (D), il faut et il suffit que :

$$\overrightarrow{M_1M} = k\vec{V}. \qquad (1)$$

k étant un scalaire.

Par projection sur les axes, (1) entraîne :

$$\left.\begin{aligned} x - x_1 &= ka \\ y - y_1 &= kb \\ z - z_1 &= kc \end{aligned}\right\} \quad (2) \qquad \text{ou} \qquad \boxed{\begin{aligned} x &= x_1 + ka \\ y &= y_1 + kb \\ z &= z_1 + kc \end{aligned}} \quad (3)$$

Les égalités (3) expriment les coordonnées d'un point M de (D) en fonction du paramètre k.

Remarque :

Si $abc \neq 0$ (2) peut s'écrire :

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}. \qquad (4)$$

Cas particuliers :

1) Si l'un des nombres, a, b ou c est nul, soit c par exemple, les relations (3) s'écrivent :

$$\left.\begin{aligned} x &= x_1 + ka \\ y &= y_1 + kb \\ z &= z_1 \end{aligned}\right\} \quad (5) \qquad \text{ou} \qquad \left.\begin{aligned} \frac{x - x_1}{a} &= \frac{y - y_1}{b} \\ z &= z_1 \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

La droite (D) est alors parallèle au plan xOy.

2) Si deux des nombres a, b, c sont nuls, (D) est parallèle à l'un des axes. Exemple : si $a = b = 0$, (D) est parallèle à l'axe $z'z$.

11. Droite passant par deux points $A(x_0, y_0, z_0)$, $B(x_1, y_1, z_1)$.

Un vecteur directeur de la droite est

$$\overrightarrow{AB}(x_1 - x_0,\ y_1 - y_0,\ z_1 - z_0).$$

La droite a pour équations :

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}.$$

EXERCICES

20. Les composantes scalaires de $\overrightarrow{M_1M_2}$ étant : 3, -2 et 7, et les coordonnées de M_1 : -4, 3 et 2, calculer les coordonnées du point M_2.

21. Calculer les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ avec $A(1, 0, 0)$ $B(-1, -5, 0)$; $C(-1, -2, +2)$.

22. Calculer les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ avec :

$A(a, b, c)$; $B(b, c, a)$; $C(c, a, b)$

23. Calculer les nouvelles coordonnées du point $M(4, -2)$ après translation des axes, si la nouvelle origine est : $O_1(1, -3)$.

24. Que devient l'équation : $y^2 - 2y - 3x - 5 = 0$ après une translation d'axes telle que la nouvelle origine soit $O_1(-2, 1)$.

25. Même question pour $y^2 - 2x^2 + 3x + 1 = 0$ si la nouvelle origine est $O_1(3/4, -1/2)$.

26. Quelle doit être la nouvelle origine pour qu'après translation des axes, l'équation : $y^2 - 2y - 4x - 2 = 0$ prenne la forme : $Y^2 = 4X$.

27. Équations paramétriques d'une droite passant par le point $O(0,0,0)$ et de paramètres directeurs : 1, 2, 3.

28. Même question pour les droites définies par un point M, et leurs paramètres directeurs, dans les cas suivants.

a) $M_1(1, 3, 7)$; paramètres $(5, 1, 0)$
b) $M_1(3, -1, -2)$; paramètres $(0, 0, 7)$
c) $M_1(-4, 2, 1)$; paramètres $(-6, 0, 0)$.

29. Équations paramétriques d'une droite passant :

a) par les points $M_1(2, 5, -4)$ et $M_2(-3, 0, 8)$
b) par les points $M_1(-1, 0, 11)$ et $M_2(5, 3, 1)$.

30. 1° Montrer que les équations $x = 2z - 1$ et $y = -z + b$, où b est un paramètre, représentent une droite (D) de l'espace dont on donnera un système de paramètres directeurs.

2° Cette droite coupe les plans xOy, yOz, zOx respectivement en P, Q, R. Déterminer les coordonnées de ces points.

3° Déterminer les coordonnées du point Q' de la droite (D) conjugué harmonique de Q par rapport à P et R.

CHAPITRE 3

BARYCENTRE

1. Définition.

Soient n points donnés M_1, M_2, ... M_n et les scalaires : m_1, m_2, ... m_n, satisfaisant à la condition :

$$m_1 + m_2 + ... + m_n \neq 0.$$

O étant un point quelconque, soit le point G, tel que

$$m_1\overrightarrow{OM}_1 + m_2\overrightarrow{OM}_2 + ... + m_n\overrightarrow{OM}_n = (m_1 + m_2 + ... + m_n)\overrightarrow{OG} \quad (1)$$

L'égalité vectorielle (1) peut s'écrire :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{m_1\overrightarrow{OM}_1 + m_2\overrightarrow{OM}_2 + ... + m_n\overrightarrow{OM}_n}{m_1 + m_2 + ... + m_n} \quad (2)$$

ce qui, à la condition que : $m_1 + m_2 + ... + m_n \neq 0$, définit un vecteur bien déterminé.

Le point G est indépendant de O.

Soit un autre point O′ et soit le point G′ tel que :

$$m_1\overrightarrow{O'M}_1 + ... + m_n\overrightarrow{O'M}_n = (m_1 + ... + m_n)\overrightarrow{O'G'}. \quad (3)$$

En soustrayant membre à membre (3) de (1), on obtient :

$$m_1(\overrightarrow{OM}_1 - \overrightarrow{O'M}_1) + ... + m_n(\overrightarrow{OM}_n - \overrightarrow{O'M}_n) = (m_1 + ... + m_n)(\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{O'G'}).$$

Or : $\overrightarrow{OM}_1 - \overrightarrow{O'M}_1 = \overrightarrow{OO'}$ d'où :

$$(m_1 + ... + m_n)\overrightarrow{OO'} = (m_1 + ... + m_n)(\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{O'G'}),$$

ou, en divisant par : $m_1 + ... + m_n \neq 0$.

$$\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{O'G'} \Rightarrow \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'G'} = \overrightarrow{OG'}. \quad (4)$$

Les vecteurs équipollents : $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OC'}$, ayant même origine, leurs extrémités G et G′ sont confondues.

Donc le point G *défini par la relation* (1) *est unique : sa position est indépendante du point* O *choisi.*

Conclusion : Il existe un point G, et un seulement, vérifiant l'égalité vectorielle (1), quel que soit O, dans l'hypothèse :

$$m_1 + m_2 + \dots + m_n \neq 0.$$

Définition. Le point G défini par (1) ou (2) est appelé le barycentre des points M_1, M_2, ... M_n , affectés des coefficients respectifs

$$m_1, m_2, \dots, m_n\,;\ (m_1 + \dots + m_n \neq 0).$$

Remarque. Le barycentre est aussi appelé *centre des distances proportionnelles*

2. Propriété caractéristique.

a) Soit G le barycentre de M_1, M_2, ..., M_n affectés des coefficients m_1, m_2, ... m_n $(m_1 + m_2 + \dots + m_n \neq 0)$. O étant un *point quelconque*, il est défini par (1). *Prenons le point* O *en* G. La relation (1) devient :

$$\boxed{m_1\overrightarrow{GM}_1 + m_2\overrightarrow{GM}_2 + \dots + m_n\overrightarrow{GM}_n = \vec{0}} \qquad (5)$$

b) Réciproquement : soient M_1, M_2, ..., M_n des points affectés des coefficients m_1, m_2, ... m_n et G un point tel que (5) soit vérifiée. Montrons que G est le barycentre. En effet, O étant un point quelconque, (5) peut s'écrire :

$$m_1(\overrightarrow{OM}_1 - \overrightarrow{OG}) + \dots + m_n(\overrightarrow{OM}_n - \overrightarrow{OG}) = \vec{0},$$

ou :

$$m_1\overrightarrow{OM}_1 + \dots + m_n\overrightarrow{OM}_n = (m_1 + \dots + m_n)\overrightarrow{OG} \qquad (1)$$

Les égalités vectorielles (1) et (5) sont donc équivalentes.

Théorème. — Une condition nécessaire et suffisante pour que G soit le barycentre des points M_1, M_2, ..., M_n affectés des coefficients m_1, m_2, ..., m_n est :

$$m_1\overrightarrow{GM}_1 + m_2\overrightarrow{GM}_2 + \dots + m_n\overrightarrow{GM}_n = \vec{0}$$

(si $m_1 + m_2 + \dots + m_n \neq 0$).

3. Propriétés du barycentre.

1° **Commutativité.** La formule (5) montre que G est indépendant de l'ordre des points, car la somme vectorielle (5) étant commutative, il en est de même de (1).

2° **Associativité.**

Associons k points de l'ensemble, et soit g leur barycentre (qui existe, en supposant : $m_1 + ... + m_k \neq 0$).

g est défini par :

$$m_1\overrightarrow{\mathrm{OM}}_1 + ... + m_k\overrightarrow{\mathrm{OM}}_k = (m_1 + ... + m_k)\overrightarrow{\mathrm{O}g}. \qquad (7)$$

De même les $(n - k)$ points restants ont un barycentre g', tel que :

$$m_{k+1}\overrightarrow{\mathrm{OM}}_{k+1} + ... + m_n\overrightarrow{\mathrm{OM}}_n = (m_{k+1} + ... + m_n)\overrightarrow{\mathrm{O}g'}. \qquad (8)$$

Déterminons le barycentre G′ des points g et g', affectés respectivement des coefficients :

$$(m_1 + ... + m_k) \quad \text{et} \quad (m_{k+1} + ... + m_n).$$

G′ est défini par la relation :

$$(m_1 + ... + m_k)\overrightarrow{\mathrm{O}g} + (m_{k+1} + ... + m_n)\overrightarrow{\mathrm{O}g'}$$
$$= (m_1 + ... + m_k + ... + m_n)\overrightarrow{\mathrm{OG}'}. \qquad (9)$$

Montrons que le point G′ est le barycentre G de l'ensemble.

D'après (7) et (8) le premier membre de (9) peut s'écrire : $m_1\overrightarrow{\mathrm{OM}}_1 + ... + m_k\overrightarrow{\mathrm{OM}}_k + ... + m_n\overrightarrow{\mathrm{OM}}_n$, ce qui, d'après (1) est égal à : $(m_1 + ... + m_n)\overrightarrow{\mathrm{OG}}$.

Donc : $(m_1 + ... + m_n)\overrightarrow{\mathrm{OG}'} = (m_1 + ... + m_n)\overrightarrow{\mathrm{OG}}$,

ou
$$\overrightarrow{\mathrm{OG}'} = \overrightarrow{\mathrm{OG}},$$

ce qui montre que G′ est confondu avec G.

Théorème : Dans la recherche du barycentre, on peut remplacer plusieurs points par leur barycentre, à condition de l'affecter d'un coefficient égal à la somme des coefficients des points qu'il remplace.

Application. On pourra construire le barycentre d'un nombre quelconque de points, dès lors que l'on saura construire le barycentre de deux points quelconques.

4. Barycentre de deux points.

Soient deux points M_1 et M_2 affectés des coefficients m_1 et m_2 ; leur barycentre G vérifie la relation :

$$m_1\overrightarrow{GM_1} + m_2\overrightarrow{GM_2} = 0 \qquad (\text{avec } m_1 + m_2 \neq 0),$$

ou

$$m_1\overrightarrow{GM_1} = -m_2\overrightarrow{GM_2}.$$

Cette relation montre que les vecteurs sont colinéaires, et que G est le point qui divise le segment M_1M_2 dans le rapport

$$K = -\frac{m_2}{m_1}, \qquad \text{car} \qquad \frac{\overline{GM_1}}{\overline{GM_2}} = -\frac{m_2}{m_1}.$$

Réciproquement. — Tout point G d'un segment peut être défini comme barycentre des points M_1 et M_2, affectés de coefficients m_1 et m_2 tels que :

$$-\frac{m_2}{m_1} = \frac{\overrightarrow{GM_1}}{\overrightarrow{GM_2}}.$$

5. Coordonnées du barycentre.

Soient x_i, y_i, z_i les coordonnées d'un point M_i dans un repère cartésien donné ; désignons par X, Y, Z, celles du barycentre G de l'ensemble des points M_i.

Le théorème des projections, appliqué à la somme vectorielle (1) donne par projection sur les trois axes, les égalités scalaires :

$$m_1x_1 + \dots + m_nx_n = (m_1 + \dots + m_n)X,$$
$$m_1y_1 + \dots + m_ny_n = (m_1 + \dots + m_n)Y,$$
$$m_1z_1 + \dots + m_nz_n = (m_1 + \dots + m_n)Z,$$

d'où

$$X = \frac{m_1x_1 + \dots + m_nx_n}{m_1 + \dots + m_n},$$

$$Y = \frac{m_1y_1 + \dots + m_ny_n}{m_1 + \dots + m_n}, \qquad (10)$$

$$Z = \frac{m_1 z_1 + \ldots + m_n z_n}{m_1 + \ldots + m_n}.$$

Ces égalités montrent que les coordonnées du barycentre ne varient pas si on multiplie tous les coefficients par un même scalaire.

Remarque.

Pour simplifier l'écriture on représente la somme :

$$m_1 x_1 + \ldots + m_n x_n$$

par le symbole : $\sum_{i=1}^{i=n} m_i x_i$ (somme des termes de la forme : $m_i x_i$, avec : $i = 1, 2, 3, \ldots n$).

De même : $m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ s'écrit : $\sum_{i=1}^{i=n} m_i$.

Avec ces notations, les coordonnées du barycentre, s'écrivent :

$$X = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{i=n} m_i},$$

$$Y = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{i=n} m_i}, \qquad (11)$$

$$Z = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} m_i z_i}{\sum_{i=1}^{i=n} m_i}.$$

6. Centre des moyennes distances.

Si tous les coefficients sont égaux on peut prendre leur valeur commune égale à l'unité : le barycentre est alors appelé : centre des moyennes distances.

Ses coordonnées sont donc, avec : $m_1 = m_2 = \ldots = 1$.

$$X = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} x_i}{n},$$

$$Y = \frac{y_1 + \dots + y_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} y_i}{n}, \qquad (12)$$

$$Z = \frac{z_1 + \dots + z_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} z_i}{n}.$$

7. Centre des moyennes distances de deux points.

Soient A et B ces points. D'après le calcul relatif au barycentre de deux points, G est sur la droite AB, et :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = 0, \qquad \text{d'où :} \qquad \frac{\overline{GA}}{\overline{GB}} = -1.$$

G est donc le milieu de AB.

8. Centre des moyennes distances de trois points A, B, C.

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

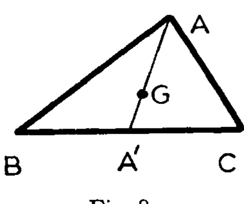


Fig. 8.

Remplaçons B et C par leur barycentre A′, milieu de BC, affecté du coefficient 2. Le point G vérifie la relation :

$$\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GA'} = \vec{0} \Rightarrow \frac{\overrightarrow{GA'}}{\overrightarrow{GA}} = -\frac{1}{2},$$

ce qui montre que G est sur la médiane AA′, au tiers de AA′ à partir de A′.

Ce point G est appelé le centre de gravité du triangle ABC.

La position de G étant indépendante de la façon dont on associe les points A, B, C, il en résulte que G appartient également aux autres médianes du triangle : ceci montre que les médianes d'un triangle concourent au centre de gravité du triangle.

L'utilisation du barycentre permet de démontrer d'une façon analogue que certaines droites d'une figure sont concourantes.

En voici des exemples.

9. Centre des moyennes distances de quatre points.

Soient quatre points A, B, C, D affectés de coefficients égaux.

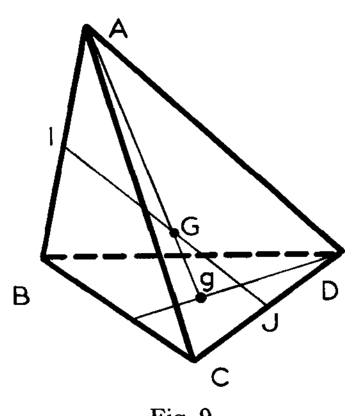


Fig. 9.

1° Pour déterminer leur barycentre, remplaçons A et B, d'une part, C et D d'autre part par leurs barycentres I et J affectés du coefficients 2. I est milieu de AB, J est milieu de CD.

Le point G, barycentre de I et J est tel que :

$$2\overrightarrow{GI} + 2\overrightarrow{GJ} = 0 \Rightarrow \frac{\overrightarrow{GI}}{\overrightarrow{GJ}} = -1.$$

Donc G est le milieu de IJ.

Le même raisonnement montrerait que G est le milieu des segments joignant les milieux des deux autres couples d'arêtes opposées, d'où le théorème :

Dans un tétraèdre, les trois segments joignant les milieux des arêtes opposées se coupent en un même point qui est leur milieu commun.

Ce point est le centre de gravité du tétraèdre ABCD.

2° Pour déterminer G on peut aussi remplacer les points B, C, D par leur barycentre g, affecté du coefficient 3.

On a :
$$3\overrightarrow{Gg} + \overrightarrow{GA} = 0 \Rightarrow \frac{\overrightarrow{GA}}{\overrightarrow{Gg}} = -3\,,$$

ce qui montre que G se trouve sur le segment Ag, aux trois quarts de Ag à partir de A.

Pour la même raison, G appartient aux segments joignant chaque sommet au centre de gravité de la face opposée, et se trouve aux trois quarts de chacun d'eux à partir du sommet.

Ce résultat, joint au précédent, montre que, dans un tétraèdre il y a sept droites distinctes remarquables concourant au centre de gravité du tétraèdre.

10. Exercice.

Barycentre des sommets d'un triangle affectés de coefficients égaux aux longueurs des côtés opposés (ou proportionnels à ces longueurs).

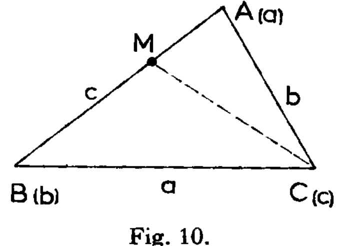


Fig. 10.

Désignons par a, b, c les longueurs des côtés. A, B, C étant affectés des coefficients a, b, c, soit M le barycentre de A et B :

$$a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} = 0 \Rightarrow \frac{\overrightarrow{MA}}{\overrightarrow{MB}} = -\frac{b}{a}.$$

Donc M est le pied de la bissectrice intérieure de l'angle C.

On sait que le barycentre de A(a), B(b), C(c) est le même que celui de M($a + b$) et de C(c) :

$$(a + b)\overrightarrow{GM} + c\,\overrightarrow{GC} = 0 \Rightarrow \frac{\overrightarrow{GM}}{\overrightarrow{GC}} = \frac{-c}{a+b} \qquad (\alpha)$$

ce qui montre que G se trouve sur la bissectrice intérieure de l'angle C, en un point déterminé par la relation (α). Ce point G se trouve pour la même raison sur les bissectrices intérieures des angles A et B : donc les bissectrices intérieures d'un triangle concourent en un même point.

11. Transformation de la somme : $\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2$.

O étant un point quelconque, on peut écrire :

$$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}\,; \quad \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}\,; \quad \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC}.$$

Effectuons les carrés scalaires des deux membres de ces égalités :

$$MA^2 = MO^2 + OA^2 + 2\,\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OA},$$

$$MB^2 = MO^2 + OB^2 + 2\,\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OB},$$

$$MC^2 = MO^2 + OC^2 + 2\,\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OC}.$$

Additionnons-les membre à membre, après avoir multiplié chacun des deux membres de ces égalités, respectivement par α, β et γ. Il vient :

$$\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2 = (\alpha + \beta + \gamma)MO^2 + \alpha OA^2$$
$$+ \beta OB^2 + \gamma OC^2 + 2\overrightarrow{MO}.(\alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC}). \qquad (13)$$

1. **Supposons :** $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$.

La relation étant indépendante de O est encore vérifiée si nous prenons O en G, barycentre des points A, B, C affectés des coefficients α, β et γ. D'où :

$$\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2 = (\alpha + \beta + \gamma)MG^2 + \alpha GA^2 + \beta GB^2 + \gamma GC^2 + 2\overrightarrow{MG}.(\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC}).$$

Or, d'après la théorie du barycentre :

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = 0.$$

Donc dans l'hypothèse $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$, l'égalité (13) s'écrit :

$$\boldsymbol{\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2 = (\alpha + \beta + \gamma)MG^2 + \alpha GA^2 + \beta GB^2 + \gamma GC^2.} \qquad (14)$$

C'est la formule de Leibniz.

Notation abrégée. Cette formule peut s'étendre à un nombre n quelconque de points, notés A_i affectés de coefficients α_i. On l'écrit alors :

$$\sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i MA_i^2 = MG^2 \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i + \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i GA_i^2 \qquad (14\ bis)$$

suivant une notation déjà utilisée pour les coordonnées du barycentre.

Application :

Ensemble des points M de l'espace tels que :
$\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2 = \lambda$ (λ donné) avec $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$.

D'après (14) ceci entraîne :

$$(\alpha + \beta + \gamma)MG^2 + \alpha GA^2 + \beta GB^2 + \gamma GC^2 = \lambda,$$

ou

$$MG^2 = \frac{\lambda - (\alpha GA^2 + \beta GB^2 + \gamma GC^2)}{\alpha + \beta + \gamma}. \qquad (15)$$

A, B, C, α, β, γ étant donnés, le point G est déterminé ; puisque λ est une constante donnée il en résulte que le second membre de cette égalité est une constante ; soit p sa valeur :

$$GM^2 = p.$$

Discussion :

De cette égalité on déduit que :

1° si $p > 0$: l'ensemble des points M est formé des points de la sphère de centre G et de rayon $\sqrt{p}$.

2° Si $p = 0$: il existe un point M unique, confondu avec G.

3° Si $p < 0$: il n'existe aucun point M répondant à la question.

Cas particulier. Posons $\alpha = \beta = 1$, $\gamma = 0$. Le point G est alors le milieu de AB. La formule (14) donne :

$\mathbf{MA^2 + MB^2 = 2GM^2 + 2GA^2}$ (théorème de la médiane).

II. **Supposons : $\boldsymbol{\alpha + \beta + \gamma = 0}$.**

La relation (13) s'écrit :

$$\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2 = \alpha OA^2 + \beta OB^2 + \gamma OC^2 + 2\overrightarrow{MO}.(\alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC}), \tag{16}$$

ou

$$2\overrightarrow{OM}.(\alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC}) = \alpha OA^2 + \beta OB^2 + \gamma OC^2 - (\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2). \tag{17}$$

Application :

Ensemble des points M tels que :

$$\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2 = \lambda$$

(λ étant une constante donnée),
(avec $\alpha + \beta + \gamma = 0$).

$$2\overrightarrow{OM}.(\alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC}) = \alpha OA^2 + \beta OB^2 + \gamma OC^2 - \lambda. \tag{18}$$

Étudions ce que devient la somme $\alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC}$ quand O varie.

Soit O′ un autre point quelconque : $\overrightarrow{O'A} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OA}$.

$$\alpha\overrightarrow{O'A} + \beta\overrightarrow{O'B} + \gamma\overrightarrow{O'C} = \alpha(\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OA}) + \beta(\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OB}) + \gamma(\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OC})$$
$$= (\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{O'O} + \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC},$$

d'où, puisque : $\alpha + \beta + \gamma = 0$,

$$\alpha\overrightarrow{O'A} + \beta\overrightarrow{O'B} + \gamma\overrightarrow{O'C} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC}.$$

Ceci montre que la somme : $\alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC}$ est indépendante de la position de O ; c'est un vecteur fixe que nous désignerons par $\vec{V}$: $\vec{V} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC}$.

Avec cette notation, l'égalité (18) s'écrit :

$$2\overrightarrow{OM}.\vec{V} = \alpha OA^2 + \beta OB^2 + \gamma OC^2 - \lambda.$$

O pouvant être pris quelconque supposons qu'il soit l'origine de $\vec{V}$. Soit *m* la projection orthogonale de M sur $\vec{V}$.

Par définition :

$$\overrightarrow{OM}.\vec{V} = \overline{Om}.\overline{V}.$$

d'où :

$$Om = \frac{\alpha OA^2 + \beta OB^2 + \gamma OC^2 - \lambda}{2\overline{V}}.$$

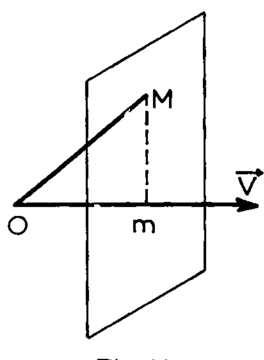


Fig. 11.

Puisque $|\vec{V}| = C^{te}$: $\overline{Om} = C^{te}$.

Donc les points M qui se projettent orthogonalement sur $\vec{V}$ au point fixe *m*, appartiennent au plan perpendiculaire à $\vec{V}$ en *m*.

Cas particulier. — Posons : 1, $\beta = -1$, $\gamma = 0$ et supposons que O soit le milieu de AB. La formule (16) s'écrit :

$$MA^2 - MB^2 = 2\,\overrightarrow{MO}(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB})$$
$$= 2.\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{AB}.$$

Soit $\overrightarrow{OH}$ la projection de $\overrightarrow{OM}$ sur le support de $\overrightarrow{AB}$; on a :

$$\mathbf{MA^2 - MB^2 = 2.\overline{AB}.\overline{OH}.}$$

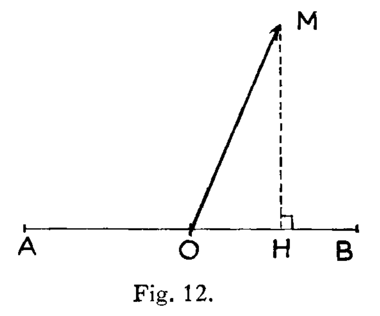


Fig. 12.

EXERCICES

31. Calculer les coordonnées du barycentre des points M_1 et M_2, affectés respectivement des coefficients $m_1 = 1$ et $m_2 = \lambda$, dans les cas suivants :

a) $M_1(3, 4, 2)$; $M_2(7, -6, 4)$; $\lambda = 1/2$.
b) $M_1(-1, 4, -6)$; $M_2(2, 3, -7)$; $\lambda = -3$.
c) $M_1(8, 4, 2)$; $M_2(3, 9, 6)$; $\lambda = -1/3$.
d) $M_1(7, 3, 9)$; $M_2(2, 1, 2)$; $\lambda = 4$.

32. Calculer les coordonnées du centre de gravité des triangles de sommets :

a) A (0, 2, 5) ; B (1, − 6, 4) ; C (0, − 5, − 2)
b) A (3, 6, − 2) ; B (7, − 4, 3) ; C (− 1, 4, − 7)
c) A (a, b, c) ; B (b, c, a) ; C (c, a, b)

33. Calculer les coordonnées du centre de gravité des tétraèdres de sommets :

a) A (2, 2, 4) ; B (1, 5, − 2) ; C (5, 1, 1) ; D (0, 5, − 1).
b) A (3, 6, − 2) ; B (7, − 4, 3) ; C (− 1, 4, − 7) ; D (0, 0, 0).

34. Quel est le centre des moyennes distances des sommets d'un hexagone régulier convexe, et généralement d'un polygone régulier convexe de $2n$ côtés ? Même question pour un polygone régulier convexe de $(2n + 1)$ côtés.

35. Soient trois points A, B, C, affectés des coefficients 1, 2 et − 3. Montrer que la somme $\vec{V} = \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}$ est un vecteur fixe, quel que soit le point M.

36. Soient cinq points A_1, A_2, A_3, A_4, A_5. Montrer que les dix droites joignant le milieu du segment limité à deux d'entre eux, au centre de gravité du triangle des trois autres, ainsi que les cinq droites joignant chacun d'eux au centre de gravité du tétraèdre formé par les quatre autres concourent en un même point. Généraliser à 6, 7 et 8 points.

37. Si O, G, H sont respectivement : le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, son centre de gravité et son orthocentre, montrer, en utilisant les propriétés du centre de gravité que : $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$ et que, par suite : O, G, H sont alignés.

En déduire que, si A′ est le milieu de BC : $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OA'}$.

38. Quels coefficients α, β, γ faut-il attribuer aux sommets d'un triangle ABC pour que le barycentre de A, B, C soit le centre I du cercle inscrit, α, β, γ étant exprimés en fonction des côtés a, b, c ? Même question pour les centres des cercles ex-inscrits : I_a, I_b, I_c et l'orthocentre H.

39. Étant donné un triangle ABC, on appelle A′, B′, C′ les milieux de BC, CA, AB et G le centre de gravité de ABC. Soit M un point quelconque de l'espace. Démontrer que l'on a :

$$2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} = 3MG^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{6}$$ (a, b, c étant les longueurs des côtés).

Écrire les deux autres égalités analogues.

40. Quel est l'ensemble des points d'un plan dont la somme des carrés des distances à n points de ce plan est égale à une constante donnée k ?

41. Dans un plan rapporté à un repère orthonormé $x'x$, $y'y$, on donne les points $A(a, 0)$, $B(-a, 0)$. m, n et k étant des nombres relatifs (ou scalaires) donnés, quel est l'ensemble des points du plan, tels que : $mMA^2 + nMB^2 = k$.

Examiner les cas particuliers : 1° $m = n$; 2° $m = -n$.

42. Soient les points $A(a, 0, 0)$; $B(0, b, 0)$; $C(0, 0, c)$ et $O(0, 0, 0)$.

Ces points étant affectés respectivement des coefficients : 1, 1, 1, — 1 déterminer les coordonnées de leur barycentre I.

G étant le centre de gravité de ABC, montrer que les points O, G, I sont alignés.

M désignant un point quelconque de l'espace, appliquer la formule de Leibniz au calcul de :

$MA^2 + MB^2 + MC^2 - MO^2$, en fonction de a, b, c et MI.

43. Soit un triangle ABC, de centre O, de centre de gravité G, I étant le centre du cercle inscrit et I_a celui du cercle ex-inscrit dans l'angle A. Appliquer la formule de Leibniz au calcul de :

$$OA^2 + OB^2 + OC^2 \;;\quad IA^2 + IB^2 + IC^2 \;;\quad I_aA^2 + I_aB^2 + I_aC^2,$$

et en déduire les expressions de : OG^2, IG^2 et I_aG^2 en fonction des trois côtés du triangle.

44. Dans un plan rapporté à un repère orthonormé $x'Ox$, $y'Oy$, on considère quatre points :

$$A_1(1, 0) \;;\quad A_2(0, 1) \;;\quad A_3(-1, 0) \;;\quad A_4(0, -1),$$

affectés respectivement des coefficients m_1, m_2, m_3, $m_4 (> 0)$.

1° Calculer les coordonnées du barycentre G de ces points.

2° A quelle relation doit-on assujettir les coefficients m_1, m_2, m_3, m_4 pour que G décrive un segment de droite λ donné passant par O ? Quelles sont les positions extrêmes de G sur ce segment ?

A quelle condition G décrit-il une diagonale $A_1 A_3$ ou $A_2 A_4$ du carré $A_1 A_2 A_3 A_4$?

3° On pose : $m_1 = \alpha \cos_2 u/2$; $m_2 = (1 - \alpha) \cos_2 v/2$

$m_3 = \alpha \sin_3 u/2$; $m_4 = (1 - \alpha) \sin_2 v/2$

avec $0 < \alpha < 1$.

Que représentent respectivement, le point g_1 de Ox d'abscisse : $\cos u$, et le point g_2 de Oy d'ordonnée $\cos v$?

Quelle est la figure formée par l'ensemble des points G lorsque, u et v restant constants, α varie de 0 à 1 ?

Quelle est la figure formée par l'ensemble des points G lorsque, α étant égal à 1/2, u et v varient de façon que : $u + v = \pi/2$?

45. On donne un repère orthonormé $Oxyz$. Soit, dans le plan xOy, le cercle (C) de centre O et rayon r. Un point M de ce cercle est repéré par $(\vec{Ox}, \vec{OM}) = \theta$ (θ angle donné). Par M on mène la droite (Δ) parallèle à la bissectrice (δ) de $(\vec{Oy}, \vec{Oz})$.

Quelles sont les coordonnées du point M ?

A. 1° Écrire les équations paramétriques de (Δ). En déduire les coordonnées du point d'intersection, P, de (Δ) et du plan xOz.

2° Ensemble des points P quand θ varie. Retrouver géométriquement ce résultat.

3° On considère le cylindre défini par le cercle (C) et la droite variable (Δ). Quelle est la nature de la section (E) de ce cylindre par un plan perpendiculaire en O à (δ). Préciser les éléments de (E).

B. Le plan perpendiculaire en M à OM coupe $y'y$ en Q et (Δ) en R. Soit (Δ') la parallèle menée par O à la droite MR.

1° Quelles sont les coordonnées de Q et R en fonction de r et θ ? Trouver les équations paramétriques de la droite MR et de la droite (Δ').

2° Un plan fixe de cote $z = h$ coupe (Δ') en A, Oz en B, MR en C. Trouver les coordonnées de A en fonction de θ.

3° Quel est l'ensemble des points A quand θ varie ? Retrouver géométriquement ce résultat.

4° Déterminer les coordonnées du centre de gravité G du tétraèdre OMQR. G se projette en g sur xOz et en g' sur yOz. Tracer les ensembles des points g et g' en supposant $r = 4$.

N. B. A et B sont indépendants.

CHAPITRE 4

REPÈRE ORTHONORMÉ DROITE ET PLAN

I. PRODUIT SCALAIRE

1. Expression analytique du produit scalaire de deux vecteurs.

Soient les vecteurs : $\vec{U} = X_1\vec{i} + Y_1\vec{j} + Z_1\vec{k}$,

et $\vec{V} = X_2\vec{i} + Y_2\vec{j} + Z_2\vec{k}$.

D'après les propriétés du produit scalaire, le produit :

$$\vec{U}.\vec{V} = (X_1\vec{i} + Y_1\vec{j} + Z_1\vec{k}).(X_2\vec{i} + Y_2\vec{j} + Z_2\vec{k}),$$

peut-être développé sous la forme :

$$\vec{U}.\vec{V} = X_1X_2(\vec{i})^2 + Y_1Y_2(\vec{j})^2 + Z_1Z_2(\vec{k})^2 + (X_1Y_2 + Y_1X_2)\vec{i}.\vec{j} + (X_1Z_2 + Z_1X_2)\vec{k}.\vec{i} + (Y_1Z_2 + Z_1Y_2)\vec{j}.\vec{k}. \quad (1)$$

Le repère étant orthonormé :

$$\left.\begin{matrix} \vec{i} \perp \vec{j} \\ \vec{i} \perp \vec{k} \\ \vec{j} \perp \vec{k} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \vec{i}.\vec{j} = \vec{k}.\vec{i} = \vec{j}.\vec{k} = 0,$$

$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1 \Rightarrow (\vec{i})^2 = (\vec{j})^2 = (\vec{k})^2 = 1,$$

et par suite, (6) se réduit à :

$$\boxed{\vec{U}.\vec{V} = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2}. \quad (2)$$

Application :

$\vec{u}$ étant vecteur unitaire de (D) : $(\vec{u})^2 = 1$.

Soient α, β, γ les composantes scalaires de $\vec{u}$, ou **cosinus directeurs** de (D) :

$$\vec{u} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k}.$$

D'après (2) :

$$\boxed{(\vec{u})^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1}. \qquad (3)$$

2. Expression analytique de la dérivée du produit scalaire.

D'après la règle de la dérivation d'un polynôme, la dérivée de (2) est :

$$(\vec{U}.\vec{V})' = X_1X'_2 + Y_1Y'_2 + Z_1Z'_2 + X_2X'_1 + Y_2Y'_1 + Z_2Z'_1. \quad (4)$$

3. Expression des cosinus directeurs d'une droite donnée par des paramètres directeurs : a, b, c.

Si $\vec{V}$ est un vecteur quelconque de (D) et λ un scalaire tel que : $\vec{V} = \lambda\vec{u}$; a, b, c étant les composantes scalaires de $\vec{V}$, α, β, γ celles de $\vec{u}$, on a :

$$a = \lambda\alpha \,; \qquad b = \lambda\beta \,; \qquad c = \lambda\gamma,$$

d'où : $\alpha = \frac{a}{\lambda}$; $\qquad \beta = \frac{b}{\lambda}$; $\qquad \beta = \frac{c}{\lambda}$

et : $\qquad a^2 + b^2 + c^2 = \lambda^2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = \lambda^2,$

$$\lambda = \pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Les cosinus directeurs de (D) s'expriment donc en fonction des paramètres directeurs, par :

$$\alpha = \frac{a}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \,; \qquad \beta = \frac{b}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \,; \qquad (5)$$

$$\gamma = \frac{c}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

λ étant la mesure algébrique de $\vec{V}$ sur la droite orientée (D) on prendra le signe + devant le radical si $\vec{u}$ et $\vec{V}$ sont de même sens, et le signe — dans le cas contraire.

4. Distance de deux points.

Soient les points $M_1(x_1, y_1, z_1)$ et $M_2(x_2, y_2, z_2)$: $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1)\vec{i}$ + $(y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$,

ou, en posant :

$x_2 - x_1 = X$; $y_2 - y_1 = Y$;
$z_2 - z_1 = Z$;

$\overrightarrow{M_1M_2} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$.

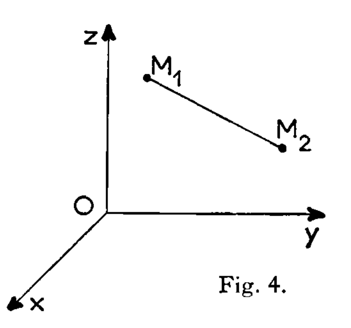


Fig. 4.

Formons le carré scalaire des deux membres, en appliquant la règle du produit scalaire, il vient :

$$\overrightarrow{M_1M_2}^2 = (X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k})^2 = X^2 + Y^2 + Z^2,$$

d'où : $|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$

$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (6)$$

5. Cosinus de l'angle de deux vecteurs.

Soient les vecteurs : $\vec{u}(X_1, Y_1, Z_1)$ et $\vec{v}(X_2, Y_2, Z_2)$:

$$\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos(\vec{u}, \vec{v}) = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2,$$

or : $|\vec{u}| = \sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}$, $\qquad |\vec{v}| = \sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}$,

d'où :

$$\boxed{\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}.\sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}}} \quad (7)$$

6. Orthogonalité de deux vecteurs.

Soient deux vecteurs **non nuls** : $\vec{u}(X_1, Y_1, Z_1)$ et $\vec{v}(X_2, Y_2, Z_2)$

$$(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos(\vec{u}, \vec{v}) = 0,$$

d'où : $\vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow X_1X_2 + Y_1\,Y_2 + Z_1Z_2 = 0.$

Réciproquement :

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u} \neq \vec{0}\,; \qquad \vec{v} \neq \vec{0} \\ X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow u \perp v.$$

Énoncé :

Une condition nécessaire et suffisante pour que deux vecteurs **non nuls** de composantes scalaires (X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2) soient orthogonaux est que :

$$\boxed{X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2 = 0.}$$

II. ÉQUATION NORMALE D'UNE DROITE, EN GÉOMÉTRIE PLANE

7. Soient le **repère orthonormé** : $x'Ox$, $y'Oy$ et une droite (D) du plan.

Désignons par H la projection orthogonale de O sur (D) et par $M(x, y)$ un point quelconque de (D).

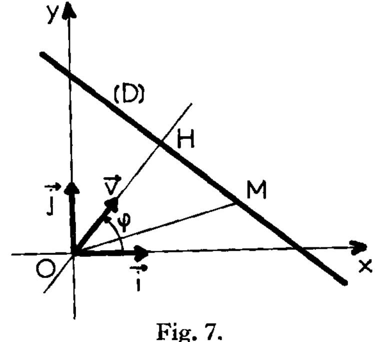


Fig. 7.

Soient $\vec{v}$ le vecteur unitaire orientant la droite OH et φ l'angle : $(\overrightarrow{Ox}, \vec{v})$.

Posons $\overline{OH} = p$.

$$\overrightarrow{HM} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{HM}.\vec{v} = 0. \qquad (1)$$

La relation (1) exprime une **condition nécessaire et suffisante** pour que M appartienne à (D).

Calculons le produit scalaire : $\overrightarrow{HM}.\vec{v}$:

$$\overrightarrow{HM}.\vec{v} = (\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OH}).\vec{v}$$
$$= \overrightarrow{OM}.\vec{v} - \overrightarrow{OH}.\vec{v}\,:$$

(1) s'écrit donc : $\overrightarrow{OM}.\vec{v} = \overrightarrow{OH}.\vec{v}$ (2)

Les composantes de $\vec{v}$ sont : $\cos\varphi$, $\sin\varphi$.

(2) devient : $x\cos\varphi + y\sin\varphi = \overline{\mathrm{OH}}.\bar{v} = p$.

ou $$\boxed{x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0}, \qquad (3)$$

(3) s'appelle l'**équation normale** de la droite (D).

Théorème. — **Soient H la projection orthogonale de O sur la droite (D), φ l'angle polaire d'un axe perpendiculaire à (D), p l'abscisse de H sur cet axe, l'équation normale de la droite (D) est :**

$$\mathbf{x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0.}$$

Remarques :

1) Si $\vec{v}$ n'est pas un vecteur unitaire, soient a et b ses composantes scalaires :

$\overrightarrow{\mathrm{OM}}.\vec{v} = xa + yb$ (5) ; $\qquad \bar{v} = |\vec{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$,

Or : $\overrightarrow{\mathrm{OM}}.\vec{v} = \bar{v}.\mathrm{proj.}_{\vec{v}}\,\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \bar{v}.\overline{\mathrm{OH}} = \bar{v}.p$.

Posons : $$\bar{v}.p = -c,$$

ou $$p\sqrt{a^2 + b^2} = -c.$$

L'égalité (5) s'écrit alors :

$$ax + by = -c \quad \text{ou} \quad ax + by + c = 0.$$

On retrouve l'équation générale d'une droite dans le plan. **Elle est orthogonale au vecteur $\vec{v}(a, b)$.**

2) Sachant que les cosinus directeurs de OH orienté par $\vec{v}$, sont :

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\,; \qquad \beta = \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \qquad (6)$$

On passe de l'équation générale à l'équation normale de (D) en divisant tous les coefficients par : $\sqrt{a^2 + b^2}$.

3) *Distance d'un point $M_0(x_0, y_0)$ à une droite donnée par son équation normale.*

On sait que (voir Cours de 1re) :

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Ici $a^2 + b^2 = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1.$

D'où :

$$\boxed{d = |x_0 \cos \varphi + y_0 \sin \varphi - p|} \qquad (7)$$

III. ÉQUATION DU PLAN

8. Équation normale du plan.

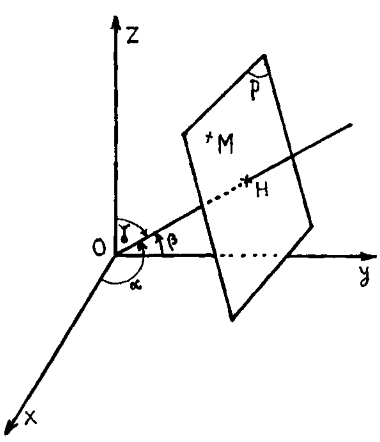


Fig. 8.

Soient le **repère orthonormé** $Oxyz$ et un plan (P).

Désignons par H la projection orthogonale de O sur (P) et par $M(x, y, z)$ un point quelconque de (P).

Soit $\vec{v}$ un vecteur unitaire orientant la droite OH et $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ ses composantes sur les axes (cosinus directeurs de OH).

Posons $\overline{OH} = p$.

$$\overrightarrow{HM} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{HM}.\vec{v} = 0. \qquad (1)$$

La relation (1) exprime une **condition nécessaire et suffisante** pour que M appartienne à (P).

Calculons le produit scalaire $\overrightarrow{HM}.\vec{v}$.

$\overrightarrow{HM}.\vec{v} = (\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OH})\vec{v} = \overrightarrow{OM}.\vec{v} - \overrightarrow{OH}.\vec{v}$

(1) s'écrit donc : $x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = \overline{OH}.\bar{v} = p.$

ou : $$\boxed{x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0}. \qquad (2)$$

(2) s'appelle **l'équation normale** du plan (P).

Théorème. — **Soient H la projection orthogonale de O sur le plan (P), cos α, cos β, cos γ les cosinus directeurs d'un axe perpendiculaire à (P), p l'abscisse de H sur cet axe, l'équation normale du plan (P) est :**

$$\mathbf{x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0,}$$

9. Conséquence.

Si $\vec{v}$ n'est pas un vecteur unitaire, soient a, b, c ses composantes scalaires.

$$\overrightarrow{OM}.\vec{v} = xa + yb + zc. \tag{5}$$

Or $\qquad \bar{v} = |\vec{v}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$

Donc : $\qquad \overrightarrow{OM}.\vec{v} = \overline{OH}.\bar{v} = p\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$

En posant : $p\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = -d$, on a donc :

$$\boxed{ax + by + cz + d = 0}. \tag{6}$$

Réciproquement : soit $M(x, y, z)$ un point dont les coordonnées vérifient (6), et H sa projection sur le support de $\vec{v}(a, b, c)$.

$$(6) \Rightarrow \overrightarrow{OM}.\vec{v} = -d = \overline{OH}.\bar{v} = C^{te}.$$

Le point $M(x, y, z)$ appartient donc au plan (P) perpendiculaire au support de $\vec{v}$ au point H défini par $\overline{OH}.\bar{v} = -d$.

Théorème. — **En repère orthonormé, l'équation**

$$\mathbf{ax + by + cz + d = 0}$$

représente un plan normal au vecteur de composantes scalaires a, b, c.

Remarques :

1) Si $\vec{v}(a, b, c)$ n'est pas un vecteur unitaire, les cosinus directeurs de la droite OH sont :

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \qquad \cos\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

D'autre part : $\qquad p = \dfrac{-d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$

On passe donc de l'équation $ax + by + cz + d = 0$ à l'équation normale en divisant a, b, c, par $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

2) En divisant tous les coefficients par $d \neq 0$, on écrit l'équation (6) sous la forme :

$$\frac{a}{d}x + \frac{b}{d}y + \frac{c}{d}z + 1 = 0,$$

qui montre que l'équation du plan ne contient que trois paramètres indépendants.

Il suffira donc de trois conditions pour déterminer un plan.

Par exemple, trois points non alignés définissent un plan.

Soient donc : $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, $A_3(x_3, y_3, z_3)$ les points donnés. En écrivant que leurs coordonnées vérifient l'équation : $\frac{a}{d}x + \frac{b}{d}y + \frac{c}{d}z + 1 = 0$, on obtient un système de trois équations à trois inconnues, celles-ci étant les coefficients $\frac{a}{d}, \frac{b}{d}, \frac{c}{d}$ qu'on représentera par U, V, W.

$$\begin{aligned} Ux_1 + Vy_1 + Wz_1 + 1 &= 0, \\ Ux_2 + \dots\dots\dots\dots &= 0, \\ Ux_3 + \dots\dots\dots\dots &= 0. \end{aligned}$$

La solution (U, V, W) de ce système fournit les coefficients de l'équation du plan passant par A_1, A_2 et A_3.

10. Plan passant par un point donné $A(x_0, y_0, z_0)$ et orthogonal à un vecteur $\vec{V}(a, b, c)$.

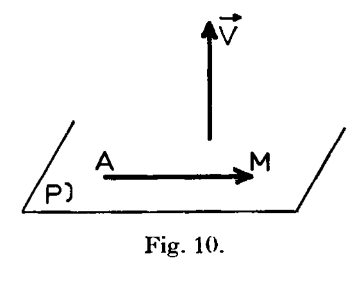


Fig. 10.

Pour qu'un point $M(x, y, z)$ appartienne à ce plan, il faut et il suffit que $\vec{V}$ soit orthogonal à AM.

$$\vec{V} \perp \overrightarrow{AM} \Leftrightarrow \vec{V}.\overrightarrow{AM} = 0,$$

ou $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0,$

$$\boxed{ax + by + cz - (ax_0 + by_0 + cz_0) = 0}. \qquad (6)$$

ou, en posant : $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$

$$ax + by + cz + d = 0.$$

11. Cas particuliers :

1° *Plans de coordonnées :*

$b = c = d = 0 \Rightarrow x = 0$ (plan yOz).

$a = c = d = 0 \Rightarrow y = 0$ (plan xOz).
$a = b = d = 0 \Rightarrow z = 0$ (plan xOy).

2° *Plans parallèles aux plans de coordonnées.*

$b = c = 0 \Rightarrow ax + d = 0 \Rightarrow x = -\frac{d}{a}$ (plan parallèle au plan yOz).

$a = c = 0 \Rightarrow by + d = 0 \Rightarrow y = -\frac{d}{b}$ (plan parallèle au plan xOz).

$a = b = 0 \Rightarrow cz + d = 0 \Rightarrow z = -\frac{d}{c}$ (plan parallèle au plan xOy).

3° *Plans parallèles aux axes.*

Si $a = 0$ l'équation est : $by + cz + d = 0$ (plan parallèle à Ox).
Si $b = 0$ l'équation est : $ax + cz + d = 0$ (plan parallèle à Oy).
Si $c = 0$ l'équation est : $ax + by + d = 0$ (plan parallèle à Oz).

12. Distance d'un point à un plan.

Soient le plan (P) d'équation : $ax + by + cz + d = 0$, un point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ et sa projection orthogonale H sur (P).

On sait que le vecteur $\vec{V}(a, b, c)$ est orthogonal à (P) : on peut supposer que ce vecteur est porté par la droite M_0H.

Désignons par x_1, y_1, z_1 les coordonnées de H, et posons :

$$|\overrightarrow{M_0H}| = M_0H = r.$$

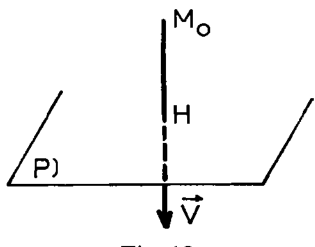


Fig. 12.

$$\vec{V}.\overrightarrow{M_0H} = a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) + c(z_1 - z_0)$$
$$= ax_1 + by_1 + cz_1 - (ax_0 + by_0 + cz_0).$$

Les deux vecteurs étant colinéaires :

$$|\vec{V}.\overrightarrow{M_0H}| = |\vec{V}||\overrightarrow{M_0H}| = r\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

De plus, H appartenant à (P) :

$$ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0 \quad \text{ou} \quad ax_1 + by_1 + cz_1 = -d,$$

d'où :

$$\vec{V}.\overrightarrow{M_0H} = -d - (ax_0 + by_0 + cz_0),$$

et par suite :

$$|\vec{V}.\overrightarrow{M_0H}| = |ax_0 + by_0 + cz_0 + d| = r\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Et enfin :

$$r = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \qquad (7)$$

qui est la distance du point M au plan (P).

Si le plan est donné par son équation normale, on aura :

$$r = |x_0 \cos \alpha + y_0 \cos \beta + z_0 \cos \gamma - p|.$$

13. Application : Plans bissecteurs.

Soient les plans :

$$ax + by + cz + d = 0\,; \qquad a'x + b'y + c'z + d' = 0.$$

Pour déterminer les équations des bissecteurs des dièdres formés par ces deux plans on écrira que les plans bissecteurs sont formés de l'ensemble des points $M_0(x_0, y_0, z_0)$ tels que :

$$\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|a'x_0 + b'y_0 + c'z_0 + d'|}{\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}} \qquad (8)$$

d'où les équations des plans bissecteurs :

$$1^{\circ}\ \frac{ax + by + cz + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{a'x + b'y + c'z + d'}{\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}, \qquad (9)$$

$$2^{\circ}\ \frac{ax + by + cz + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = -\frac{a'x + b'y + c'z + d'}{\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}. \qquad (10)$$

EXERCICES

I. Repère orthonormé.

46. Calculer les angles formés avec les axes par les droites joignant l'origine :
a) au point M (8, 6, 0) ;
b) au point N (2, — 1, — 2).

47. Soit $\vec{V} = 2\vec{i} + 5\vec{j} + 3\vec{k}$. Calculer $|\vec{V}|$.

48. Soient les vecteurs : $\vec{V}_1(2, 2, 5)$; $\vec{V}_2(0, 3, 3)$; $\vec{V}_3(-2, 2, -2)$ et [illegible](0, 4, 0). Calculer les composantes scalaires de la somme :

$$\vec{R} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 + \vec{V}_4$$

et ses cosinus directeurs.

Calculer les produits scalaires : $\vec{V}_1.\vec{V}_2$; $\vec{V}_1.\vec{V}_3$; $\vec{V}_1.\vec{V}_4$ et autres analogues.

49. Calculer la longueur et les cosinus directeurs du vecteur $\overrightarrow{AB}$ dans les cas suivants :

a) A (4, 7, − 2) ; B (3, 5, − 4).
b) A (3, − 8, 6) ; B (6, − 4, 6).
c) A (*a*, *b*, *c*) ; B (*b*, *c*, *a*).

50. Montrer que

$$A\left(-\frac{3}{2}, 1, -\frac{7}{2}\right) ; B\left(1, 1, -\frac{3}{2}\right) ; \text{et } C\left(-\frac{3}{2}, 3, -1\right),$$

sont les sommets d'un triangle isocèle.

51. A quelle équation satisfont les coordonnées de M(*x*, *y*, *z*) si sa distance au point A(2, 3, 4) est égale à 10 ?

52. Quelle est l'équation qui exprime que M(*x*, *y*, *z*) est équidistant de [illegible](1, 3, 5) et B(0, 2, 4) ?

53. Montrer que les points :

A(− 1, 3/2, 1) ; B(2, 3/2, − 2) ; C(− 1, 9/2, − 2),

sont les sommets d'un triangle équilatéral. Calculer le périmètre de ce triangle.

54. Calculer le périmètre du triangle de sommets :

A(*a*, *b*, *c*) ; B(− *a*, *b*, *c*) ; C(− *a*, − *b*, − *c*).

55. Calculer l'angle de deux vecteurs dont les composantes sont :

a) (3, 6, 2) et (− 6, 2, 3).
b) (6, 3, − 2) et (3, − 2, 6).
c) (3, 2, − 4) et (5, − 4, 3).
d) (3, − 1, 5/2) et (0, 5, 1/3).

56. $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$, $\vec{V}_3$ étant des vecteurs unités portés par les bissectrices des faces du trièdre Oxyz formé par les axes d'un repère orthonormé, calculer la longueur du vecteur $\vec{V}$, somme de $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$ et $\vec{V}_3$.

Calculer les angles du vecteur $\vec{V}$ avec les axes, et les angles que forment les vecteurs $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$, $\vec{V}_3$, $\vec{V}$ entre eux.

57. Montrer que les points A(3, 7, 2) ; B(4, 3, 1) ; C(1, 6, 3) ; D(2, 2, 2) sont les sommets d'un parallélogramme.

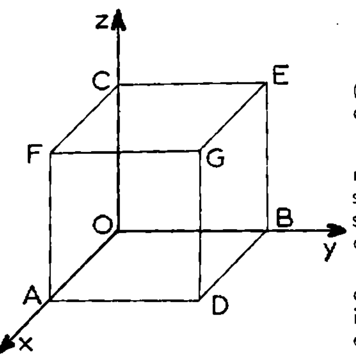
58. Montrer que les points A(3, 7/2, 3/2) ; B(3/2, 11/2, 1/2) ; C(0, 3/2, 2) et D([illegible]2, 7/2, 1) sont les sommets d'un rectangle.

59. Montrer que les points A(6, — 6, 0) ; B(3, — 4, 4) ; C(2, — 9, 2) et D(— 1, — 7, 6) sont les sommets d'un losange.

60. Calculer les longueurs des médianes du triangle dont les sommets sont les points : A(3/2, 2, — 1) ; B(7/2, 0, 4) ; C(— 5/2, 2, 3).

61. Soit le tétraèdre de sommets O(0, 0, 0) ; A(4, 0, 0), B(4, 3, 0) ; C(0, 0, 3). Calculer les angles formés par les couples d'arêtes opposées.

62. Soient trois droites (D), (D′), (D″) concourant à l'origine des axes d'un repère orthonormé, et de cosinus directeurs respectifs (α, β, γ) ; (α', β', γ') ; (α'', β'', γ''), tels que :



$$\alpha = \beta = \gamma = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ et } \gamma' = 0.$$

On suppose de plus que : (D), (D′), (D″) sont deux à deux orthogonales. Calculer α', β', α'', β'', γ''.

63. Étant donné un repère orthonormé $Oxyz$, on suppose qu'un cube a son sommet en O et que les arêtes issues de O sont portées par Ox, Oy et Oz. La longueur de cette arête étant égale à a :

1° Calculer les composantes et les cosinus directeurs des diagonales du cube issues de O et du sommet A porté par Ox : diagonales OG et AE (voir figure).

2° Mêmes questions pour les droites OE et DE.

3° Soient O_1, O_2, O_3 les centres de trois faces qui ne contiennent pas O. Calculer les longueurs des arêtes du tétraèdre $OO_1O_2O_3$.

II. Droites et plans.

64. L'équation normale d'une droite, en géométrie plane étant : $x \cos \varphi + y \sin \varphi - p = 0$, écrire les équations normales des droites correspondant aux cas suivants :

a) $\varphi = 3\pi/2$; $p = 3$.
b) $\varphi = 2\pi/3$; $p = 2$.

65. Déterminer les valeurs de φ et de p correspondant aux droites suivantes :

a) $x = 5$.
b) $\sqrt{2}\,x + \sqrt{2}\,y - 6 = 0$.
c) $\sqrt{2}\,x - \sqrt{2}\,y - 8 = 0$.
d) $3x - 4y - 2 = 0$.

66. Calculer la distance du point A(2, 1) à la droite dont l'équation normale est :

$$-\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 3 = 0.$$

67. Calculer les coordonnées des points d'intersection des plans suivants, avec les axes du repère.

a) $2x + 3y + 4z - 24 = 0.$
b) $6x + 4y - z + 12 = 0.$
c) $4x + 3z + 36 = 0.$
d) $5y - 8z - 40 = 0.$

68. Quelle est l'équation du plan déterminé par trois points A, B, C, dans les cas suivants :

a) A (2, 3, 0) ; B (– 2, – 3, 4) ; C (0, 6, 0).
b) A (1, 1, – 1) ; B (– 2, – 2, 2) ; C (1, – 1, 2).
c) A (3, 0, 0) ; B (0, 5, 0) ; C (0, 0, 4).
d) A (– 1, 0, 0) ; B (0, – 1, 0) ; C (0, 0, 4).

69. Montrer que les quatre points : A(2, – 3, 4) ; B(1, 0, 2) ; C(2, – 1, 2) et D(1, – 1, 3) sont dans un même plan.

70. Quelle est l'équation du plan passant par le point : A(4, 3, 3) et perpendiculaire au vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$ déterminé par les points : $M_1(3, 4, -1)$ et $M_2(5, 3, 7)$?

71. Quelles sont les équations des faces d'un tétraèdre de sommets A(0, 3, 1); B(2, – 7, 1) ; C(0, 5, – 4) et D(2, 0, – 1) ?

72. Quelle est l'équation du plan médiateur du segment A_1A_2 déterminé par les points : $A_1(x_1, y_1, z_1)$ et $A_2(x_2, y_2, z_2)$?
Application aux points : $A_1(1, 0, 0)$; $A_2(0, 1, 0)$.

73. Soient les points : O(0, 0, 0) ; A(4, 0, 0) ; B(4, 3, 0) ; C(0, 0, 3). Équations des plans déterminés par les points :
a) O, B, C ; *b)* A, B, C ; *c)* O, A, B ; *d)* O, A, C.

74. Soit le plan d'équation : $x + 2y - z + 4 = 0$. Calculer :
1° Sa distance à l'origine ; 2° sa distance au point A(6, – 3, – 1).

75. Quelle est la distance du point B(9, – 1, 0) au plan d'équation :

$$4x + 3y + 12z + 6 = 0 \,?$$

76. Quelles sont les équations des plans bissecteurs des dièdres formés par les plans d'équations :

a) $z = 0$ et $y = 0.$
b) $y = 0$ et $3x - 4y = 0.$
c) $y = 0$ et $3x + 4z - 12 = 0.$
d) $x + 2y - z + 4 = 0$ et $2x - y + 4z - 1 = 0.$
e) $3x - y + 2z - 4 = 0$ et $x + 2y - z + 3 = 0.$
f) $2x - y - 2z - 3 = 0$ et $6x - 3y + 2z - 4 = 0.$
g) $2x - y + 2z = 0$ et $x + 2y - 2z = 0.$

77. Déterminer la valeur de k de façon que le point A(5, – 4, – 6) appartienne au plan d'équation :

$$x + ky - 2z - 9 = 0.$$

78. Calculer les coordonnées du symétrique d'un point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ par rapport au plan d'équation

$$ax + by + cz + d = 0.$$

CHAPITRE 5

SPHÈRE — CYLINDRE — CONE
(Repère orthonormé)

1. Équation d'une sphère.

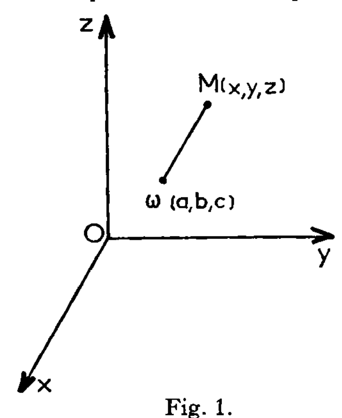


Fig. 1.

Considérons la sphère donnée par son centre $\omega(a, b, c)$ et son rayon R. Pour qu'un point M appartienne à cette sphère, il faut et il suffit que :

$$\omega M = R \quad \text{ou} \quad \omega M^2 = R^2$$
$$\text{ou} \quad \omega M^2 - R^2 = 0.$$

Or la distance du point $M(x, y, z)$ au point $\omega(a, b, c)$ est donnée par la formule :

$$\omega M^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2.$$

Donc pour que M appartienne à la sphère, il faut et il suffit que :

$$\boxed{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 - R^2 = 0}. \qquad (1)$$

En développant (1) on obtient :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + a^2 + b^2 + c^2 - R^2 = 0,$$

ou, en posant :

$$d = a^2 + b^2 + c^2 - R^2,$$

$$\boxed{x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0}. \qquad (2)$$

Réciproquement : soit une équation :

$$K(x^2 + y^2 + z^2) - 2Ax - 2By - 2Cz + D = 0. \qquad (3)$$
$$(K \neq 0).$$

Divisons tous les coefficients par K et posons :

$$\frac{A}{K} = a\,; \qquad \frac{B}{K} = b\,; \qquad \frac{C}{K} = c\,; \qquad \frac{D}{K} = d.$$

L'équation devient :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0.$$

que l'on peut écrire, sous la forme :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2 - d) = 0.$$

Ou en posant : $a^2 + b^2 + c^2 - d = R^2$, dans l'hypothèse :

$$a^2 + b^2 + c^2 - d \geqslant 0,$$

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 - R^2 = 0.$$

Cette équation exprime que le point $M(x, y, z)$ appartient à la sphère de centre $\omega(a, b, c)$ et de rayon :

$$R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}.$$

Conclusion : Toute équation du second degré de la forme (3) avec $K \neq 0$ est celle d'une sphère de centre $\omega(a, b, c)$ et de rayon : $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$ à condition que $a^2 + b^2 + c^2 - d \geqslant 0$, a, b, c, d étant égaux à : $\frac{A}{K}$, $\frac{B}{K}$, $\frac{C}{K}$ et $\frac{D}{K}$ respectivement.

Remarques : 1) On notera que l'équation d'une sphère renferme des termes x^2, y^2, z^2 de coefficients égaux et ne contient pas de termes en xy, xz ou yz.

2) Les coefficients de cette équation dépendent de quatre paramètres : une sphère est donc déterminée par quatre conditions.

3) Si le centre est à l'origine $a = b = c = 0$, l'équation se réduit à : $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$.

Cas particuliers :

1° *Sphère passant par l'origine O.*

(2) étant vérifiée, $x = y = z = 0 \Leftrightarrow d = 0$.

2° Si $a = b = 0$, le centre ω a pour coordonnées : 0, 0, c, donc ω appartient à l'axe $z'z$.

De même si : $a = c = 0$, ω appartient à l'axe $y'y$.

si : $b = c = 0$, ω appartient à l'axe $x'x$.

3° Si $a = 0$, ω est dans le plan yOz,
$b = 0$, ω est dans le plan xOz,
$c = 0$, ω est dans le plan xOy.

2. Sphère passant par quatre points distincts et non coplanaires.

On sait que par quatre points distincts et non coplanaires, passe une sphère et une seulement.

Déterminons son équation, les points étant :

$$M_1(x_1, y_1, z_1)\ ; \qquad M_2(x_2, y_2, z_2)\ ;$$
$$M_3(x_3, y_3, z_3)\ ; \qquad M_4(x_4, y_4, z_4).$$

En écrivant que les coordonnées des quatre points vérifient l'équation de la sphère, on obtient un système linéaire de quatre équations à quatre inconnues, celles-ci étant les coefficients *a*, *b*, *c*, *d* :

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - 2ax_1 - 2by_1 - 2cz_1 + d = 0,$$
$$x_2^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0,$$
$$x_3^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0,$$
$$x_4^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0.$$

La solution (a, b, c, d) de ce système, si elle existe, fournit les coefficients de l'équation de la sphère passant par les quatre points donnés.

3. Équation d'une sphère de diamètre donné A_0A_1.

Cette sphère est l'ensemble des points M tels que :

$$\overrightarrow{A_0M} \perp \overrightarrow{A_1M},$$

ou :

$$\overrightarrow{A_1M}.\overrightarrow{A_0M} = 0. \qquad (3)$$

Soient x_0, y_0, z_0 les coordonnées de A_0,
x_1, y_1, z_1 les coordonnées de A_1,
x, y, z les coordonnées de M.

Les composantes scalaires de $\overrightarrow{A_0M}$ sont :

$$(x - x_0)\ ; \qquad (y - y_0)\ ; \qquad (z - z_0),$$

et celles de $\overrightarrow{A_1M}$:

$$(x - x_1)\ ; \qquad (y - y_1)\ ; \qquad (z - z_1),$$

L'égalité vectorielle (3) se traduit par l'égalité scalaire :

$$\boxed{(x - x_0)(x - x_1) + (y - y_0)(y - y_1) + (z - z_0)(z - z_1) = 0,}$$

ou :

$$x^2 + y^2 + z^2 - (x_0 + x_1)x - (y_0 + y_1)y \\ - (z_0 + z_1)z + x_0x_1 + y_0y_1 + z_0z_1 = 0. \qquad (4)$$

Posons :

$$x_0 + x_1 = 2a\ ; \qquad y_0 + y_1 = 2b\ ; \qquad z_0 + z_1 = 2c.$$

et :

$$x_0x_1 + y_0y_1 + z_0z_1 = d.$$

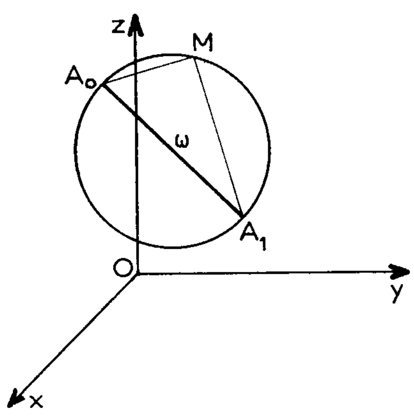


Fig. 3.

Nous retrouvons l'équation générale :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0.$$

Le centre ω a pour coordonnées :

$$\frac{x_0 + x_1}{2}, \qquad \frac{y_0 + y_1}{2}, \qquad \frac{z_0 + z_1}{2}.$$

4. Plan tangent à la sphère en un point donné.

Soient : $\omega(a, b, c)$ le centre et $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un point de la sphère donnée de rayon R.

On sait qu'il existe un plan tangent en M_0. Soit $M(x, y, z)$ un point quelconque de ce plan, distinct de M_0.

$$\overrightarrow{M_0M} \perp \overrightarrow{\omega M_0} \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M}.\overrightarrow{\omega M_0} = 0. \qquad (5)$$

Les composantes de $\overrightarrow{M_0M}$ sont : $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$.

Celles de $\overrightarrow{\omega M_0}$ sont : $x_0 - a$, $y_0 - b$, $z_0 - c$.

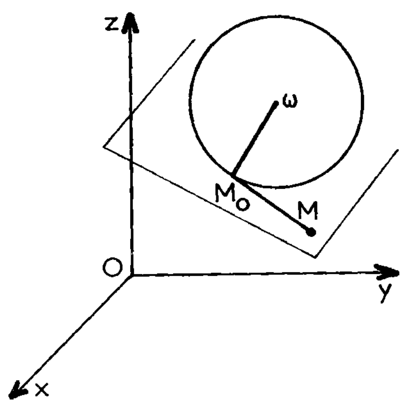


Fig. 4.

L'expression analytique du produit (5), est :

$$\boxed{(x - x_0)(x_0 - a) + (y - y_0)(y_0 - b) + (z - z_0)(z_0 - c) = 0.}$$

ou en développant et ordonnant :

$$(x_0 - a)x + (y_0 - b)y + (z_0 - c)z + ax_0 + by_0 + cz_0 - x_0^2 - y_0^2 - z_0^2 = 0. \qquad (6)$$

Puisque M_0 appartient à la sphère, on a :

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - 2ax_0 - 2by_0 - 2cz_0 + d = 0,$$

ou $$d = 2ax_0 + 2by_0 + 2cz_0 - x_0^2 - y_0^2 - z_0^2,$$

d'où :

$$d - ax_0 - by_0 - cz_0 = ax_0 + by_0 + cz_0 - x_0^2 - y_0^2 - z_0^2.$$

Posons : $$l = d - ax_0 - by_0 - cz_0,$$
et portons cette valeur dans (6), qui devient finalement :

$$\boxed{(x_0 - a)x + (y_0 - b)y + (z_0 - c)z + l = 0}. \qquad (6\ bis)$$

C'est l'équation du plan tangent à la sphère (ω) au point $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

5. Condition pour qu'un plan donné soit tangent à une sphère donnée.

Soit : $ux + vy + wz + l = 0$ l'équation d'un plan.

En désignant par r la distance du point $\omega(a, b, c)$ à ce plan, on sait que :

$$r^2 = \frac{(ua + vb + wc + l)^2}{u^2 + v^2 + w^2}.$$

Pour que le plan soit tangent à la sphère, il faut et il suffit que :

$$r^2 = R^2,$$

ou :

$$(ua + vb + wc + l)^2 - R^2(u^2 + v^2 + w^2) = 0. \qquad (7)$$

6. Équation d'une surface cylindrique de révolution d'axe Oz et de rayon R.

Pour qu'un point $M(x, y, z)$ appartienne à cette surface cylindrique, il faut et il suffit que sa projection M′ sur le plan xOy appartienne au cercle section de la surface par le plan xOy c'est-à-dire au cercle du plan xOy, de centre O et de rayon R.

Donc les coordonnées de M doivent vérifier la relation :

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0. \qquad (8)$$

C'est l'équation de la surface cylindrique de révolution d'axe Oz et de rayon R.

Fig. 6.

Exemple :

L'équation : $x^2 + y^2 - 36 = 0$ est dans l'espace celle d'une surface cylindrique de révolution d'axe Oz et de rayon : $R = 6$.

Si on coupe la surface cylindrique de révolution par deux plans perpendiculaires à Oz et de cotes respectives : z_1 et z_2, on détermine un cylindre de révolution.

Celui-ci est donc délimité par :

1° la surface : $x^2 + y^2 - R^2 = 0$;

2° les plans : $z = z_1$; $z = z_2$.

De même, l'équation d'une surface cylindrique de révolution d'axe Ox, est : $$y^2 + z^2 - R^2 = 0.$$

Celle d'une surface cylindrique d'axe Oz est :
$$x^2 + z^2 - R^2 = 0.$$

7. Équation d'une surface conique de révolution d'axe Oz.

Soit S le sommet, de cote $\overline{OS} = h$.

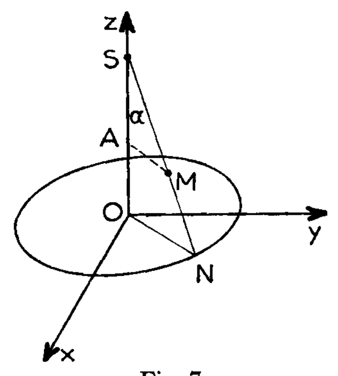


Fig. 7.

M(x, y, z) étant un point quelconque de la surface, la génératrice SM forme avec l'axe un angle α, constant.

Soit A la projection orthogonale de M sur l'axe.

Les composantes du vecteur $\overrightarrow{SA}$ sont : 0, 0, $(z - h)$.

Celles de $\overrightarrow{SM}$ sont : x, y, $(z - h)$.

$(\overrightarrow{SM})^2 = x^2 + y^2 + (z - h)^2$;

$(\overrightarrow{SA})^2 = (z - h)^2$.

$\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SM} = |\overrightarrow{SA}||\overrightarrow{SM}| \cos \alpha = (z - h)^2$, d'après l'expression analytique du produit scalaire (n° 2).

Élevons au carré les deux derniers membres de cette égalité :

$$|\overrightarrow{SA}|^2.|\overrightarrow{SM}|^2.\cos^2 \alpha = (z - h)^4,$$

ou $$(z - h)^2[x^2 + y^2 + (z - h)^2]\cos^2 \alpha = (z - h)^4.$$

Divisons les deux membres par : $(z - h)^2$; il vient enfin :

$$(x^2 + y^2) \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha)(z - h)^2 = 0,$$

ou en divisant par $\cos^2 \alpha \neq 0$:

$$\boxed{x^2 + y^2 - (z - h)^2 \mathrm{tg}^2\, \alpha = 0}. \tag{9}$$

En particulier si le sommet S est en O : $h = 0$ et l'équation s'écrit :

$$\boxed{x^2 + y^2 - z^2\, \mathrm{tg}^2\, \alpha = 0}. \tag{10}$$

Coupons la surface par un plan perpendiculaire à Oz, de cote z_1 ; nous déterminons ainsi un cône de révolution.

Celui-ci est donc délimité par :

1° la surface : $x^2 + y^2 - (h - z)^2\, \mathrm{tg}^2\, \alpha = 0$;

2° le plan : $z = z_1$.

L'équation d'une surface conique de révolution d'axe Ox, et de sommet S tel que $\overline{OS} = h$ est, de même :

$$y^2 + z^2 - (x - h)^2\, \mathrm{tg}^2\, \alpha = 0.$$

Celle d'une surface conique d'axe Oy est :

$$x^2 + z^2 - (y - h)^2\, \mathrm{tg}^2\, \alpha = 0.$$

EXERCICES

La sphère.

79. Quelle est l'équation d'une sphère de centre ω et de rayon R dans les cas suivants :

a) $\omega\,(4, 0, 0)$; R = 4.
b) $\omega\,(0, 5, 0)$; R = 5.
c) $\omega\,(0, 0, 10)$; R = 10.

80. Déterminer le centre et calculer le rayon des sphères d'équations :

a) $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4z = 0.$
b) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 5 = 0.$
c) $x^2 + y^2 + z^2 - 12x + 6y + 4z = 0.$

81. L'équation : $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - z + 7 = 0$ est-elle celle d'une sphère ?

82. Quelle est l'équation de la sphère de centre $\omega(3/2, 0, -1)$ qui passe par le point M(1/2, 3, $-5/2$) ? Calculer son rayon.

83. Équation de la sphère déterminée par les points :

A(1, 2, — 1) ; B(3, — 1, 0) ; C(2, 1, 1) ; D(0, 3, 1).

Calculer les coordonnées de son centre et son rayon.

84. Même question, avec les données suivantes :

a) A(0, 0, 0) ; B(4, 0, 0) ; C(4, 3, 0) ; D(0, 0, 3).
b) A(0, 0, 0) ; B(0, 2, 0) ; C(4, 0, 0) ; D(0, 0, — 6).

85. Quelle est l'équation de la sphère centrée sur $y'y$ et à laquelle appartiennent les points :

A(0, 2, 2) et B(4, 0, 0) ?

86. Quelle est l'équation de la sphère de rayon R = 11, et à laquelle appartiennent les points :

A(1, 1, 0) ; B(0, 1, 1) ; C(1, 0, 1) ?

87. Quelle est l'équation de la sphère qui a pour diamètre le segment joignant les points : A(4, — 6, 5) et B(2, 0, 2) ?

88. Étant donnés le point $P(x_0, y_0, z_0)$ et la sphère d'équation : $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$, on mène par P une sécante qui coupe la sphère en A et B.

Calculer le produit algébrique : $\overline{PA}.\overline{PB}$. Conclusion?

89. Soit le point A(0, 0, — R) qui appartient à la sphère d'équation : $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$. A tout point $M(x, y, z)$ de la sphère, on associe le point M'(X, Y, O) du plan xOy, tel que la droite joignant M et M' passe par A.

Exprimer X et Y en fonction de x, y, z et inversement.

90. Dans un repère orthonormé $Oxyz$, on donne les points A(2, — 1, 2) et B(5, — 5, 2).

1° Calculer la distance OA et former l'équation du plan P perpendiculaire en A à la droite OA.

2° Écrire les équations paramétriques de la perpendiculaire (D) menée du point B au plan P. Calculer la distance de B au plan P et former l'équation de la sphère, de centre B et tangente au plan P.

91. Dans un repère orthonormé $Oxyz$, on donne la sphère (S) de centre s(2, 3, 2) et de rayon 2.

1° Former l'équation du cône de sommet C(2, 3, — 2) circonscrit à la sphère (S).

2° Former les équations des intersections de ce cône par les trois plans de coordonnées.

92. 1° Dans un repère orthonormé $Oxyz$, tracer la droite (D) d'équations :

$$(D) \quad \begin{cases} x = 0 \\ z = -y + 2. \end{cases}$$

2° Former l'équation du cône de révolution de sommet S(2, 0, 0), d'axe SO et tangent à (D).

3° Quelles sont les équations des génératrices du cône situées dans le plan xOy ?

1° Soit M un point du cône situé dans le plan yOz. M est repéré par l'angle : $(\vec{Oz}, \vec{OM}) = \theta$.

Former, en fonction de θ, l'équation du plan tangent au cône le long de SM. Étudier cette équation en donnant à θ quelques valeurs remarquables.

93. Dans un repère orthonormé $Oxyz$, on considère les surfaces d'équations :

$$x^2 + (y - R)^2 + z^2 = R^2, \qquad (1)$$

et

$$x^2 + \left(y - \frac{R}{2}\right)^2 = \frac{R^2}{4}. \qquad (2)$$

1° Quelle est la nature de ces deux surfaces ?

2° Les surfaces définies par (1) et (2) ont un ensemble (Γ) de points communs. Montrer que (Γ) se trouve aussi sur la surface d'équation : $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, (3). Quelle est la nature de cette surface ?

3° (Γ) se projette sur le plan yOz suivant une courbe (Γ'). Former l'équation $f(y, z) = 0$ de la courbe (Γ'). Construire (Γ').

4° (Γ) se projette sur le plan xOz suivant une courbe (Γ''). Former l'équation $g(x, z) = 0$ de la courbe (Γ''). Mettre cette équation sous la forme : $x = h(z)$ et construire (Γ'').

CHAPITRE 6

HÉLICE CIRCULAIRE

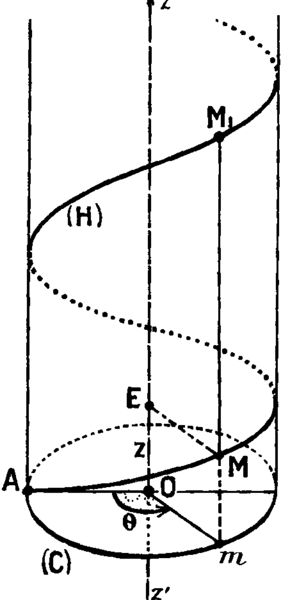
1. Définitions.

Soient (S) une surface cylindrique de révolution d'axe Oz, orienté de z' vers z et (C) un parallèle de centre O, de rayon r, supposé orienté dans le sens positif pour un observateur placé suivant Oz.

Par rapport au cercle (C) et à un de ses points A, pris comme origines, tout point M du cylindre se projettant en m sur (C), peut être défini par :

a) l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{Om}) = \theta$ mesuré en radians, appelé **rotation**;

b) le vecteur $\overrightarrow{mM}$ appelé **translation.**



On appelle hélice circulaire la courbe (H) lieu des points M tels que la translation soit proportionnelle à la rotation

$$\overline{mM} = z = h\theta.$$

La constante de proportionnalité h est appelée « pas réduit » de l'hélice.

Lorsque θ augmente de 2π, le point M se transforme en M_1 sur la génératrice mM ; la translation s'accroît de

$$\overline{MM_1} = 2\pi h.$$

La valeur absolue de cette quantité, soit

$$\mathbf{H} = |\mathbf{2\pi h}|$$

est le pas de l'hélice ; l'arc MM_1 décrit est une spire de l'hélice.

Fig. 1.

2. Sens de l'hélice.

L'hélice est dite **directe** si **h est positif.**

L'hélice est dite **rétrograde** si **h est négatif.**

Le sens de l'hélice est indépendant du sens de l'axe $z'z$, car l'orientation du cercle change avec celle de l'axe. La cote z et l'arc θ changeant de signe, h est inchangé dans la formule : $z = h\theta$.

3. Propriétés caractéristiques.

a) Développons le cylindre, support de l'hélice, sur son plan tangent (π) en A. Le cercle origine (C) se transforme en une droite

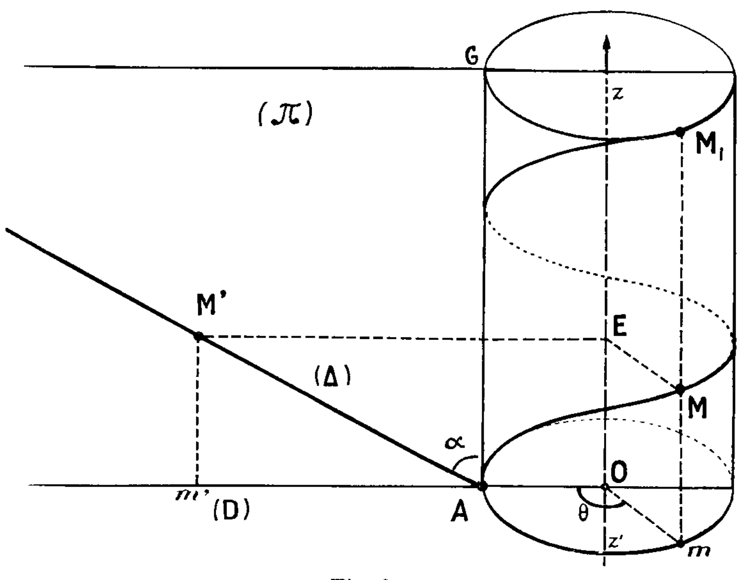


Fig. 3 a.

(D) normale à la génératrice de contact AG, m et M ont pour homologues m' et M', tels que

$$\overline{Am'} = \widehat{Am} = r\theta, \qquad \overline{m'M'} = \overline{mM} = h\theta$$

d'où

$$\frac{\overline{m'M'}}{\overline{Am'}} = \frac{h}{r} = C^{te}.$$

Il en résulte que M′, transformé de M, décrit une droite (Δ) dans le plan (π).

Si α désigne l'angle (Δ, G), on a :

$$\textit{cotg}\,\alpha = \frac{\overline{m'M'}}{\overline{Am'}} = \frac{h}{r}.$$

Réciproquement : Si on applique le plan (π) sur le cylindre, la droite (D) normale du cylindre, se transforme en un cercle (C).

Le point M′ a pour homologue M de projection m sur (C), transformé de m'. On a

$$\overline{mM} = \overline{m'M'},$$

$$\widehat{Am} = \overline{Am'}.$$

Or $$\overline{m'M'} = \overline{Am'}\,\text{cotg}\,\alpha$$

donc $$\overline{mM} = \widehat{Am}\,\text{cotg}\,\alpha$$

$$z = r\ \theta.\ \text{cotg}\,\alpha.$$

L'ordonnée du point M est proportionnelle à son abscisse curviligne, donc à la rotation, et le point M décrit sur le cylindre, une hélice de pas réduit $r\ \text{cotg}\,\alpha.$

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une courbe tracée sur un cylindre de révolution soit une hélice est que sa transformée dans le développement sur un plan soit une droite.

b) Tangentes à l'hélice.

Soient M_0 et M deux points voisins sur une hélice (H), m_0 et m leurs projections sur le cercle origine (C). Les sécantes M_0M et m_0m concourent en un point I du plan (P) de (C).

On peut écrire

$$\frac{\overline{m_0M_0}}{\overline{Im_0}} = \frac{\overline{mM}}{\overline{Im}} = \frac{\overline{mM} - \overline{m_0M_0}}{\overline{Im} - \overline{Im_0}}$$

mais, d'après la définition :

$$\overline{mM} = h\theta \Rightarrow \overline{mM} = \frac{h}{r} \times \widehat{Am}$$

Donc, on a : $\dfrac{\overline{m_0 M_0}}{\overline{I m_0}} = \dfrac{h}{r} \times \dfrac{\widehat{Am} - \widehat{Am_0}}{\overline{Im} - \overline{Im_0}} = \dfrac{h}{r} \times \dfrac{\widehat{m_0 m}}{\overline{m_0 m}}.$

Si M tend vers M_0 sur (H), m tend vers m_0 sur (C) et $m_0 m$ a pour position limite la tangente $m_0 t$ au cercle (C) dans le plan (P).

Le rapport $\dfrac{\widehat{m_0 m}}{\overline{m_0 m}}$ tend vers 1 ; le rapport $\dfrac{\overline{m_0 M_0}}{\overline{I m_0}}$ a pour valeur limite $\dfrac{h}{r}$. Le point I tend vers une position limite I_0 situé sur $m_0 t$,

telle que
$$\frac{\overline{m_0 M_0}}{\overline{I_0 m_0}} = \operatorname{tg} \beta = \frac{h}{r}.$$

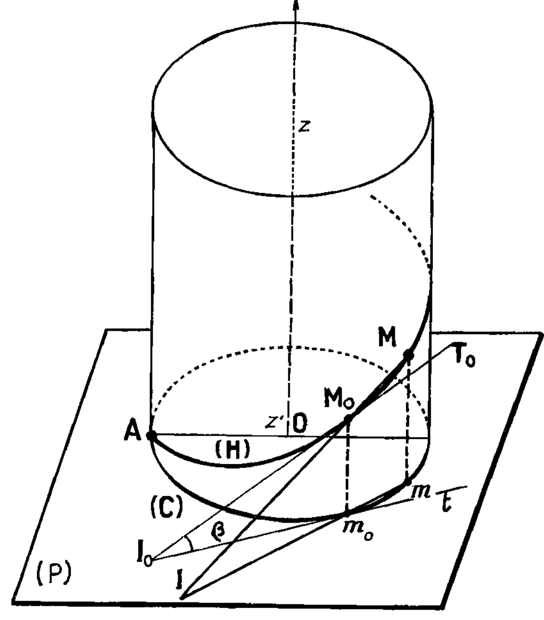


Fig. 3 b.

La droite M_0M a donc une position limite I_0M_0 qui est la tangente en M_0 à (H).

Sa pente
$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{cotg} \alpha = \frac{h}{r} = C^{te}$$
est indépendante de la position du point M_0 sur (H).

L'hélice circulaire admet une tangente en tous ses points et ces tangentes coupent les génératrices du cylindre sous un angle constant.

Remarques. 1° Cet angle α est l'angle du développement de (Δ) et de la génératrice (G).

2° La pente de la tangente est liée au pas de l'hélice par la relation

$$\mathbf{p} = \mathbf{tg}\,\beta = \frac{\mathbf{h}}{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{H}}{2\pi\mathbf{r}}.$$

c) **Corollaires.** On peut écrire :

$$\overline{I_0 m_0} = \overline{m_0 M_0}\,\text{cotg}\,\beta = h\theta.\frac{r}{h} = r\theta = \widehat{Am_0}.$$

La sous-tangente à l'hélice est égale à l'abscisse curviligne du point de contact.

4. Équations de l'hélice.

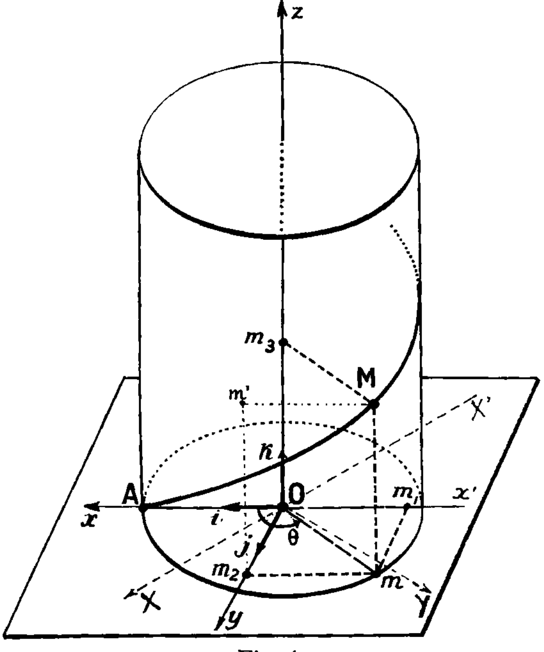


Fig. 4.

1° Les paramètres θ et z sont appelés coordonnées cylindriques de l'hélice, dont une équation est

$$z = h\theta.$$

2° Soient Ox le demi-axe passant par A et Oy complétant avec Oz le trièdre trirectangle direct Oxyz.

Désignons par $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ respectivement les vecteurs unitaires de ces axes, par m_1, m_2, m_3 les projections de m sur ces axes.

$$\overrightarrow{OM} = \vec{i}.\overline{Om_1} + \vec{j}.\overline{Om_2} + \vec{k}.\overline{Om_3}$$

d'où les coordonnées de M sont :

$$x = r \cos \theta$$
$$y = r \sin \theta$$
$$z = h\theta.$$

5. Déplacement hélicoïdal ou vissage.

On appelle déplacement hélicoïdal ou vissage le produit d'une rotation autour d'un axe Oz et d'une translation parallèle à cet axe.

On verra que le produit de deux retournements par rapport à deux axes non situés dans le même plan est un déplacement hélicoïdal (chap. 23).

6. Projection orthogonale sur un plan passant par l'axe.

a) Projection sur le plan yOz.

Soit m' la projection de M sur le plan yOz (fig. 4).

Les coordonnées de m' sont :

$$y = r \sin \theta, \ z = h\theta.$$

Entre ces coordonnées on a la relation :

$$\mathbf{y = r \sin \frac{z}{h}}.$$

La projection de l'hélice sur le plan yOz est donc une **sinusoïde** (fig. 6a).

b) **Projection sur un plan quelconque passant par Oz.**

Soient un axe X'OX du plan xOy tel que : $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OX}) = \alpha$. ($\alpha$ angle donné), et Y'OY un axe du plan xOy tel que :

$(\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY}) = + \frac{\pi}{2}$.

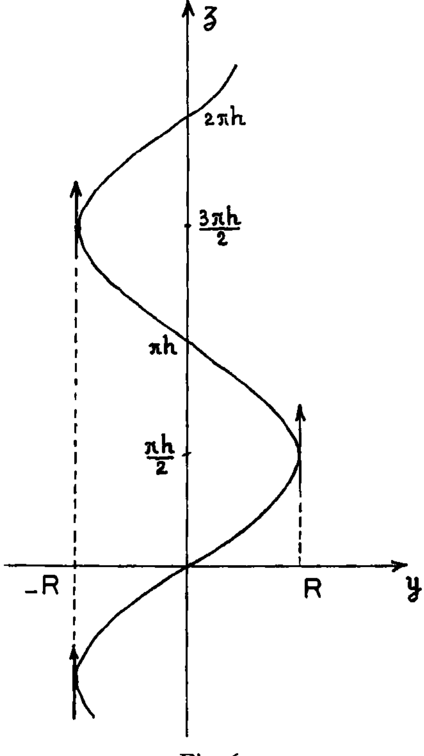


Fig. 6 a.

On a : $(\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{Om}) = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Om}) - (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OX}) = \theta - \alpha$;

$$(\overrightarrow{OY}, \overrightarrow{Om}) = (\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{Om}) - (\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY}) = \theta - \alpha - \frac{\pi}{2}.$$

Les coordonnées de M par rapport au trièdre OXYz sont donc:

$$X = \overline{Om} \cos(\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{Om}) = r \cos(\theta - \alpha)$$

$$Y = \overline{Om}\cos(\overrightarrow{OY}, \overrightarrow{Om}) = r\cos\left(\theta - \alpha - \frac{\pi}{2}\right) = r\sin(\theta - \alpha)$$
$$z = h\theta.$$

Si m'' désigne la projection de M sur le plan YOz, ces coordonnées sont donc :

$$Y = r\sin(\theta - \alpha), \quad z = h\theta.$$

La projection de l'hélice sur le plan YOz est une sinusoïde d'équation : $Y = r\sin\dfrac{z - h\alpha}{h}$.

Si on applique aux axes OY, Oz la translation de vecteur : $h\alpha.\vec{k}$, on obtient le système d'axes Y_1O_1Z (fig. 6) tel que :

$$Y = Y_1 \text{ et } Z = z - h\alpha.$$

Par rapport à ce système d'axes, l'équation de la sinusoïde est : $Y_1 = r\sin\dfrac{Z}{h}$.

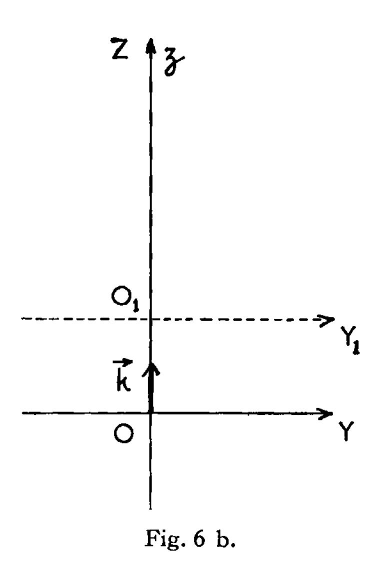


Fig. 6 b.

EXERCICES

94. Démontrer qu'une hélice circulaire admet une infinité d'axes de symétrie.

95. Démontrer que l'homothétique d'une hélice est une hélice.

96. Construire une tangente à une hélice donnée
a) passant par un point donné A ;
b) parallèle à un plan donné P.

97. Soient M et M′ deux points d'une hélice, MT et M′T′ les tangentes à la courbe en ces points. On mène par M la parallèle MT_1, à M′T′. MT et MT_1 coupent en E et E_1 le plan d'un parallèle (C). Montrer que lorsque M′ varie, M restant fixe, le point E_1 décrit un cercle. En déduire que le plan MTT_1 tend vers une position limite lorsque le point M′ se rapproche indéfiniment du point M.

98. Soit M un point quelconque d'une hélice, E se projette sur l'axe Oz. Lieu du point N tel que

$$\overrightarrow{EN} = k\,\overrightarrow{EM}$$

k étant un nombre algébrique donné.

99. Soit M un point quelconque d'une hélice et E sa projection sur l'axe Oz. Lieu des projections d'un point P sur la droite EM quand M décrit l'hélice.

100. Relation qui lie les pas de deux hélices orthogonales tracées sur un même cylindre.

101. On porte sur une tangente en un point M quelconque d'une hélice un segment MN de longueur l. Lieu du point N quand M décrit l'hélice.

102. Sur un cylindre de révolution d'axe (D) et de rayon a, on considère une hélice (H). On désigne par A un point fixe de (H), par O la projection orthogonale de A sur (D), par (P) le plan passant par A et perpendiculaire à (D), par α l'angle aigu que les tangentes à (H) font avec (P). Tous les éléments géométriques qui précèdent sont fixés une fois pour toutes. On désigne enfin par M un point variable de (H) et par m sa projection orthogonale sur (D). (On pourra poser tg $\alpha = k$).

1° Lieu du point L symétrique de A par rapport à mM.

2° On considère des points C et C′ de (H) ; montrer que la perpendiculaire commune aux droites (D) et CC′ est un axe de symétrie pour (H).

3° Chercher le lieu (K) de la projection orthogonale d'un point donné B sur mM. (On pourra commencer par le cas où B coïncide avec A, dans ce qui suit B est un point fixe quelconque).

a) Montrer que (K) est une hélice et que l'on peut, sans changer (K), remplacer B par un point appartenant à une droite (Δ).

b) Montrer que les points d'intersection de (H) et (K), quand ils existent, sont sur des droites que l'on construira.

c) Comment les points d'intersections de (H) et (K) peuvent-ils se déduire de l'un d'entre eux ?

d) Déterminer l'angle aigu des tangentes à (H) et (K) en un point d'intersection. (On calculera une ligne trigonométrique de cet angle en fonction de α, a, b = OB). (Montpellier).

CHAPITRE 7

VECTEUR VARIABLE FONCTION D'UN PARAMÈTRE

1. Fonction vectorielle.

a) **Définition.** Soient un repère fixe Ox, Oy, Oz de vecteurs unitaires $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ et un vecteur libre $\vec{V}$ de composantes scalaires X, Y, Z relativement à ces axes.

Supposons que, X, Y, Z sont des fonctions *définies* de la variable scalaire t sur l'intervalle (a, b).

t est le paramètre et on écrit:

$X = X(t), Y = Y(t), Z = Z(t).$

Fig. 1.

Nous avons donc :

$$\vec{V} = X(t).\vec{i} + Y(t).\vec{j} + Z(t).\vec{k}.$$

On dit que $\vec{V}$ est **fonction vectorielle de la variable** t sur l'intervalle (a, b).

On désigne cette fonction vectorielle par : $\vec{V}(t)$.

b) **Continuité.**

Une fonction vectorielle $\vec{V}(t)$, définie sur l'intervalle (a, b), est **continue pour** $t = t_0$ $(a < t_0 < b)$, si $\vec{V}(t)$ tend vers $\vec{V}(t_0)$ quand t tend vers t_0.

Posons : $t - t_0 = \Delta t, \qquad \vec{V}(t) - \vec{V}(t_0) = \overrightarrow{\Delta V}.$

Par définition, $\vec{V}(t)$ est continue pour $t = t_0$, si $\overrightarrow{\Delta V}$ tend vers 0 quand $\Delta t \to 0$.

Pour que $\vec{V}(t)$ soit continue pour $t = t_0$, *il faut et il suffit que les composantes* X, Y, Z *soient continues pour* $t = t_0$.

Dans toute la suite, nous supposerons, sauf indication contraire, que les composantes X, Y, Z sont des fonctions définies et continues de la variable t sur l'intervalle (a, b).

2. Dérivée vectorielle relativement à un repère donné.

Soient $Oxyz$ un repère *indépendant du paramètre* t, $\vec{V}(t)$ un vecteur fonction de t sur l'intervalle (a, b), t_0 une valeur **donnée** de t et $t_0 + \Delta t$ une valeur de t appartenant à l'intervalle (a, b).

Le vecteur $\overrightarrow{\Delta V} = \vec{V}(t_0 + \Delta t) - \vec{V}(t_0)$ est l'accroissement du vecteur $\vec{V}(t)$ correspondant à l'accroissement Δt de la variable t.

On dit que, ***relativement au repère indépendant de t, $\vec{V}(t)$ admet un vecteur dérivé pour $t = t_0$, si le vecteur :***

$$\frac{\overrightarrow{\Delta V}}{\Delta t} = \frac{\vec{V}(t_0 + \Delta t) - \vec{V}(t_0)}{\Delta t}$$

tend vers une limite définie quand Δt tend vers zéro.

Cette limite (si elle existe) est appelée vecteur dérivé ou dérivée de $\vec{V}(t)$ pour $t = t_0$. Elle se désigne par $\overrightarrow{V'}(t_0)$ ou $\overrightarrow{V'}_0$.

L'existence d'un vecteur dérivé pour $t = t_0$ entraîne la continuité de $\vec{V}(t)$ pour $t = t_0$.

En effet, par hypothèse :

$$\Delta t \to 0 \Rightarrow \frac{\overrightarrow{\Delta V}}{\Delta t} \to \overrightarrow{V'}_0.$$

Or : $$\overrightarrow{\Delta V} = \left(\frac{\overrightarrow{\Delta V}}{\Delta t}\right). \Delta t \qquad (\Delta t \neq 0)$$

Par suite : $$\Delta t \to 0 \Rightarrow \overrightarrow{\Delta V} = \left(\frac{\overrightarrow{\Delta V}}{\Delta t}\right). \Delta t \to 0.$$

Nous retrouvons pour les fonctions vectorielles un résultat obtenu pour les fonctions d'une variable réelle.

3. Coordonnées du vecteur dérivé.

Soit : $$\vec{V}(t) = X\,\vec{i} + Y\,\vec{j} + Z\,\vec{k} \qquad (1)$$

X, Y, Z étant des fonctions définies et continues de la variable t.

Donnons à t la valeur t_0. On a :

$$\vec{V}(t_0) = X(t_0).\vec{i} + Y(t_0).\vec{j} + Z(t_0).\vec{k}$$

ou $$\vec{V}_0 = X_0\vec{i} + Y_0\vec{j} + Z_0\vec{k}. \qquad (2)$$

A partir de t_0, donnons à t un accroissement Δt. Les accroissements correspondants de X_0, Y_0, Z_0, $\vec{V_0}$ sont respectivement : ΔX, ΔY, ΔZ, $\overrightarrow{\Delta V}$. On a :

$$\vec{V}_0 + \overrightarrow{\Delta V} = (X_0 + \Delta X)\vec{i} + (Y_0 + \Delta Y)\vec{j} + (Z_0 + \Delta Z)\,\vec{k}. \qquad (3)$$

D'où, par différence de (2) et (3) :

$$\overrightarrow{\Delta V} = \Delta X.\vec{i} + \Delta Y.\vec{j} + \Delta Z.\vec{k}$$

Le vecteur $\dfrac{\overrightarrow{\Delta V}}{\Delta t}$ a pour expression :

$$\frac{\overrightarrow{\Delta V}}{\Delta t} = \frac{\Delta X}{\Delta t}.\vec{i} + \frac{\Delta Y}{\Delta t}.\vec{j} + \frac{\Delta Z}{\Delta t}.\vec{k}.$$

Pour que le vecteur $\dfrac{\overrightarrow{\Delta V}}{\Delta t}$ ait une limite quand $\Delta t \to 0$, il faut et il suffit que les rapports :

$$\frac{\Delta X}{\Delta t}, \frac{\Delta Y}{\Delta t}, \frac{\Delta Z}{\Delta t}$$

aient des limites, c'est-à-dire que les fonctions X, Y, Z admettent des dérivées X'_0, Y'_0, Z'_0 pour $t = t_0$.

Dans ce cas :

$$\vec{V'}_0 = X'_0.\,\vec{i} + Y'_0.\,\vec{j} + Z'_0.\,\vec{k}$$

Si $\vec{V'}_0$ existe quel que soit t_0 de l'intervalle (a, b), le vecteur dérivé est une fonction de t que l'on note : $\vec{V'}(t)$.

$$\boxed{\vec{V'}(t) = X'\vec{i} + Y'\vec{j} + Z'\vec{k}}$$

Théorème. — ***Étant donné un vecteur $\overrightarrow{V}(t)$ de composantes X(t), Y(t), Z(t) relativement à un repère indépendant de t, les composantes du vecteur dérivé $\overrightarrow{V'}(t)$ sont, s'il existe, les dérivées par rapport à t de X(t), Y(t), Z(t).***

Exemple. Soit un vecteur $\overrightarrow{V}(t)$ de composantes $X = \sin t$, $Y = \cos t$, $Z = 2t$ relativement à un repère $Oxyz$ indépendant de t. Les composantes de $\overrightarrow{V}'(t)$ relativement à ce repère sont :

$$X' = \cos t, \qquad Y' = -\sin t, \qquad Z' = 2.$$

4. Interprétation géométrique de la dérivée d'un vecteur.

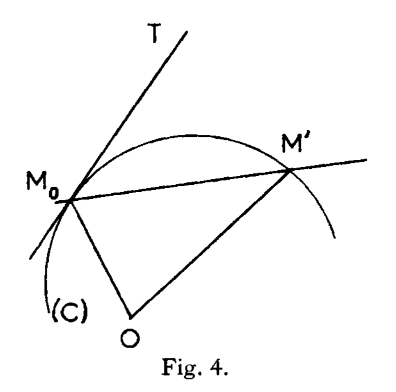


Fig. 4.

Soit une courbe (C) ensemble des points M fonction d'un paramètre t.

O désignant un point fixe arbitraire, le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est une fonction de t.

Soit M_0 la position de M pour $t = t_0$. Supposons que le vecteur $\overrightarrow{OM}$ soit une fonction vectorielle continue au voisinage de $t = t_0$ et que *la courbe* (C) *admette une tangente* M_0T *en* M_0.

Soit M' la position du point M pour $t = t_0 + \Delta t$.

Considérons le vecteur : $\dfrac{\overrightarrow{M_0M'}}{\Delta t} = \dfrac{\overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM_0}}{\Delta t}$.

Ce vecteur est porté par la droite M_0M', son origine est M_0. Quand Δt tend vers zéro, la droite M_0M' a, par définition, une position limite M_0T tangente en M_0 à (C). Donc, si le vecteur $\dfrac{\overrightarrow{M_0M'}}{\Delta t}$ a lui-même une limite, ce vecteur limite est porté par M_0T et son origine est le point M_0.

Or la limite (si elle existe) de $\dfrac{\overrightarrow{M_0M'}}{\Delta t}$ quand Δt tend vers zéro est par définition le vecteur dérivé de $\overrightarrow{OM}$ pour $t = t_0$.

Théorème. — ***Étant donnés un point fixe O et un point M défini en fonction d'un paramètre, le vecteur dérivé de $\overrightarrow{OM}$, s'il existe, est porté par la tangente à la courbe ensemble des points M et son origine est le point de contact de la courbe et de sa tangente.***

Remarque. En tout point M où le vecteur dérivé $(\overrightarrow{OM})'$ existe et **n'est pas nul**, la tangente à la courbe (C) ensemble des points M existe et admet $(\overrightarrow{OM})'$ pour vecteur directeur.

Si, en un point M, $(\overrightarrow{OM})' = \vec{0}$, ce vecteur ne définit pas la tangente en M.

5. Dérivées successives.

La fonction vectorielle $\vec{V}'(t)$ peut admettre une dérivée appelée dérivée seconde de $\vec{V}(t)$ et notée $\vec{V}''(t)$.

Ses composantes seront : $X''(t)$, $Y''(t)$, $Z''(t)$ et on a :

$$\vec{V}'' = X''\vec{i} + Y''\vec{j} + Z''\vec{k}.$$

D'une façon générale on pourra définir de proche en proche les dérivées successives de $\vec{V}(t)$. Ainsi la dérivée d'ordre n sera notée $\vec{V}^{(n)}(t)$, ses composantes sont : $X^{(n)}(t)$, $Y^{(n)}(t)$, $Z^{(n)}(t)$.

6. Vecteur primitive.

Soit une fonction vectorielle $\vec{V}$ de la variable t, de composantes $X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$:

$$\vec{V} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}.$$

S'il est possible de définir une fonction vectorielle $\overrightarrow{U_1}$ de la variable t, de composantes $F(t)$, $G(t)$, $H(t)$ telles que :

$$F'(t) = X(t)\ ;\ \ G'(t) = Y(t)\ ;\ \ H'(t) = Z(t),$$

la fonction : $\vec{U}_1 = F\vec{i} + G\vec{j} + H\vec{k}$ sera dite **fonction vectorielle primitive de $\vec{V}$.**

Or, les fonctions telles que $X(t)$ admettant une primitive $F(t)$, en admettent une infinité, qui diffèrent entre elles d'une constante.

Soient : $F(t) + C'$, $G(t) + C''$, $H(t) + C'''$ la forme générale des primitives de X, Y et Z respectivement.

L'expression des fonctions vectorielles primitives de $\vec{V}$ est donc :

$$\vec{U} = (F + C')\vec{i} + (G + C'')\vec{j} + (H + C''')\vec{k}$$
$$= [F\vec{i} + G\vec{j} + H\vec{k}] + [C'\vec{i} + C''\vec{j} + C'''\vec{k}]$$

C', C'', C''' sont les composantes scalaires d'un vecteur constant $\vec{C}$, indépendant de t.

Par suite : $$\vec{U} = \vec{U_1} + \vec{C}$$
est la forme générale des fonctions vectorielles primitives de $\vec{V}$.

On dit aussi : **vecteurs primitives** ou **primitives vectorielles** de $\vec{V}(t)$.

7. Dérivée d'une somme de fonctions vectorielles.

Soient $\vec{V_1}$, $\vec{V_2}$ ... $\vec{V_n}$ des fonctions vectorielles de la même variable t admettant des fonctions dérivées : $\vec{V'_1}$, $\vec{V'_2}$ ... $\vec{V'_n}$.

Appelons $\vec{W}$ la somme :
$$\vec{W} = \vec{V_1} + \vec{V_2} ... + \vec{V_n}$$

correspondant à une valeur donnée t de la variable. A l'accroissement Δt de la variable, correspondent les accroissements

$$\overrightarrow{\Delta W},\ \overrightarrow{\Delta V_1},\ \overrightarrow{\Delta V_2} ...\ \overrightarrow{\Delta V_n},$$

et l'on a :

$$\vec{W} + \overrightarrow{\Delta W} = (\vec{V_1} + \overrightarrow{\Delta V_1}) + (\vec{V_2} + \overrightarrow{\Delta V_2}) ... + (\vec{V_n} + \overrightarrow{\Delta V_n}).$$

$$\overrightarrow{\Delta W} = \overrightarrow{\Delta V_1} + \overrightarrow{\Delta V_2} ... + \overrightarrow{\Delta V_n}.$$

$$\frac{\overrightarrow{\Delta W}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{\Delta V_1}}{\Delta t} + \frac{\overrightarrow{\Delta V_2}}{\Delta t} ... + \frac{\overrightarrow{\Delta V_n}}{\Delta t}.$$

Par hypothèse : $\Delta t \to 0 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\overrightarrow{\Delta V_1}}{\Delta t} \to \overrightarrow{V'}_1 \\ \dfrac{\overrightarrow{\Delta V_2}}{\Delta t} \to \overrightarrow{V'}_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\overrightarrow{\Delta V_n}}{\Delta t} \to \overrightarrow{V'}_n \end{cases}$

Quand Δt tend vers zéro, $\dfrac{\overrightarrow{\Delta W}}{\Delta t}$ tend vers une limite $\overrightarrow{W'}$:

$$\boxed{\overrightarrow{W'} = \overrightarrow{V'}_1 + \overrightarrow{V'}_2 \dots + \overrightarrow{V'}_n}$$

Théorème. La fonction dérivée vectorielle d'une somme de fonctions vectorielles est la somme de leurs dérivées.

8. Dérivée du produit d'une fonction vectorielle par un scalaire.

Soit $\overrightarrow{W} = u.\overrightarrow{V}$, où u est une fonction de la variable t, admettant une dérivée u', $\overrightarrow{V}$ une fonction vectorielle de la même variable t admettant une dérivée $\overrightarrow{V'}$.

En utilisant les mêmes notations que ci-dessus, l'on a successivement :

$$\overrightarrow{W} + \overrightarrow{\Delta W} = (u + \Delta u)(\overrightarrow{V} + \overrightarrow{\Delta V})$$
$$= u\overrightarrow{V} + u\overrightarrow{\Delta V} + \Delta u.\overrightarrow{V} + \Delta u.\overrightarrow{\Delta V}$$

$$\overrightarrow{\Delta W} = u\overrightarrow{\Delta V} + \Delta u.\overrightarrow{V} + \Delta u.\overrightarrow{\Delta V}$$

$$\frac{\overrightarrow{\Delta W}}{\Delta t} = u.\frac{\overrightarrow{\Delta V}}{\Delta t} + \frac{\Delta u}{\Delta t}.\overrightarrow{V} + \Delta u.\frac{\overrightarrow{\Delta V}}{\Delta t}$$

Quand Δt tend vers zéro, $\dfrac{\overrightarrow{\Delta V}}{\Delta t}$ et $\dfrac{\Delta u}{\Delta t}$ admettent comme limites, respectivement les dérivées : $\overrightarrow{V'}_t$ et u'_t .

La fonction u admettant une dérivée dans l'intervalle considéré, cette fonction est continue dans cet intervalle, donc :

$$\Delta t \to 0 \Rightarrow \Delta u \to 0.$$

et $$\Delta u . \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} \to 0$$

Par conséquent, le rapport $\frac{\Delta \vec{W}}{\Delta t}$ tend vers une limite :

$$\boxed{\vec{W}' = u\vec{V}' + u'\vec{V}.}$$

9. Dérivée d'une fonction vectorielle composée.

Soit la fonction vectorielle $\vec{V}(u)$ où u est une fonction de la variable t. Supposons de plus que :

$\vec{V}(u)$ admet une dérivée par rapport à u : $\vec{V}'_u$
u admet une dérivée par rapport à t : u'_t.
A un accroissement Δt de la variable t correspond pour u un accroissement Δu et pour $\vec{V}(u)$ un accroissement $\Delta \vec{V}(u)$.

or : $$\Delta \vec{V} = \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta u} . \Delta u \qquad (\Delta u \neq 0)$$

d'où $$\frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta u} . \frac{\Delta u}{\Delta t}.$$

Quand Δt tend vers zéro, les rapports $\frac{\Delta \vec{V}}{\Delta u}$ et $\frac{\Delta u}{\Delta t}$ tendent par hypothèse, respectivement vers $\vec{V}'_u$ et u'_t.

Par suite $\frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t}$ tend vers une limite :

$$\boxed{\vec{V}'_t = \vec{V}'_u . u'_t.}$$

Nous remarquerons l'analogie qui existe entre les dérivées de fonctions vectorielles et les dérivées de fonctions de variables réelles. Ainsi nous aurions de même :

$$\vec{V}''_t = \vec{V}''_u u'^2_t + \vec{V}'_u . u''_t .$$

10. Dérivée d'un produit scalaire.

Soit $z(t)$ le produit scalaire des deux fonctions vectorielles $\vec{U}$ et $\vec{V}$ de la variable t, admettant respectivement les dérivées $\vec{U'}$ et $\vec{V'}$ par rapport à la variable t :

$$z = \vec{U}.\vec{V}.$$

Désignons par $\vec{\Delta U}$, $\vec{\Delta V}$ et Δz les accroissements de $\vec{U}$, $\vec{V}$ et z correspondant à un accroissement Δt de la variable. Donc :

$$z + \Delta z = (\vec{U} + \vec{\Delta U})(\vec{V} + \vec{\Delta V})$$

$$\Delta z = \vec{U}.\vec{\Delta V} + \vec{V}.\vec{\Delta U} + \vec{\Delta U}.\vec{\Delta V}.$$

En divisant par Δt :

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \vec{U}.\frac{\vec{\Delta V}}{\Delta t} + \vec{V}.\frac{\vec{\Delta U}}{\Delta t} + \frac{\vec{\Delta U}}{\Delta t}.\vec{\Delta V}.$$

Si Δt tend vers zéro, par hypothèse : $\frac{\vec{\Delta V}}{\Delta t}$ et $\frac{\vec{\Delta U}}{\Delta t}$ tendent respectivement vers : $\vec{V'}$ et $\vec{U'}$ et comme $\vec{V}(t)$ est une fonction continue de la variable t, $\vec{\Delta V}$ tend vers zéro avec Δt. Par suite, le second membre tend vers : $\vec{U}.\vec{V'} + \vec{V}.\vec{U'}$.

La fonction z(t) admet donc une dérivée :

$$\boxed{z' = \vec{U}.\vec{V'} + \vec{V}.\vec{U'}}$$

Application : Dérivée du carré scalaire.

Soit : $z(t) = [\vec{V}(t)]^2 = \vec{V}.\vec{V}.$

On a : $z' = \vec{V}.\vec{V'} + \vec{V'}.\vec{V}.$

d'où : $\boxed{z' = (\vec{V}^2)' = 2\vec{V}.\vec{V'}}$

Cas particulier important :

Supposons que $\vec{V}(t)$ garde un **module constant** quand t

varie sur l'intervalle (a, b), la direction de $\vec{V}$ étant variable avec t. C'est le cas, par exemple, d'un vecteur lié, d'origine O dont l'extrémité décrit une courbe tracée sur une sphère de rayon $|\vec{V}| = C^{te}$.

On a : $(\vec{V})^2 = |\vec{V}|^2 = C^{te}$

d'où : $(\vec{V}^2)' = 2\vec{V}.\vec{V'} = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{V}\,\vec{V'} = 0 \\ \vec{V'} \neq \vec{0},\ \vec{V} \neq \vec{0} \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{V'} \text{ orthogonal à } \vec{V}.$$

Théorème. Le vecteur dérivé d'un vecteur de module constant est un vecteur orthogonal.

Exemple :

Relativement à un repère orthonormé Ox, Oy, de vecteurs unitaires $\vec{i}$ et $\vec{j}$ fixes, on donne un vecteur unitaire $\vec{u}$ d'angle polaire $\theta = \varphi(t)$.

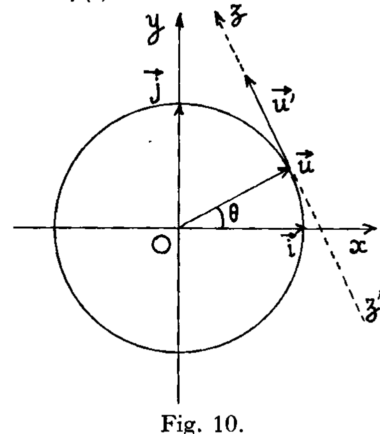


Fig. 10.

Donc $\vec{u} = \cos\theta.\vec{i} + \sin\theta.\vec{j}$.

En dérivant par rapport à t, il vient :

$\vec{u'} = -\sin\theta.\theta'_t.\vec{i} + \cos\theta.\theta'_t.\vec{j}$

$= (-\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}).\theta'_t$

d'où $\vec{u'} = [\cos(\pi/2 + \theta)\vec{i} + \sin(\pi/2 + \theta)\vec{j}].\theta'_t$.

Le vecteur :

$\cos(\pi/2 + \theta)\vec{i} + \sin(\pi/2 + \theta)\vec{j}$, de module 1, d'angle polaire $(\theta + \pi/2)$ est directement perpendiculaire au vecteur $\vec{u}$. Il définit un axe $z'z$ d'angle polaire $\theta + \pi/2$.

Le vecteur $\vec{u'}$ est porté par cet axe, sa mesure algébrique sur cet axe est θ_t'.

11. Expression analytique de la dérivée d'un produit scalaire.

Soient : $\vec{U} = X_1\vec{i} + Y_1\vec{j} + Z_1\vec{k}$

$$\vec{V} = X_2\vec{i} + Y_2\vec{j} + Z_2\vec{k}.$$

$$z = \vec{U}.\vec{V} = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2.$$

Par suite : $z' = (\vec{U}.\vec{V})' = X_1X'_2 + Y_1Y'_2 + Z_1Z'_2 + X_2X'_1 + Y_2Y'_1 + Z_2Z'_1.$

EXERCICES

Les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ sont fixes

103. Donner les dérivées premières et secondes des fonctions vectorielles :

$$\vec{V}(t) = t.\vec{i} + t^2\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\vec{V}(t) = e^t.\vec{i} + \sin t.\vec{j} + \cos 2t.\vec{k}.$$

104. Trouver les vecteurs primitifs de :

$$\vec{V}(t) = \vec{0}$$

$$\vec{V}(t) = \vec{i} + \vec{j} + 3t.\vec{k}$$

$$\vec{V}(t) = \frac{1}{t}\vec{i} + e^t.\vec{k}$$

105. Les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont les vecteurs unitaires d'un repère orthonormé Ox, Oy indépendant de t.

Soit : $\vec{V}(t) = (\cos t - \sin t)\vec{i} + (\cos t + \sin t)\vec{j}.$

Chercher $\vec{V}''(t)$ et comparer les directions des vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{V}''$.

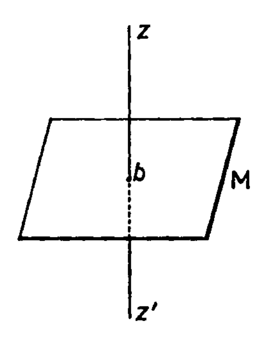
DEUXIÈME PARTIE

Géométrie descriptive

CHAPITRE 8

REPRÉSENTATION DU POINT

I. PLANS DE PROJECTION



1. Remarque préliminaire.

Un point A de l'espace a, sur un plan donné, une projection *a* ; mais un point de l'espace n'est pas complètement déterminé par sa seule projection sur ce plan. En effet, si *b* est la projection donnée, le point projeté peut être un point quelconque de la perpendiculaire en *b* au plan.

Fig. 1.

2. Détermination du point.

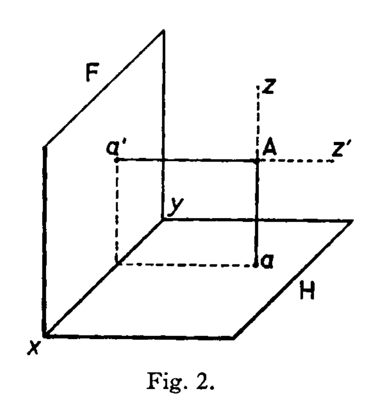


Fig. 2.

Pour fixer la position du point nous emploierons la **méthode des projections** ou **Géométrie descriptive.**

Dans cette méthode, on donne les deux projections *a* et *a'* du point A, sur deux plans rectangulaires H et F. Le point est déterminé, car il se trouve à l'intersection des perpendiculaires *az*, *a'z'*.

La projection horizontale d'un point A est désignée par *a*, la projection frontale par *a'*.

3. Plans de projection.

Les deux plans de projection sont perpendiculaires : l'un est nommé **plan horizontal**, l'autre **plan frontal.**

Ligne de terre. — On appelle **ligne de terre** l'intersection des deux plans de projection.

La ligne de terre est désignée par *xy*.

Relativement à l'observateur, supposé placé à droite, vers le haut de la figure, AH est la partie antérieure du plan horizontal, PH la partie postérieure du même plan, SF la partie supérieure du plan frontal, et IF la partie inférieure.

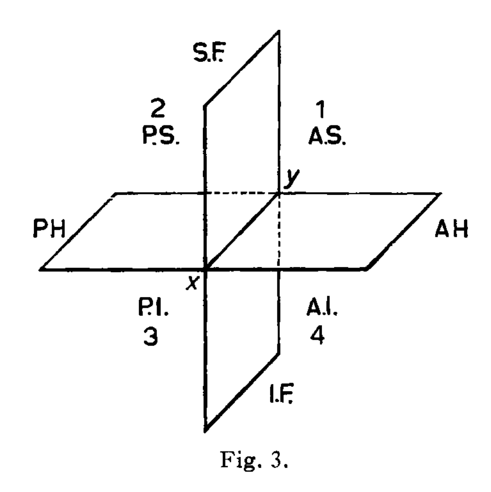


Fig. 3.

Remarques. — 1° Pour désigner le **plan horizontal**, et le **plan frontal**, on dit : **plan H**, **plan F.**

2° Les quatre portions de plans, ou demi-plans, peuvent être appelées : **frontal supérieur**, **frontal inférieur**, **horizontal antérieur et horizontal postérieur.**

3° Les deux plans forment quatre angles dièdres droits, désignés par les noms d'**antérieur-supérieur**, **postérieur-supérieur**, **postérieur-inférieur** et **antérieur-inférieur**, ou plus simplement par les numéros 1, 2, 3, 4.

4° L'observateur est supposé placé dans le premier dièdre, ayant *x* à sa gauche et *y* à sa droite.

5° Le plan qui divise un dièdre en deux parties égales est appelé plan bissecteur ; ce plan passe par l'arête du dièdre.

Il existe deux plans bissecteurs ; l'un d'eux, relatif aux dièdres 1 et 3, est le **premier bissecteur** ; le **second bissecteur** divise les dièdres 2 et 4.

4. Rabattement du plan frontal.

Pour ramener l'étude des figures à trois dimensions à des problèmes de géométrie plane, on fait tourner le plan frontal autour de la ligne de terre (fig. 4), de manière que sa partie supérieure SF vienne se placer sur la partie postérieure PH du plan horizontal ;

alors la partie inférieure IF du plan frontal s'applique sous la partie antérieure AH du plan horizontal.

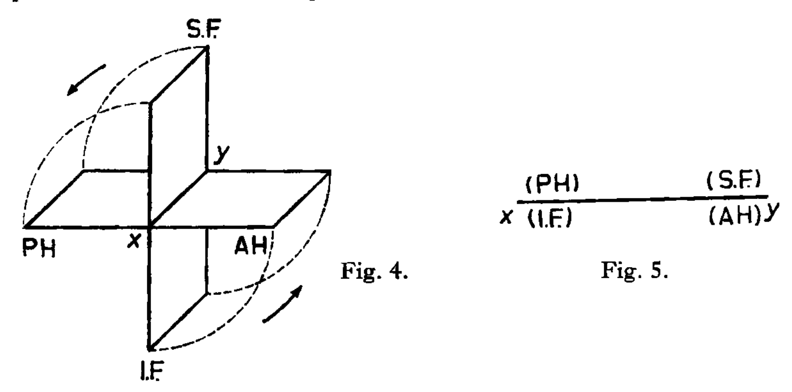


Fig. 4. Fig. 5.

Disposition du dessin. — Pour la résolution des problèmes, le rabattement est supposé effectué ; par suite, on se borne à tracer la ligne de terre sur la surface plane où l'on veut dessiner (fig. 5).

5. Épure.

On nomme **épure** la représentation d'une figure de l'espace par ses projections, le plan frontal étant rabattu sur le plan horizontal.

6. Théorème.

Après le rabattement du plan frontal, les projections d'un même point sont sur une même perpendiculaire à la ligne de terre.

En effet, la projetante A*a* est perpendiculaire au plan horizontal, A*a'* l'est au plan frontal ; donc le plan A*a'ma* de ces droites est perpendiculaire à chaque plan de projection ; par suite, ce plan A*a'ma*, est perpendiculaire à leur intersection *xy* ; donc *xy* est perpendiculaire aux droites *ma*, *ma'*, menées par

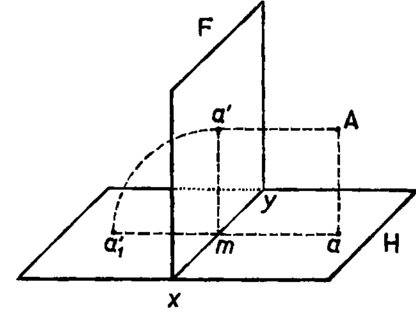


Fig. 6.

son pied dans le plan *m*A. Dans le rabattement du plan frontal autour de la ligne de terre, *ma'* restant perpendiculaire à *xy* vient se placer en ma'_1, dans le prolongement de *am*.

7. Réciproque.

Deux points situés sur une même perpendiculaire à la ligne de terre, après le rabattement du plan frontal, sont les projections d'un point déterminé de l'espace.

Soient les projections *b* et *b'* situées sur une même perpendiculaire à *xy* (fig. 7).

Relevons le plan frontal ; *mb'* reste constamment perpendiculaire à la ligne de terre, et devient mb'_1.

Le plan déterminé par les perpendiculaires ***mb***, mb'_1 est lui-même perpendiculaire à *xy*, et par suite à chaque plan de projection, donc il contient les projetantes *bc*, b'_1d ; or ces lignes *bc*, b'_1d, situées dans un même plan, se coupent en un point B ; ainsi *b* et *b'* sont les projections d'un même point B de l'espace.

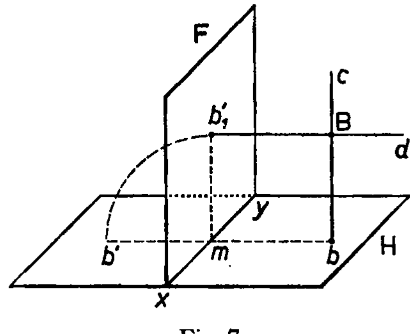


Fig. 7.

8. Ligne de rappel.

On nomme **ligne de rappel** toute droite perpendiculaire à la ligne de terre et qui joint l'une à l'autre les deux projections d'un même point.

D'après cette définition, les théorèmes précédents conduisent à la conclusion suivante :

Les deux projections d'un point sont sur une même ligne de rappel.

Donc deux points non situés sur une même ligne de rappel ne peuvent être les projections d'un même point de l'espace.

II. COTE ET ÉLOIGNEMENT

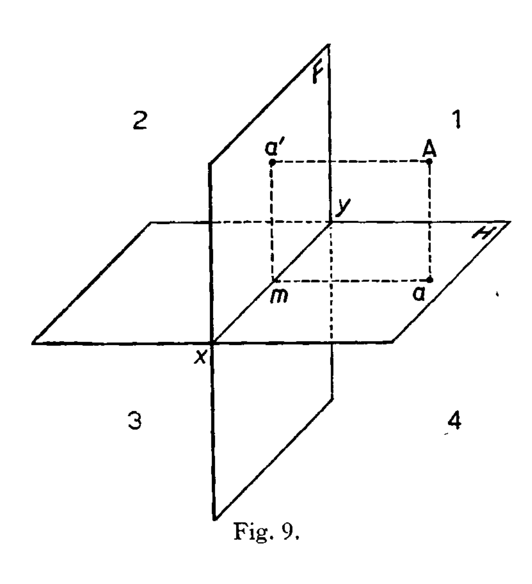


Fig. 9.

9. Définitions.

La **cote** c d'un point A est un nombre relatif dont la valeur absolue est la distance aA (ou ma') affectée du signe + si le point A se trouve dans les dièdres 1 ou 2, et du signe — si le point A se trouve dans les dièdres 3 ou 4.

Si A $\in$ (H), sa cote est nulle.

L'éloignement e d'un point A est un nombre relatif dont la valeur absolue est la distance a'A (ou ma) affectée du signe + si le point A se trouve dans les dièdres 1 ou 4, et du signe — si le point A se trouve dans les dièdres 2 ou 3.

Si A $\in$ (F), son éloignement est nul.

Sur l'épure : les cotes sont donc positives au-dessus de xy et négatives au-dessous ;

les éloignements sont positifs au-dessous de xy et négatifs au-dessus.

III. POSITIONS DU POINT

10. 1° Le point appartient au premier dièdre.

Le point A du premier dièdre (fig. 10 a) a ses projections de part et d'autre de la ligne de terre, et sa projection frontale au-dessus de xy (fig. 10 b). Pour désigner le point A, on écrit : point (a, a').

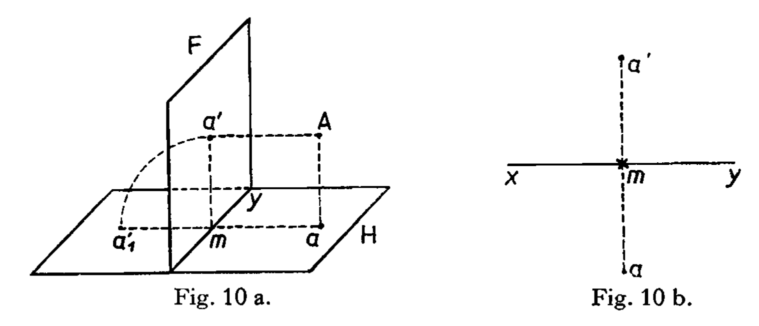


Fig. 10 a. Fig. 10 b.

2° Points des autres dièdres.

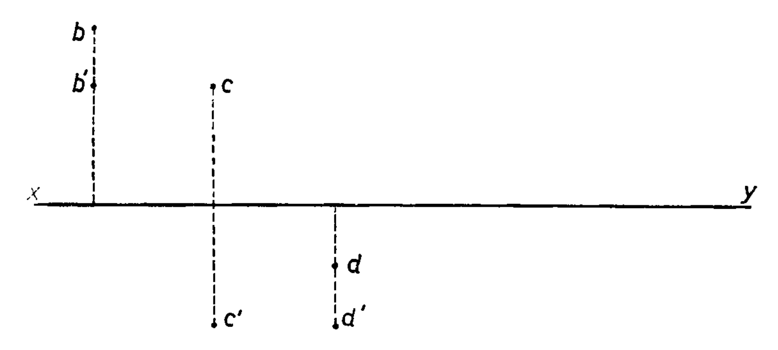


Fig. 10 c.

Sur la figure 10 c :

le point (b, b') appartient au dièdre 2, car : $c > 0$, $e < 0$;
le point (c, c') appartient au dièdre 3, car : $c < 0$, $e < 0$;
le point (d, d') appartient au dièdre 4, car : $c < 0$, $e > 0$.

3° Points particuliers.

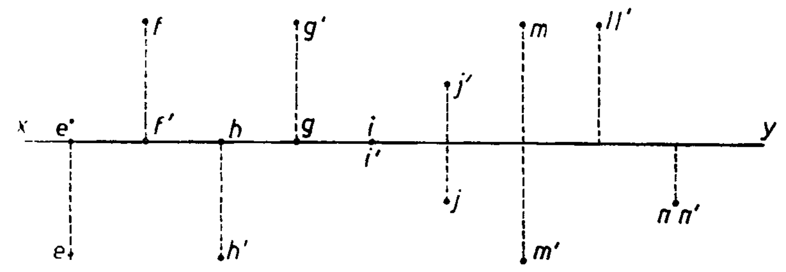


Fig. 10 d.

Sur l'épure 10 d :

les points (e, e') et (f, f') sont sur le plan horizontal car : $c = 0$;
les points (h, h') et (g, g') sont sur le plan frontal car : $e = 0$;
le point (i, i') est sur la ligne de terre car : $e = c = 0$;
les points (j, j') et (m, m') sont sur le premier plan bissecteur, car, pour chacun d'eux : $c = e$.
les points (l, l') et (n, n') sont sur le second bissecteur, car, pour chacun d'eux : $c = -e$.

IV. RABATTEMENT D'UN PLAN VERTICAL SUR UN PLAN HORIZONTAL

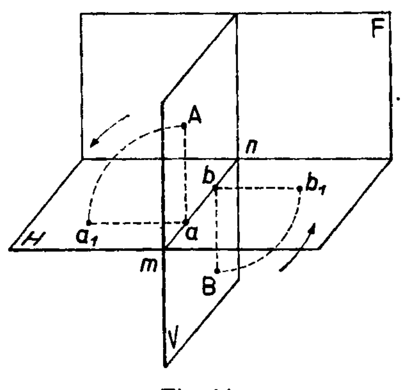


Fig. 11.

11. Rabattre le plan vertical V sur un plan horizontal H, c'est l'amener à coïncider avec le plan H, en le faisant tourner autour de la ligne d'intersection *mn* des deux plans (fig. 11).

L'intersection *mn*, **trace** du plan V sur le plan H, est la **charnière** ou l'**axe de rabattement.**

Un point A du plan vertical se rabat en a_1 sur une perpendiculaire à *mn*, menée par *a*, projection horizontale du point, et l'on a : $aa_1 = Aa$, car dans le rabattement, A*a* reste constamment perpendiculaire à *mn* et vient se placer en aa_1 dans le plan H.

Un point B du plan vertical situé au-dessous du plan H se rabat de même en b_1, sur la perpendiculaire bb_1 à *mn*, de manière que $bb_1 = Bb$, et du côté opposé à celui de a_1 par rapport à *mn*.

Remarque. — Tout point d'un plan vertical se projette sur la trace horizontale de ce plan, c'est-à-dire sur l'intersection de ce plan avec le plan horizontal. En effet, le plan V étant perpendiculaire au plan H, la projetante A*a* est tout entière dans le plan V, et son pied *a* tombe sur l'intersection *mn* des deux plans.

12. Problème.

Rabattre un point d'un plan vertical, connaissant la trace horizontale du plan et les projections du point.

Soient *mn* la trace horizontale du plan vertical et (a, a') les projections d'un point de ce plan.

Du point a (fig. 12), on mène une perpendiculaire à *mn*, sur laquelle on porte une distance aa_1 égale à la cote ba' du point considéré : a_1 est le rabattement du point (a, a').

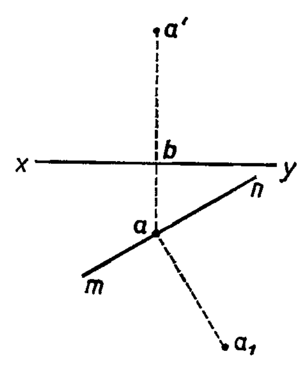


Fig. 12.

CHAPITRE 9

LA DROITE

I. ÉPURE DE LA DROITE

1. Rappels.

On démontre que la projection d'une droite sur un plan est une droite, sauf si la droite est perpendiculaire au plan de projection, alors sa projection est un point.

2. Soit une droite (D) qui n'est perpendiculaire ni au plan H, ni au plan F, sa projection horizontale sera une droite (d) et sa projection frontale une droite (d') (fig. 1).

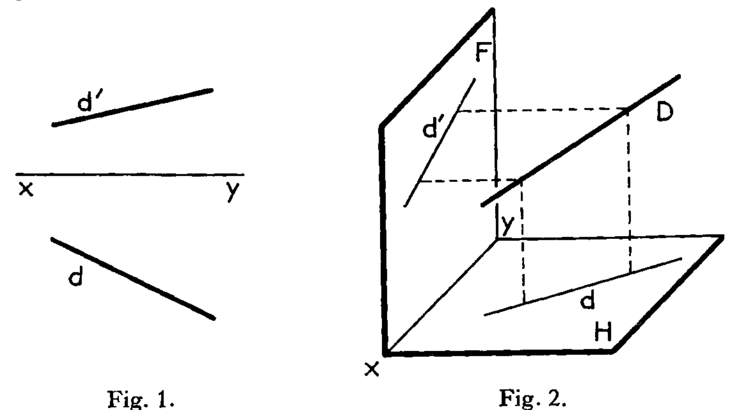


Fig. 1. Fig. 2.

Réciproquement, soient (d) une droite du plan H et (d') une droite du plan (F) ***non perpendiculaires à la ligne de terre.***

Supposons le plan frontal relevé (fig. 2). Menons par (d) un plan perpendiculaire au plan (H) et par (d') un plan perpendiculaire au plan (F). Ces plans se coupent suivant une droite D qui est la seule ligne dont les projections horizontales et frontales soient (d) et (d').

Théorème. — **Deux droites (d) et (d′) non perpendiculaires à la ligne de terre déterminent une droite de l'espace.**

3. Cas particulier.

Les droites (*d*) et (*d*′) sont sur une même perpendiculaire à la ligne de terre.

Dans ce cas, la droite appartient à un plan de profil, et toutes les droites du plan ont des projections confondues. Mais l'une d'elles est déterminée si l'on connaît les projections (a, a') et (b, b') de deux de ses points (fig. 3).

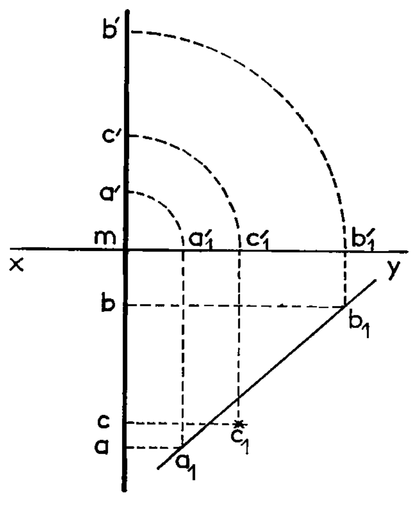


Fig. 3.

En effet, rabattons le plan de profil sur le plan horizontal en le faisant tourner autour de sa trace horizontale ab. Il suffit de porter, sur les perpendiculaires à ab aux points a et b, les distances

$$aa_1 = ma' \text{ et } bb_1 = mb'$$

La droite rabattue a_1b_1 est déterminée.

Construction. — Après avoir tracé les perpendiculaires aa_1 et bb_1, à ab, pour porter les cotes correspondantes, on décrit des quarts de cercle $a'a'_1$, $b'b'_1$ de centre m et de rayons ma', mb' ; puis, par a'_1 et b'_1, on mène les parallèles a'_1a_1 et b'_1b_1 à ab.

Droite de profil. — Toute droite contenue dans un plan de profil se nomme **droite de profil.**

Théorème. — **Une droite de profil est déterminée par les projections frontales et horizontales de deux de ses points.**

Pour désigner la droite (D) du n° 2, on écrira : droite (D) ou droite (d, d') ; celle du n° 3 sera désignée par la notation : droite AB ou droite (ab, $a'b'$).

4. Droites inexistantes.

Dans une épure, deux droites quelconques ne représentent pas toujours les projections d'une droite de l'espace.

L'épure suivante (fig. 4) en donne des exemples.

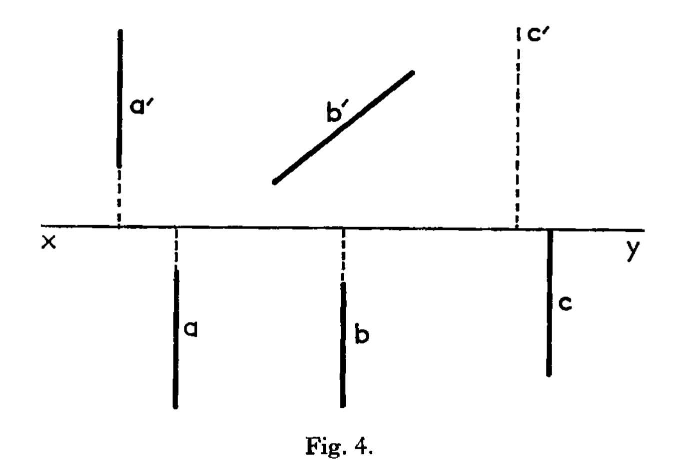


Fig. 4.

On vérifiera aisément que le raisonnement qui établit la réciproque (n° 2) est en défaut.

5. Point situé sur une droite.

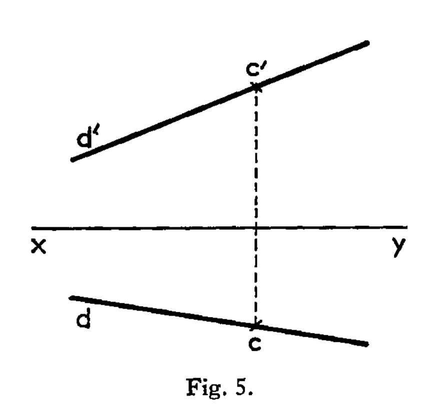


Fig. 5.

Soient c et c' les projections d'un point situées respectivement sur les projections (d) et (d') d'une droite (d ou d' non perpendiculaires à xy). Le point (C) appartient à D. En effet, relevons le plan frontal (fig. 2). La projetante c'C se trouve dans le plan qui projette (D) en (d'); la projetante cC se trouve dans le plan qui projette (D) en (d). Ces deux projetantes se coupent donc sur AB en C.

Théorème. — **Un point appartient à une droite (non de profil) si ses projections frontale et horizontale se trouvent respectivement sur les projections frontale et horizontale de la droite.**

Rappelons que c et c' sont sur une même ligne de rappel.

Remarque. — Le théorème est en défaut lorsque la droite est de profil.

Ainsi le point (c, c') (fig. 3) n'appartient pas à la droite (*ab*, $a'b'$), comme on peut le voir dans le rabattement.

6. Problème.

Trouver sur une droite les projections d'un point de cote donnée.

La cote d'un point est la distance de la projection frontale de ce point à xy. Donc, en un point quelconque e' de xy (fig. 6), on élève une perpendiculaire sur laquelle on porte la cote donnée d. La parallèle $f'c'$ à xy rencontre $a'b'$ au point c', projection frontale du point cherché ; une ligne de rappel détermine sa projection horizontale c sur ab.

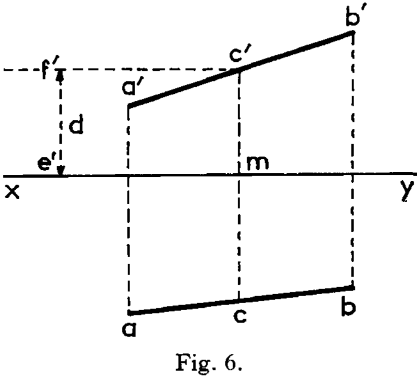


Fig. 6.

II. TRACES D'UNE DROITE

7. Définition.

On appelle **trace horizontale** d'une droite (non parallèle au plan horizontal) le point d'intersection H de la droite et du plan horizontal.

Sa projection horizontale h est confondue avec H, sa projection frontale h' est sur xy.

On appelle **trace frontale** d'une droite (non parallèle au plan frontal) le point d'intersection F de la droite et du plan frontal.

f' est confondu avec F, f est sur xy.

L'épure est la figure 7 b.

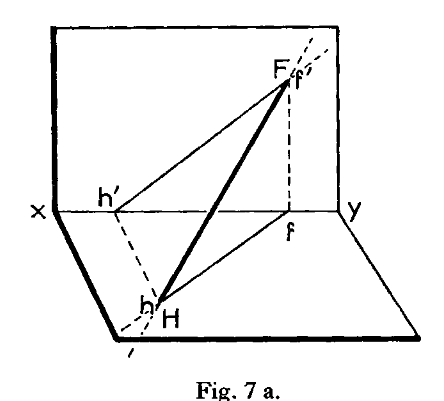


Fig. 7 a.

Fig. 7 b.

8. Détermination des traces d'une droite.

1° La droite (d, d') est quelconque.

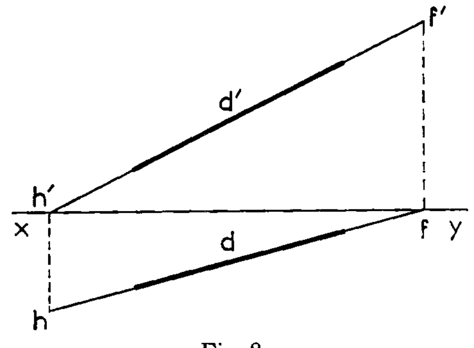


Fig. 8 a.

La *trace horizontale* est un point de *cote nulle*. Pour le déterminer il suffit donc de prolonger d' jusqu'à son intersection avec xy (si elle existe). La trace horizontale est le point (h, h') (fig. 8 a).

La *trace frontale* est un point d'*éloignement nul*. Pour le déterminer il suffit de prolonger d jusqu'à son intersection avec xy (si elle existe). La trace frontale est le point (f, f') (fig. 8 a).

2° La droite est de profil.

Soit à trouver les traces de la droite de profil (*ab*, *a'b'*) (fig. 8 b).

Rabattons le plan de profil sur le plan horizontal, et soit a_1b_1 le rabattement de la droite.

a_1b_1 rencontre la trace du plan de profil en h_1, et xy en f_1.

Le point h_1, de cote nulle, est la trace horizontale de la droite ; ses projections sont h, h'.

Le point f_1, d'éloignement nul, est le rabattement de la trace frontale de la droite; il a pour projections f, f'.

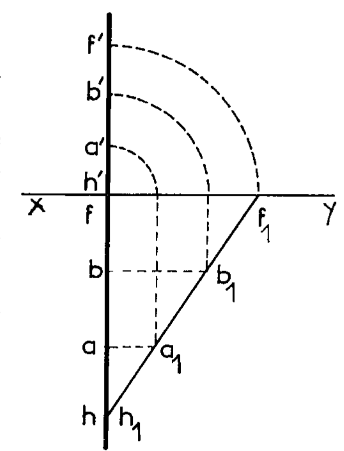


Fig. 8 b.

9. Exercice.

Traces d'une droite sur chaque plan bissecteur.

Soient *ab*, *a'b'* les deux projections d'une droite AB non de profil. Le point de rencontre de cette droite avec le premier bissecteur doit avoir ses projections symétriques par rapport à xy. Il suffit de construire le symétrique de l'une des projections par rapport à la ligne de terre ; son intersection avec l'autre projection donne (*i*, *i'*), trace sur le premier bissecteur (fig. 9).

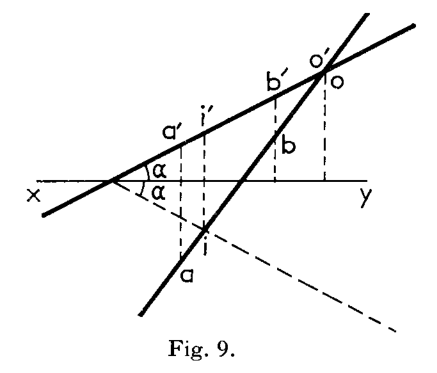


Fig. 9.

Discussion. Si *ab* et *a'b'* sont symétriques par rapport à xy le problème est indéterminé : la droite est donc dans le premier bissecteur.

Si *ab* et *a'b'* font le même angle avec xy, le problème est impossible : la droite est parallèle au premier bissecteur.

Le point de rencontre de la droite avec le second bissecteur doit avoir ses projections confondues ; c'est donc le point (*o*, *o'*), commun aux deux projections, qui donne la trace sur le deuxième bissecteur.

Discussion. Si *ab* et *a'b'* sont parallèles, la droite est parallèle au second bissecteur.

Si *ab* et *a'b'* sont confondues, le problème est indéterminé, la droite est dans le second bissecteur.

III. POSITIONS DIVERSES D'UNE DROITE

10. 1° La droite rencontre les deux plans de projections ; elle a deux traces (n° 8).

2° **Droite horizontale.** On appelle **horizontale** toute droite parallèle au plan horizontal. Tous ses points ont même cote et sa projection frontale est parallèle à xy. Exemple : (h, h') (fig. 10 a). Elle n'a pas de trace horizontale.

3° **Droite frontale.** On appelle **frontale** toute droite parallèle au plan frontal. Tous ses points ont même éloignement et sa projection horizontale est parallèle à xy. Exemple : (f, f') (fig. 10 a). Elle n'a pas de trace frontale.

4° **Droite parallèle à la ligne de terre.** Elle est parallèle aux deux plans de projections. Tous ses points ont même cote et même éloignement. Ses deux projections sont parallèles à xy. Exemple : (d, d') (fig. 10 a).

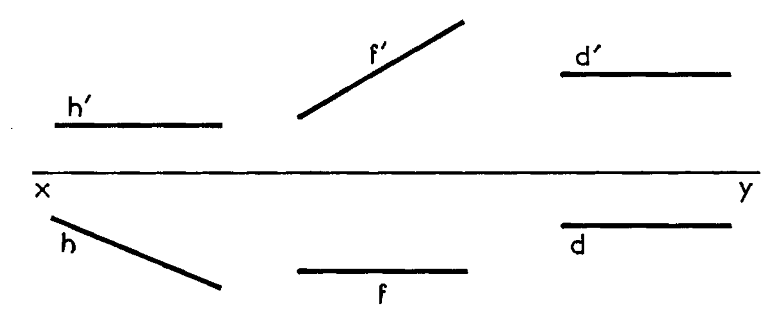


Fig. 10 a.

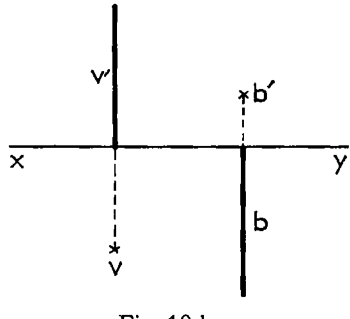


Fig. 10 b.

5° **Droite verticale.** — On appelle **verticale** toute droite perpendiculaire au plan horizontal. Sa projection frontale v' est perpendiculaire à xy et sa projection horizontale v est un point situé sur le support de v'. Exemple (v, v'), (fig. 10 b).

6° **Droite de bout.** — On appelle **droite de bout** toute droite perpendiculaire au plan

frontal. Sa projection horizontale b est perpendiculaire à xy, sa projection frontale b' est un point situé sur le support de b.

Exemple : (b, b'), (fig. 10 b).

7° **Droite de profil.** Voir n° 3.

IV. DROITES CONCOURANTES OU PARALLÈLES

11. Droites concourantes.

Si deux droites (D) et (Δ) se coupent en un point I, la projection horizontale, i, de I appartient nécessairement aux projections horizontales (d) et (δ) de (D) et (Δ) ; de même i' appartient nécessairement à (d') et (δ'). Les points i et i' sont sur une même ligne de rappel.

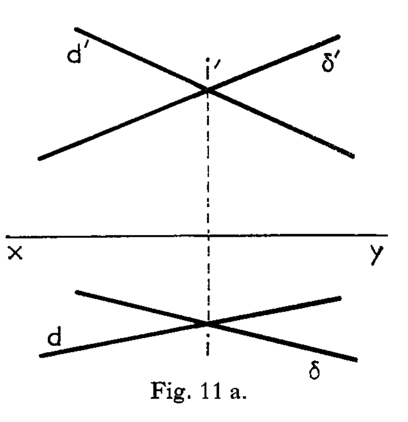


Fig. 11 a.

Réciproquement : Soient deux droites (d, d') et (δ, δ') telles que : d et δ se coupent en i, d' et δ' se coupent en i', i et i' étant sur une même ligne de rappel. i et i' définissent bien un point et ce point appartient aux deux droites (n° 5).

Théorème. — **Deux droites sont concourantes si le point d'intersection des projections horizontales et le point d'intersection des projections frontales sont sur une même ligne de rappel.**

Cas particuliers.

1° Si deux projections de même nom se confondent, d et δ par exemple, et si les deux autres se coupent, les deux droites sont concourantes. En effet, les deux droites sont dans le plan qui les projette sur le plan horizontal. Elles ne sont pas parallèles puisque leurs projections frontales se coupent. Leur point d'intersection est (i, i') (fig. 11 b).

2° Si l'une des projections se réduit à un point situé sur la projection de même nom de l'autre droite, les deux droites sont

concourantes. Exemple : la droite (d, d') et la verticale (δ, δ') se coupent en (i, i') (fig. 11 c).

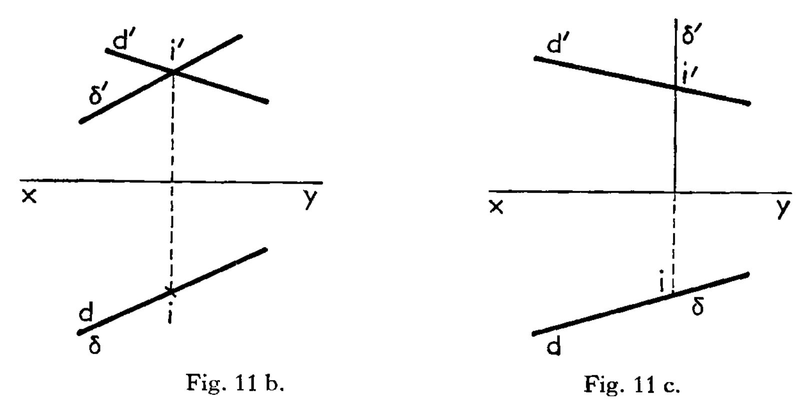


Fig. 11 b. Fig. 11 c.

Remarque. — Deux droites situées dans un même plan de profil sont concourantes ou parallèles. Pour déterminer le cas qui se présente, il suffit de rabattre le plan de profil sur le plan horizontal.

12. Droites parallèles.

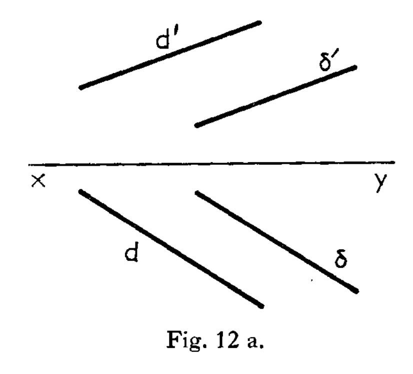


Fig. 12 a.

1° Soient (D) et (Δ) deux droites parallèles (non perpendiculaires à l'un des plans de projection et non de profil), leurs projections (d) et (δ) sur le plan horizontal sont parallèles car elles sont les intersections du plan horizontal et de deux plans parallèles (les plans projetants).

De même (d') et (δ') sont parallèles.

Éventuellement d et δ *ou* d' et δ' peuvent être confondues.

Réciproquement. Soient deux droites non de profil (d, d') et (δ, δ') telles que δ et d sont parallèles ainsi que δ' et d'. Les plans projetants passant par d et δ sont parallèles ainsi que les plans

projetants passant par d' et δ'. Ces plans se coupent deux à deux suivant quatre droites parallèles. Donc D et Δ sont parallèles.

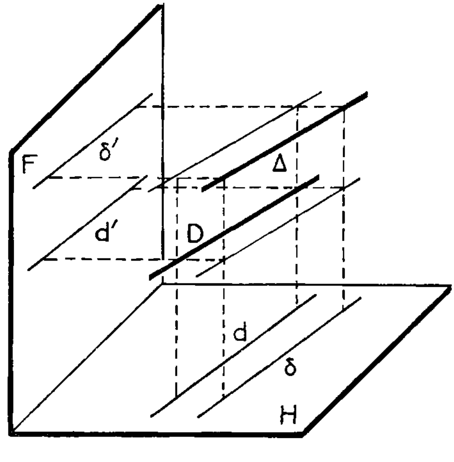


Fig. 12 b.

Théorème. — **Deux droites sont parallèles si leurs projections de même nom sont parallèles.**

Cas particuliers.

1° Si les deux droites ont même projection horizontale, par exemple, et si les projections frontales sont parallèles, les droites sont parallèles comme intersections des deux plans parallèles qui les projettent sur le plan frontal par le plan unique qui les projette sur le plan horizontal (fig. 12 c).

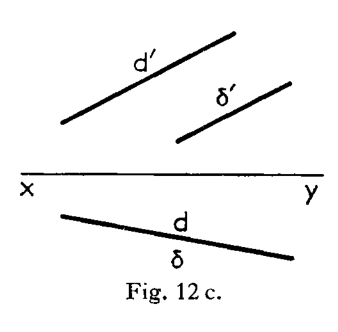
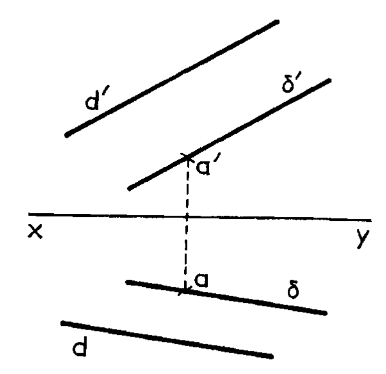


Fig. 12 c.

2° Deux droites perpendiculaires à un même plan sont parallèles.

Remarque. — Deux droites de profil ne sont pas nécessairement parallèles.



13. Applications.

1° Mener par un point (*a*, *a'*) une parallèle à une droite (*d*, *d'*).

Par le point *a*, il suffit de mener δ parallèle à *d* et par *a'* la droite δ' parallèle à *d'*. La parallèle cherchée est la droite (δ, δ'). (fig. 13 a).

2° Reconnaître si deux droites données (*d*, *d'*) et (δ, δ') sont concourantes.

Fig. 13 a.

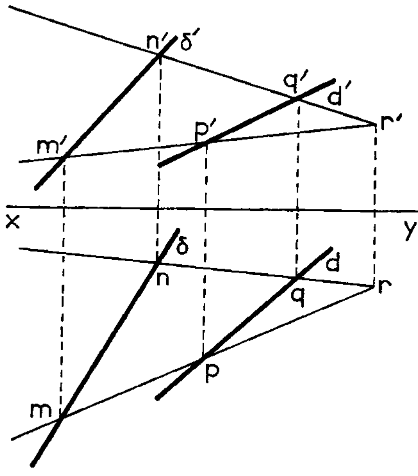


Fig. 13 b.

Il suffit de vérifier que le point de rencontre des projections frontales et le point de rencontre des projections horizontales sont sur une même ligne de rappel, dans le cas où ces projections se coupent dans les limites de l'épure.

Dans le cas contraire, on sait que deux droites concourantes déterminent un plan. Or deux droites s'appuyant sur les premières déterminent le même plan.

On peut toujours se donner les projections concourantes de même nom des deux droites auxiliaires, les projections frontales *m'p'* et *n'q'*, par exemple (fig. 13 b); on détermine les projections horizontales correspondantes *mp* et *nq* : ces dernières doivent se rencontrer, et les deux points d'intersection *r* et *r'* doivent appartenir à une même ligne de rappel.

S'il n'en est pas ainsi, les droites (*d*, *d'*) et (δ, δ') ne sont pas concourantes.

EXERCICES

Du point et de la droite.

106. L'unité étant le cm, représenter les points de coordonnées :

A $\begin{cases} e = 2 \\ c = 3 \end{cases}$ B $\begin{cases} e = -3{,}1 \\ c = +3{,}1 \end{cases}$ C $\begin{cases} e = -3 \\ c = -4. \end{cases}$

107. Représenter les symétriques des points A, B, C du problème 106 :
1° Par rapport au plan frontal.
2° Par rapport au plan horizontal.

108. Sur une même ligne de rappel, on a deux projections équidistantes de xy. Quelle est la position du segment rectiligne qui joint les deux points de l'espace :

1° Lorsque la projection située au-dessus de xy est marquée a', b, et que la projection au-dessous est marquée a, b' ?

2° Lorsque la projection au-dessus de xy est marquée c, c', et que celle au-dessous est marquée d, d' ?

109. Sur une droite donnée (ab, $a'b'$), trouver un point M tel que sa cote soit à son éloignement dans le rapport 1/2 :

1° La droite est quelconque ; 2° la droite est de profil ; 3° la droite est de bout.

110. Connaissant une projection d'un point A d'une droite de profil Δ, trouver l'autre projection de ce point.

111. Tracer une droite de bout et une verticale rencontrant deux droites données.

112. Représenter un triangle ayant un côté horizontal et un côté de bout.

113. Sur une même ligne de rappel, on a les projections de deux points. Quelle est la position de la droite qui joint ces deux points, lorsque les projections ont les dispositions suivantes :
1° a et b coïncident et sont au-dessous de xy ;
2° c et d coïncident et sont sur xy ;
3° e et f coïncident et sont au-dessus de xy ?
Les deux autres projections sont distinctes l'une de l'autre ; remarque analogue pour les cas suivants :
4° a' et b' coïncident et sont au-dessus de xy ;
5° c' et d' coïncident et sont sur xy ;
6° e' et f' coïncident et sont au-dessous de xy.

114. Mener par un point donné une horizontale et une frontale s'appuyant sur une droite donnée.

115. Reconnaître si un point est sur une droite de profil.

Traces des droites.

116. Par un point donné mener une droite dont les traces h et f' soient équidistantes de la ligne de terre.

117. Quel est l'ensemble des traces des droites menées par un point donné et également inclinées sur chaque plan de projection ?

118. Par un point donné, mener une droite telle que sa trace horizontale soit deux fois plus près de la ligne de terre que sa trace frontale, ou, plus généralement, telle que les distances de chaque trace à xy soient dans un rapport donné.

119. Montrer que : 1° Toute parallèle à *xy* est contenue dans un des plans bissecteurs, ou bien elle est parallèle à ces deux plans.

2° Toute horizontale, non parallèle à *xy*, rencontre les deux plans bissecteurs ; il en est de même de toute ligne de front non parallèle à *xy*.

120. Déterminer la trace d'une droite sur chacun des deux plans bissecteurs.

121. Déterminer l'intersection d'une droite donnée et des deux plans bissecteurs, dans les cas suivants :

a) La droite est horizontale ;
b) La droite est perpendiculaire à l'un des plans de projection ;
c) La droite appartient à un plan de profil.

122. Dans quel cas la droite dont les projections sont sur les traces de même nom d'un plan appartient-elle à ce plan ?

123. Comment reconnaît-on qu'une droite est située dans un plan mené par la ligne de terre et par un point donné ?

124. Reconnaître si une droite de profil rencontre une droite quelconque.

CHAPITRE 10

LE PLAN

I. TRACES ET REPRÉSENTATION D'UN PLAN

1. Représentation d'un plan.

En géométrie, un plan est déterminé :

1° Par deux droites qui se coupent ;

2° Par deux droites parallèles ;

3° Par une droite et un point extérieur ;

4° Par trois points non en ligne droite.

Les trois derniers cas se ramènent au premier, car il suffit de joindre un point de l'une des parallèles à un point de la seconde (2°), ou de joindre le point donné à un point quelconque de la droite (3°), ou enfin de joindre l'un des points à chacun des deux autres (4°).

Donc, ***en général, un plan peut être représenté par les projections de deux droites concourantes*** (fig. 1).

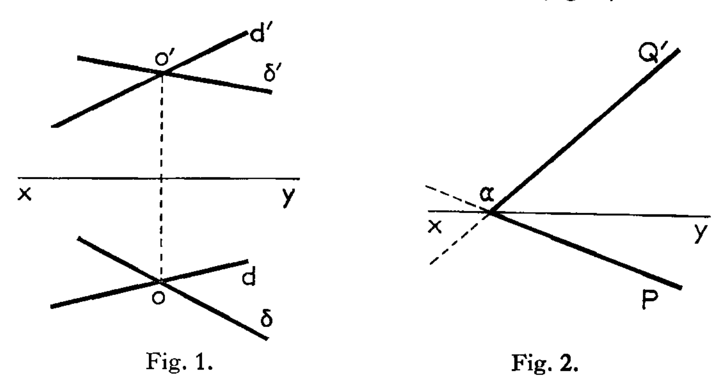


Fig. 1. Fig. 2.

2. Traces d'un plan.

La **trace horizontale** (αP, *xy*) (fig. 2) est l'intersection du plan donné avec le plan horizontal ; elle est elle-même sa projection horizontale, et sa projection frontale est sur *xy*.

La **trace frontale** ($\alpha Q'$, xy) (fig. 2) est l'intersection du plan donné avec le plan frontal ; elle se confond avec sa projection frontale, et sa projection horizontale est sur xy.

Un plan se représente souvent par ses traces. — Cela revient à représenter le plan par deux droites concourantes, car les deux droites (αP, xy) et ($\alpha Q'$, xy) concourent au point α.

Remarques. — La **trace horizontale** a une **cote nulle, la trace frontale** a un **éloignement nul.**

3. ***Les traces d'un plan concourent en un même point de la ligne de terre, ou elles sont parallèles à cette ligne.***

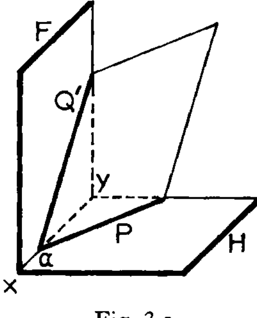


Fig. 3 a.

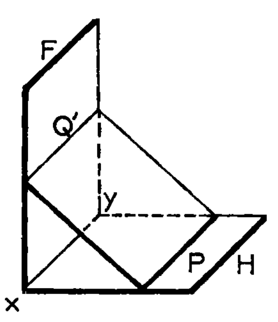
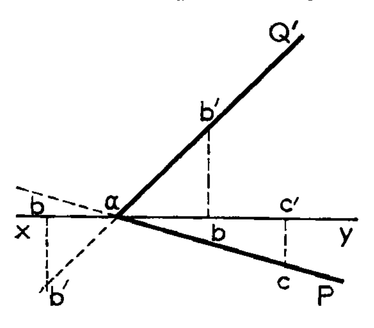


Fig. 3 b.

En effet, le plan coupe xy ou lui est parallèle ; dans le premier cas, le point α intersection des traces appartient au plan frontal et au plan horizontal, donc il est sur la ligne de terre.

Lorsque le plan est parallèle à xy, chaque plan de projection contient une parallèle, xy, au plan donné ; donc, les intersections P, Q', seront parallèles à xy.



Désignation d'un plan. — Un plan se désigne par le nom de ses traces ou par une seule lettre ; ainsi on dit : ***le plan*** $P\alpha Q'$ ou ***le plan*** P. Parfois on se borne à indiquer le point où il coupe xy ; on peut dire : ***le plan*** α.

Fig. 3 c.

4. Point sur une trace.

Un point appartient à la trace horizontale d'un plan lorsque la projection horizontale de ce point est sur la trace de même nom, et que la projection frontale est sur la ligne de terre.

La trace horizontale est (αP, xy), et le point (c, c') se trouvant sur cette droite a ses projections sur les projections correspondantes de cette droite (fig. 3 c).

Raisonnement analogue pour le point (b, b') de la trace verticale (αQ, xy).

II. PLANS PARTICULIERS

5. Plan vertical.

On appelle **plan vertical** tout plan perpendiculaire au plan horizontal.

Le plan vertical et le plan F étant perpendiculaires au plan H, leur intersection αQ' est perpendiculaire au plan H et, par suite, à xy. D'où l'épure de la figure 5 b.

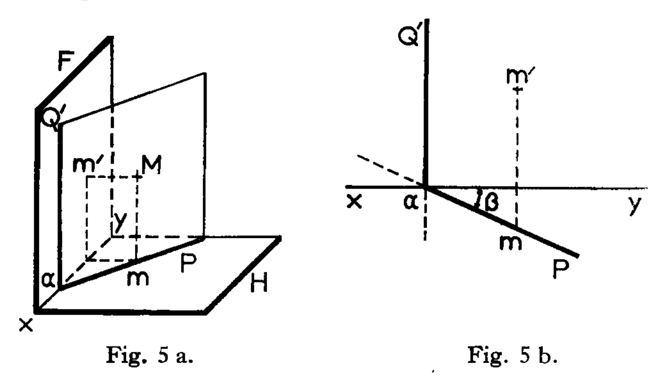


Fig. 5 a. Fig. 5 b.

Réciproquement, soit l'épure (fig. 5 b) où la trace αQ' est perpendiculaire à xy. αQ' qui appartient au plan F perpendiculaire au plan H, est perpendiculaire à l'intersection, xy de ces deux plans, elle est perpendiculaire au plan H. PαQ' est donc un plan vertical.

Remarques. 1° L'angle Pαy est le rectiligne du dièdre (P, αQ', F). Sur l'épure, β est l'angle des plans PαQ' et F.

2° Tout point M du plan vertical se projette horizontalement sur αP, sur l'épure il se représente en (m, m').

6. Plan de bout.

On appelle **plan de bout** tout plan perpendiculaire au plan frontal.

On démontrera ,comme au n° 5, que αP est perpendiculaire à xy et réciproquement.

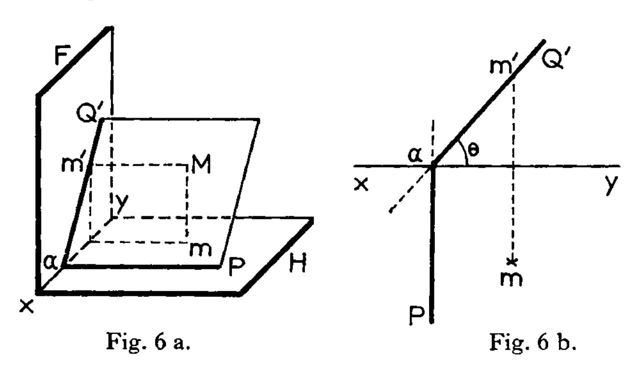


Fig. 6 a. Fig. 6 b.

Remarques. 1° θ est l'angle des plans PαQ' et H.

2° Un point $M \in P\alpha Q'$ se représente en (m, m'), m' appartenant à αQ'.

7. Plan horizontal.

On appelle **plan horizontal** tout plan parallèle au plan horizontal de projection.

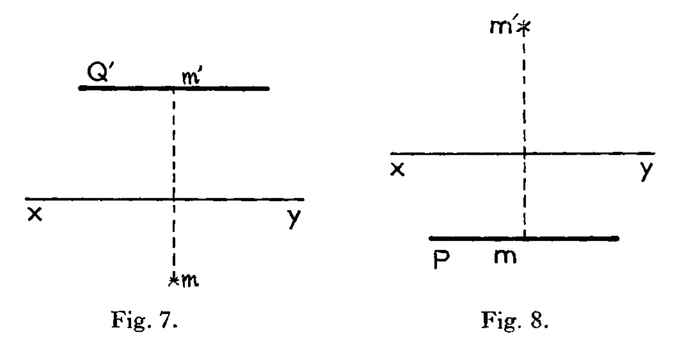


Fig. 7. Fig. 8.

Un tel plan n'a pas de trace horizontale ; sa trace frontale est parallèle à xy. Un plan horizontal est un plan de bout particulier, et tout point de ce plan a sa projection frontale sur la trace frontale du plan (fig. 7).

8. Plan de front.

On appelle **plan de front ou plan frontal** tout plan parallèle au plan frontal de projection.

Un tel plan n'a pas de trace frontale ; sa trace horizontale est parallèle à xy. Un plan de front est un plan vertical particulier, et tout point de ce plan a sa projection horizontale sur la trace horizontale du plan (fig. 8).

9. Plan de profil.

On appelle **plan de profil** tout plan perpendiculaire à la ligne de terre, c'est-à-dire aux plans de projection. Ses deux traces αP et $\alpha Q'$ sont perpendiculaires à xy (fig. 9). Le plan de profil est à la fois un plan de bout et un plan vertical ; donc les projections de tout point du plan sont situées sur les traces de ce plan.

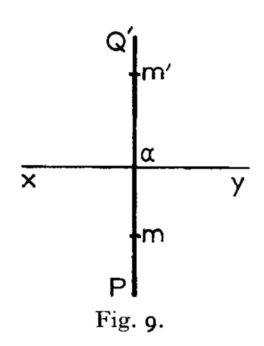


Fig. 9.

10. Plan passant par la ligne de terre.

Ses traces se confondent avec xy. Pour que le plan soit déterminé, il faut connaître les projections de l'un de ses points (c, c'), par exemple, ou toute autre condition, telle que l'angle qu'il forme avec le plan horizontal.

Une droite de ce plan rencontre xy ou lui est parallèle ; dès lors ses projections (ab, $a'b'$) se coupent sur xy, ou lui sont parallèles : ex. : (cd, $c'd'$) (fig. 10).

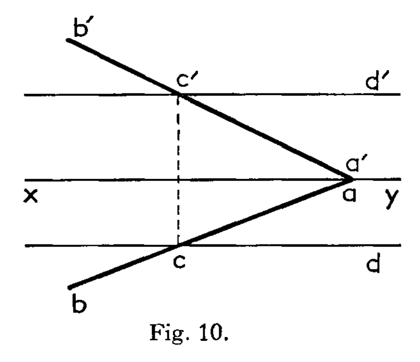


Fig. 10.

III. DROITES CONTENUES DANS UN PLAN

11. ***Si une droite est dans un plan, ses traces sont sur les traces correspondantes du plan.***

Soient PαQ′ et une droite HF de ce plan (fig. 11 a). Les traces H et F de la droite appartiennent respectivement à αP et αQ′. En effet :

H appartient à la fois au plan horizontal et au plan PαQ′, donc à leur intersection αP. H est confondu avec sa projection horizontale h, et sa projection frontale h' est sur xy.

Raisonnement analogue pour la trace F.

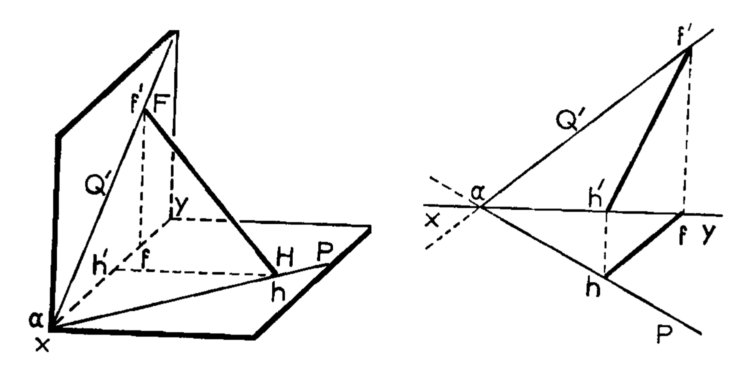


Fig. 11 a. Fig. 11 b.

Réciproquement, si on se donne l'épure 11 b, il est immédiat que (h, h') appartient à la trace $(\alpha P, xy)$ et (f, f') à la trace $(xy, \alpha O')$. Donc la droite $(hf,\ h'f')$ appartient au plan PαQ′ et les points (h, h') et (f, f') sont les traces de la droite.

12. Horizontales d'un plan.

On appelle **horizontale d'un plan** toute parallèle au plan horizontal contenue dans le plan donné.

Tout plan horizontal coupe un plan quelconque suivant une horizontale (fig. 12 a.)

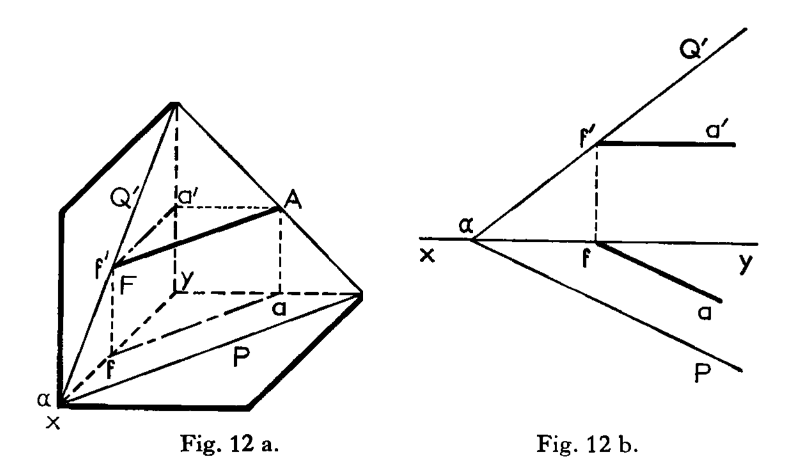


Fig. 12 a. Fig. 12 b.

Une horizontale d'un plan est parallèle à la trace horizontale αP et tous ses points ont même cote. D'où l'épure 12 b.

Conséquence. — Pour mener une horizontale FA dans un plan donné PαQ', on prend *f'* sur αQ', on détermine *f* sur *xy*, puis l'on mène *f'a'* parallèle à *xy* et *fa* parallèle à αP.

13. Frontales d'un plan.

On appelle **frontale** d'un plan toute droite de ce plan parallèle au plan frontal.

Tout plan frontal coupe un plan quelconque suivant une frontale.

Toutes les frontales d'un plan sont parallèles entre elles et à la trace frontale du plan.

Tous les points d'une frontale ont même éloignement.

Conséquence. — Pour mener une frontale dans un plan donné RβS' (fig. 13), on prend *h* sur βR, on détermine *h'*, puis l'on mène *hg* parallèle à *xy* et *h'g'* parallèle à βS'.

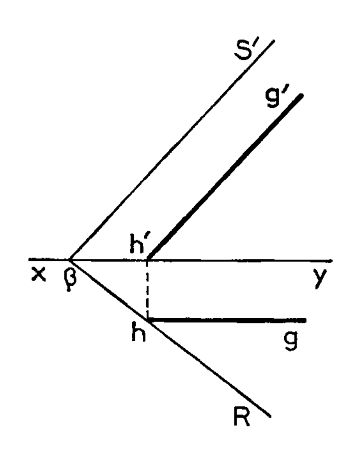


Fig. 13.

14. Ligne de plus grande pente d'un plan.

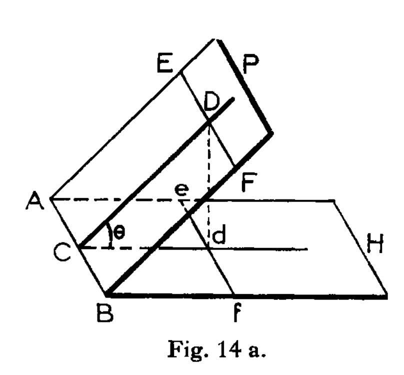


Fig. 14 a.

On appelle **ligne de plus grande pente d'un plan par rapport au plan horizontal,** toute droite CD du plan donné (fig. 14 a) qui forme avec sa projection horizontale le plus grand angle possible.

On sait que CD est perpendiculaire à l'intersection AB du plan donné et du plan horizontal. CD est donc perpendiculaire à toute les horizontales EF du plan donné.

L'angle droit (CD, EF) se projette sur le plan H suivant un angle droit car il a un côté parallèle au plan H. Donc :

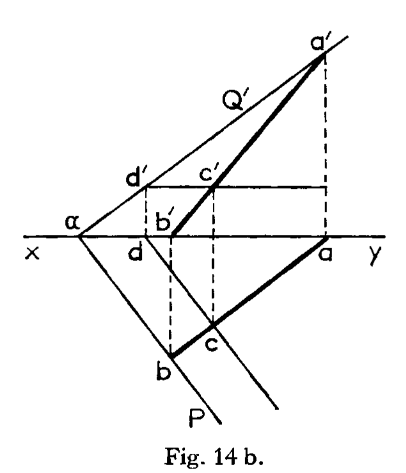


Fig. 14 b.

En épure (fig. 14 b), la projection horizontale *ab* d'une ligne de pente du plan PαQ′ est perpendiculaire à la trace αP.

Une ligne de plus grande pente (ab, a′b′) suffit pour caractériser un plan ; car on peut en déduire les traces du plan : par la trace horizontale ***b*** de cette ligne, on peut mener αP perpendiculaire à *ab*, puis joindre α à la trace frontale ***a′*** (fig. 14 b).

IV. APPLICATIONS

15. Étant donnés un plan et l'une des projections d'une droite de ce plan, trouver l'autre projection de cette droite.

1° **Le plan est donné par ses traces.** — Soient le plan PαQ′ et la projection horizontale *ab* d'une droite de ce plan (fig. 15 a).

La droite appartenant au plan, ses traces se trouvent sur les traces correspondantes du plan (n° 11).

La trace horizontale appartient à la fois à *ab* et à αP ; elle est donc à leur intersection *h*, et sa projection frontale est en *h'* sur *xy*.

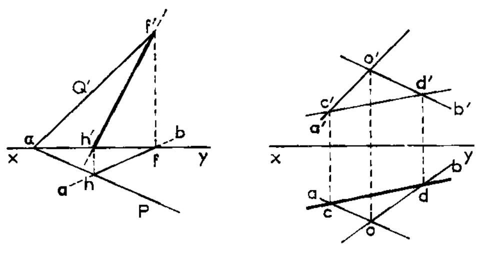


Fig. 15 a. Fig. 15 b.

Le point *f*, intersection de *ab* et de *xy*, est la projection horizontale de la trace frontale ; cette trace frontale doit se trouver sur αQ' ; elle est déterminée par la ligne de rappel *ff'*.

h'f' est la projection demandée.

2° **Le plan est donné par deux droites concourantes.** — Soit un plan déterminé par les deux droites (*oa*, *o'a'*) et (*ob*, *o'b'*), et soit *c'd'* la projection frontale d'une droite de ce plan (fig. 15 b).

La droite cherchée étant dans le plan coupe les droites du plan ; elle coupe (*oa*, *o'a'*) en (*c*, *c'*) et (*ob*, *o'b'*) en (*d*, *d'*).

On procède de la même manière lorsque le plan est déterminé par deux droites parallèles.

16. Étant donnés un plan et l'une des projections d'un point de ce plan, trouver l'autre projection de ce point.

Par la projection donnée, projection horizontale, par exemple, on mène une droite que l'on considère comme étant la projection horizontale d'une droite du plan ; on détermine la seconde projection de cette droite et une ligne de rappel fait connaître la projection demandée.

1° **Le plan PαQ' est donné par ses traces** (fig. 16 a).

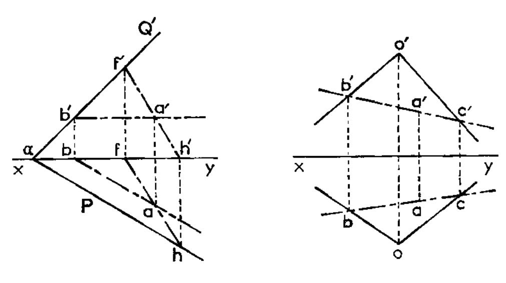


Fig. 16 a. Fig. 16 b.

Soit *a* la projection donnée. Par *a*, menons une projection horizontale quelconque *hf*, déterminons *h'f'*. La droite HF est contenue dans le plan, donc *a'* se trouve à l'intersection de *h'f'* et de la ligne de rappel *aa'*.

Lorsqu'on donne la projection horizontale du point, on peut employer avec avantage une horizontale du plan : on mène *ab* parallèle à αP, puis *a'b'* parallèle à *xy*. Le point *a'* est mieux déterminé par des lignes *aa'*, *b'a'*, qui se coupent à angle droit. Lorsqu'on donne la projection frontale du point, on peut recourir à une frontale.

2° **Le plan est donné par deux droites.**

Soit un plan donné par deux droites concourantes (fig. 16 b).

Si l'on donne *a'*, on mène *a'b'c'* quelconque, puis on en déduit *bc* ; la droite BC appartient au plan, et la ligne de rappel *a'a* détermine le point demandé.

17. Déterminer les traces d'un plan défini par deux droites concourantes ou parallèles.

La trace horizontale du plan a une cote nulle, il suffit de déterminer sur les deux droites (concourantes ou parallèles) deux points de cote nulle.

De même la trace frontale du plan sera déterminée par deux points d'éloignement nul sur les deux droites données.

Soient deux droites parallèles (*ab*, *a'b'*) et (*cd*, *c'd'*) (fig. 17 a). Sur ces droites : (*a*, *a'*) et (*c*, *c'*) sont des points de cote nulle, (*b*, *b'*) et (*d*, *d'*) des points d'éloignement nul. Donc αP passe par *a* et *c*, αQ' par *b'* et *d'* (remarquons que *ac* et *b'd'* se coupent sur *xy* en α).

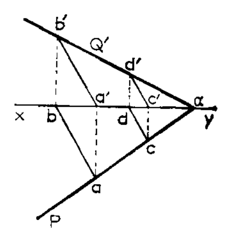
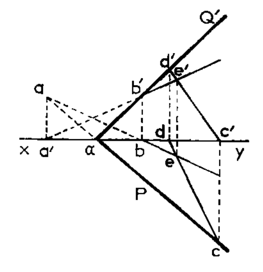


Fig. 17 a.



Sur l'épure de droites concourantes (*eb*, *ed*), (*e'b'*, *e'd'*) on a également déterminé les traces du plan des deux droites (fig. 17 b).

Fig. 17 b.

EXERCICES

Du plan. — Traces des plans.

125. Mener une droite dans un plan de bout ou dans un plan vertical.
Mener une droite dans un plan de front ou horizontal.

126. Mener une droite parallèle à un plan de bout.
Mener une droite parallèle à un plan vertical.

127. Placer dans un plan de bout un point d'éloignement donné.
Placer dans un plan de bout une droite d'éloignement donné.

128. Traces d'une droite à projections confondues ou parallèles.

129. Traces d'un plan déterminé par une droite Δ quelconque et un point A [illegible].

130. Traces d'un plan déterminé par deux droites à projections confondues.

131. Trouver la projection δ d'une droite (δ′, δ) d'un plan PαQ′, sachant que δ passe par α.

132. Traces d'un plan déterminé par *xy* et un point.
Traces d'un plan déterminé par un point quelconque et par une droite du second bissecteur.

133. Traces d'un plan déterminé par deux droites concourantes dont l'une est parallèle à *xy*.

134. Traces d'un plan déterminé par deux droites concourantes en un point de *xy*, ou par deux parallèles à *xy*.

135. Construire les deux traces d'un plan, connaissant un point de l'une des traces ainsi qu'une droite Δ du plan, si Δ est parallèle à *xy*.

136. Déterminer les traces d'un plan donné :
1° Par deux droites dont l'une est de profil ;
2° Par deux droites concourantes dont l'une a ses projections confondues.

137. Trouver un point d'un plan, connaissant sa cote et son éloignement.

138. Vérifier si un point appartient à un plan.

139. Trouver dans un plan parallèle à *xy* un point de cote donnée.

140. Tracer dans un plan parallèle à *xy* :
1° Une frontale d'éloignement donné,
2° Une horizontale de cote donnée,
3° Une ligne de plus grande pente.

141. Étant donné par ses traces un plan parallèle à *xy*, et connaissant la projection frontale d'un point de ce plan, trouver l'autre projection.

142. Dans un plan défini par une droite de profil et un point A, tracer une frontale, une horizontale, une ligne de pente passant par un point B du plan.

143. Tracer dans un plan donné PαQ′ une droite parallèle à l'un des bissecteurs.

144. Reconnaître si un point (*a*, *a*′) est dans un plan parallèle à *xy*.

145. Mener par une droite un plan dont les traces soient en ligne droite.

146. Construire dans un plan donné un segment horizontal ou frontal de longueur donnée et s'appuyant sur deux droites du plan.

147. Construire les traces du plan déterminé par trois points donnés par leurs projections, dans les deux cas suivants :
1° Deux de ces points appartiennent à une droite parallèle à *xy* ;
2° Deux de ces points sont sur une même droite verticale ou de bout.

CHAPITRE 11

CHANGEMENT DE PLAN DE PROJECTION

1. Introduction.

La Géométrie descriptive se simplifie lorsque les données ont des positions particulières, relativement aux plans de projection.

Il est donc utile, et parfois nécessaire, de rapporter les données à de nouveaux plans de projection qui permettent d'employer des constructions plus simples.

I. CHANGEMENT DU PLAN FRONTAL DE PROJECTION

2. But de la méthode.

Le changement de plan frontal a pour but d'amener une droite quelconque à être parallèle au nouveau plan frontal, ou un plan quelconque à lui être perpendiculaire.

3. *Effectuer un changement de plan frontal pour un point.*

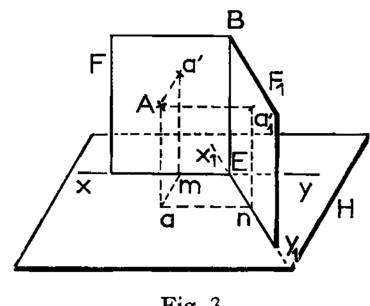


Fig. 3.

On donne les projections d'un point dans le système des deux plans rectangulaires H et F. Il s'agit de déterminer les projections de ce point dans le système des deux plans rectangulaires H et F_1 (fig. 3).

Un point A de l'espace a pour projections dans les deux systèmes a, a' et a'_1

On a :

$$\overline{ma'} = \overline{a\mathrm{A}},$$

$$\overline{na'_1} = \overline{a\mathrm{A}},$$

donc

$$\overline{ma'} = \overline{na'_1}.$$

Ainsi, lorsqu'on change le plan frontal de projection :

1° **la projection horizontale d'un point quelconque ne change pas ;**

2° **la cote du point reste constante.**

4. Règle pratique.

Lorsqu'on change de plan frontal, la nouvelle projection frontale d'un point s'obtient en abaissant, de la projection horizontale, une perpendiculaire sur x_1y_1, et en portant, dans la direction convenable, la cote du point considéré.

Épure. — 1° Soient a et a' les projections d'un point dans le système xy. Il faut trouver ses projections dans le système x_1y_1 (fig. 4 a). D'abord, la projection horizontale, a, ne change pas.

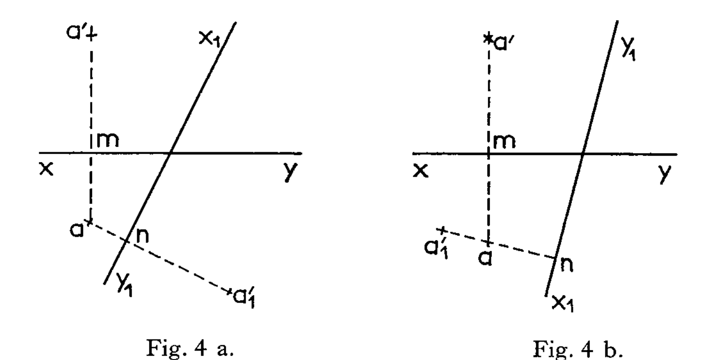


Fig. 4 a. Fig. 4 b.

Du point a, on abaisse une perpendiculaire ana'_1 sur x_1y_1 et l'on porte une longueur na'_1, égale à ma', **au-dessus** de x_1y_1. Puisque la cote ma' est **positive**, a'_1 est la nouvelle projection frontale du point considéré.

2° Soient encore a et a' les projections d'un point dans le système xy, et x_1y_1 la nouvelle ligne de terre (fig. 4 b). On mène ana'_1 perpendiculaire à x_1y_1, et, puisque la cote ma' est **positive,** on porte **au-dessus** de x_1y_1 la distance $na'_1 = ma'$.

Dans ce changement de plan frontal, le point (a, a'_1) se trouve dans le second dièdre.

5. *Effectuer un changement de plan frontal pour une droite.*

Il suffit d'effectuer, pour deux points qui déterminent la droite, le changement défini au problème précédent.

1° Soient (ab, $a'b'$) les projections d'une droite dans le système xy (fig. 5 a). Pour obtenir la nouvelle projection frontale dans le

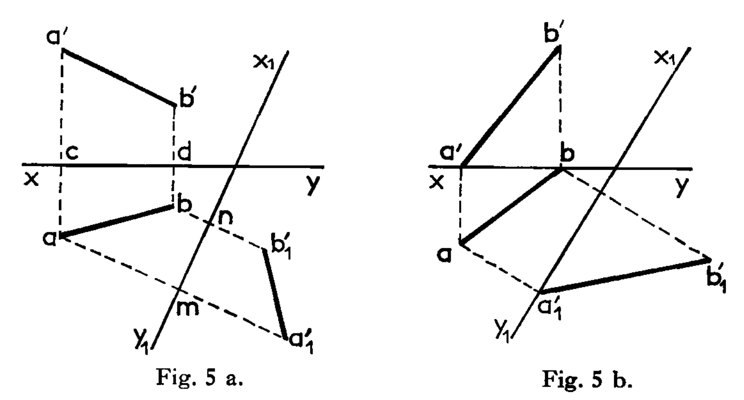


Fig. 5 a. Fig. 5 b.

système x_1y_1, des points a et b, il suffit d'abaisser des perpendiculaires sur x_1y_1, et de prendre sur ces perpendiculaires :

$$ma'_1 = ca' \text{ et } nb'_1 = db'.$$

$a'_1b'_1$ est la nouvelle projection frontale de la droite.

2° Il est avantageux de choisir, pour l'un des points à projeter, le point de cote nulle.

Exemple : (a, a') (fig. 5 b).

6. Applications.

Par un changement de plan frontal :

1° Rendre une droite donnée parallèle au nouveau plan frontal.

Il suffit que la nouvelle ligne de terre x_1y_1 soit parallèle à la projection horizontale de la droite.

Soit (ab, $a'b'$) la droite donnée (fig. 6). Prenons x_1y_1 parallèle à ab et déterminons la nouvelle projection frontale $a'_1b'_1$ de la droite.

La droite $(ab,\ a'_1b'_1)$ est parallèle au nouveau plan frontal ; c'est une frontale dans le système x_1y_1.

Donc : la **distance des points A et B** est $a'_1b'_1$. (fig. 6 a).

L'angle de AB et du plan horizontal est $(x_1y_1,\ a'_1b'_1)$.

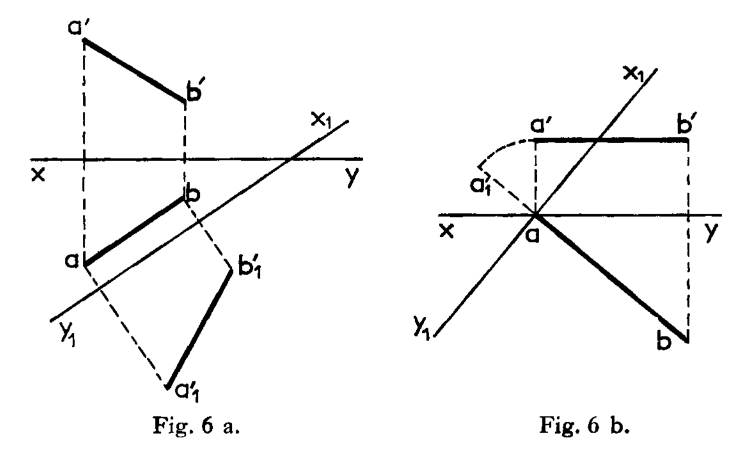


Fig. 6 a. Fig. 6 b.

2° **Amener une horizontale à être une ligne de bout.**

Il faut choisir un plan frontal perpendiculaire à la droite donnée. La nouvelle ligne de terre x_1y_1 doit être perpendiculaire à *ab*.

La projection horizontale *ab* ne change pas (fig. 6 b) : tous les points de la droite ont même cote, et cette cote est invariable; donc il suffit de prendre, sur la ligne de rappel qui se confond avec *ab*, une distance aa'_1 égale à la cote aa'.

La droite $(ab,\ a'_1)$ est de bout, car *ab* est perpendiculaire à x_1y_1.

7. ***Effectuer un changement de plan frontal pour un plan.***

1° **Le plan est donné par deux droites concourantes.**

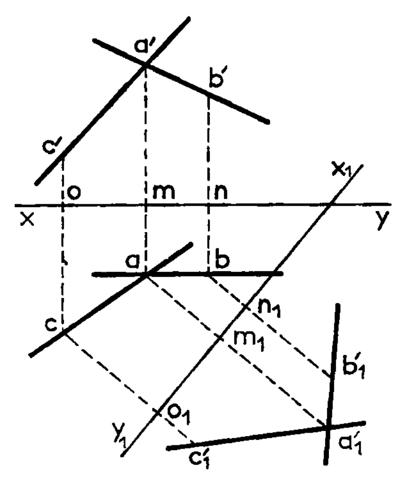


Fig. 7 a.

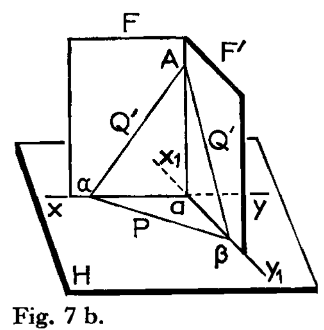


Fig. 7 b.

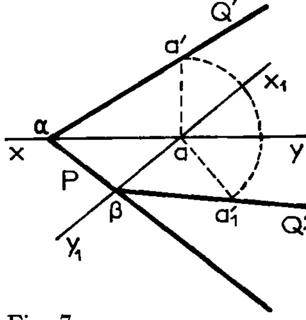


Fig. 7 c.

Si le plan est défini par deux droites concourantes quelconques (ab, $a'b'$) et (ac, $a'c'$) (fig. 7a), on effectue le changement pour chacune de ces droites en utilisant leur point commun (a, a'). On est donc ramené aux problèmes précédents.

2° Le plan est donné par ses traces.

Soient PαQ′ le plan donné, H et F les plans de projections et F′ le nouveau plan frontal. Sa trace horizontale x_1y_1 est la nouvelle ligne de terre.

La trace horizontale αP du plan donné ne change pas; la nouvelle trace frontale est l'intersection du plan donné avec le nouveau plan frontal; on en connaît un point β, point de rencontre de x_1y_1 avec αP (fig. 7b); il suffit d'en trouver un second. Pour cela prenons le point A du plan qui se projette horizontalement au point d'intersection, a, des deux lignes de terre et qui se rappelle en a' sur αQ′. Sa cote se conservera, et comme a est sur x_1y_1, a'_1, sa nouvelle projection frontale, appartient à la nouvelle trace frontale $\beta a'_1$ (fig. 7 c).

8. Applications.

Par un changement de plan frontal rendre de bout un plan quelconque.

Il faut prendre la nouvelle ligne de terre x_1y_1 perpendiculaire soit à une horizontale du plan s'il est donné par deux droites concourantes (fig. 8 a), soit à sa trace horizontale s'il est défini par ses traces (fig. 8 b).

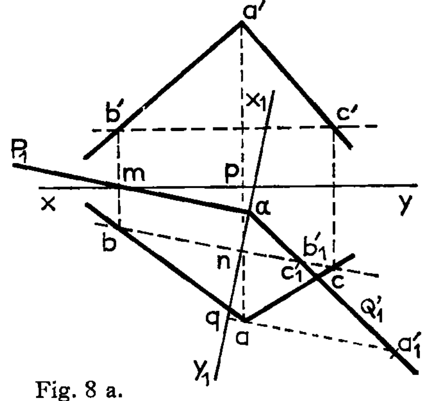


Fig. 8 a.

Remarques. — 1° L'angle que fait Q'_1 avec x_1y_1 est l'angle θ du plan donné avec le plan horizontal (fig. 8 b).

2° Tous les points de l'horizontale $(bc, b'c')$ se projettent frontalement en b'_1, car cette droite est de bout dans le système x_1y_1 (fig. 8 a).

Tout point du plan se projette alors frontalement sur la trace frontale Q'_1. Il est aisé de distinguer sur chaque épure les couples de points ayant servi à déterminer la trace Q'_1. Dans le cas de la fig. 8 a, la trace horizontale αP_1 est perpendiculaire à x_1y_1.

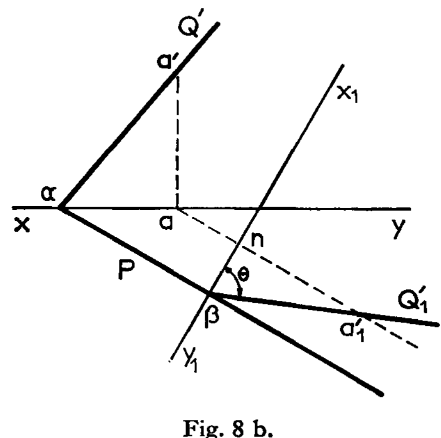


Fig. 8 b.

II. CHANGEMENT DU PLAN HORIZONTAL DE PROJECTION

9. Définition.

Par convention, on appelle nouveau plan horizontal tout plan perpendiculaire au plan frontal conservé, lorsque ce plan de bout doit remplacer le plan horizontal primitif.

10. But de la méthode.

Le changement de plan horizontal a pour but d'amener une droite quelconque à être parallèle au nouveau plan horizontal, ou un plan quelconque à lui être perpendiculaire.

11. *Effectuer un changement de plan horizontal pour un point.*

On donne les projections d'un point dans le système de deux plans rectangulaires H et F. Construire les projections de ce point dans le système de deux plans rectangulaires H_1 et F (fig. 10).

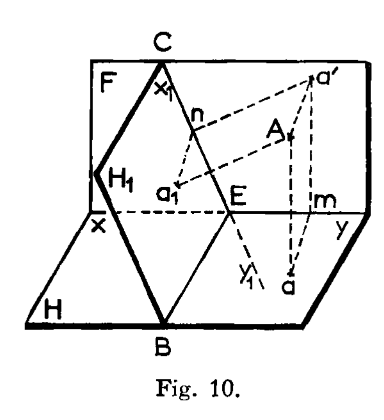


Fig. 10.

Un point A de l'espace a pour projections dans les deux systèmes a, a', a_1.

On a : $\overline{am} = \overline{Aa'}$;

$\overline{a_1n} = \overline{Aa'}$;

donc $\overline{a_1n} = \overline{am}$.

Ainsi, lorsqu'on change le plan horizontal de projection :

1° **La projection frontale d'un point ne change pas ;**

2° **L'éloignement de ce point reste constant.**

12. Règle pratique.

Lorsqu'on change de plan horizontal, la nouvelle projection horizontale d'un point s'obtient en abaissant, de la projection frontale, une perpendiculaire sur x_1y_1, et en portant, dans la direction convenable, l'éloignement du point considéré.

Épure. — 1° Soient (a, a') les projections du point dans le système xy. Il faut trouver ses projections dans le système x_1y_1 (fig. 12).

D'abord la projection frontale a' ne change pas. Du point a', on abaisse une perpendiculaire $a'na_1$ sur x_1y_1, et l'on porte au-

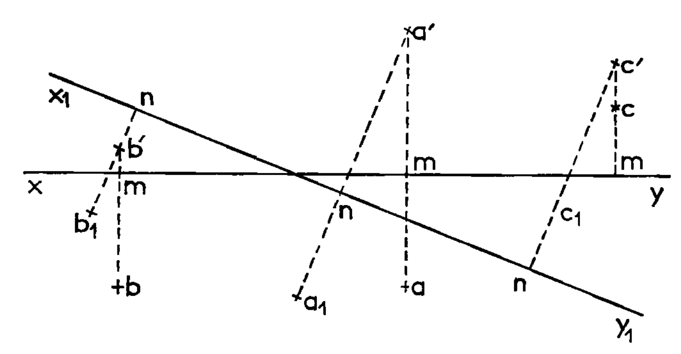


Fig. 12.

dessous de x_1y_1 une longueur égale à ma, puisque l'éloignement ma est **positif.** a_1 est la nouvelle projection horizontale du point considéré.

2° Un point (c, c'), situé derrière le plan frontal dans le système xy, reste derrière ce plan et devient (c_1, c'). Sur la perpendiculaire $c'n$ à x_1y_1, on prend $nc_1 = mc$, car l'**éloignement** ne varie pas, et, puisque cet éloignement est **négatif**, on porte nc_1 **au-dessus** de x_1y_1.

3° **Réciproquement,** si l'on donne un point (b_1, b') dans le système x_1y_1, on obtient ses projections (b, b') dans le système xy en prenant $mb = nb_1$ et en portant cette distance **au-dessous** de xy, car l'éloignement est **positif.**

13. ***Effectuer un changement de plan horizontal pour une droite.***

Il suffit d'effectuer le changement de plan horizontal pour les deux points définissant la droite.

1° Soient ab, $a'b'$, les projections de la droite dans le système xy (fig. 13 a) et x_1y_1 la nouvelle ligne de terre.

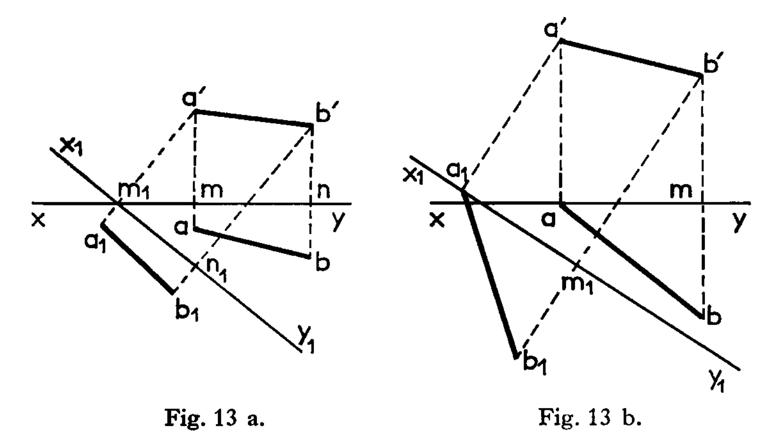


Fig. 13 a. Fig. 13 b.

Des points a', b', on abaisse des perpendiculaires sur x_1y_1 et l'on prend **au-dessous** de cette ligne les distances

$$m_1a_1 = ma, \qquad n_1b_1 = nb.$$

a_1b_1 est la nouvelle projection horizontale de la droite.

2° Il est avantageux de choisir, pour l'un des points à projeter, le point d'éloignement nul. Exemple (a, a') (fig. 13 b).

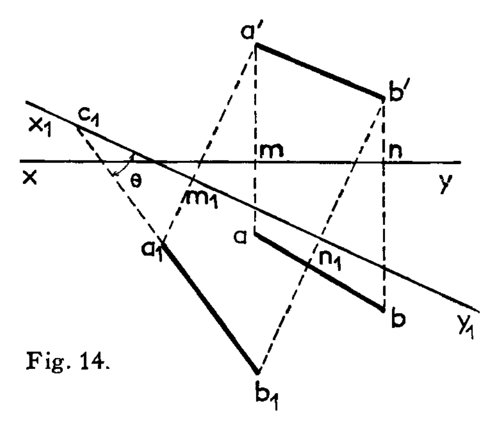


Fig. 14.

14. Applications.

Par un changement de plan horizontal :

Amener une droite à être parallèle au nouveau plan horizontal.

Soit (ab, $a'b'$) la droite donnée (fig. 14). Prenons x_1y_1 parallèle à $a'b'$ et déterminons la nouvelle projection horizontale a_1b_1 de la droite.

La droite (a_1b_1, $a'b'$) est horizontale dans le système x_1y_1. L'angle de a_1b_1 avec x_1y_1 donne l'angle θ que forme la droite avec le plan frontal.

a_1b_1 est la distance des points A et B.

15. *Effectuer le changement de plan horizontal pour un plan quelconque défini par ses traces.*

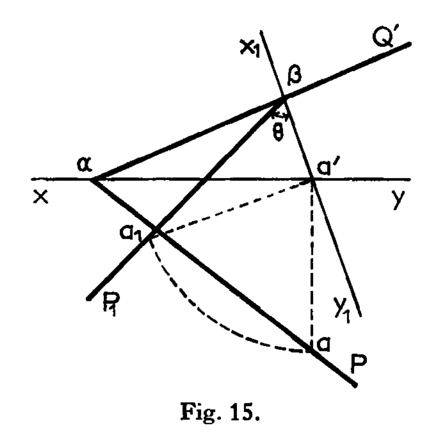


Fig. 15.

La trace frontale ne change pas ; la nouvelle trace horizontale est l'intersection du plan donné et du nouveau plan horizontal ; on en connaît un point, β, point de rencontre de x_1y_1 avec αQ' (fig. 15). Il suffit d'en trouver un second. Pour cela, on utilise, lorsque c'est possible, le point du plan donné qui se projette frontalement à l'intersection des deux lignes de terre.

Soient $P\alpha Q'$ le plan donné et x_1y_1 la nouvelle ligne de terre.

Le point $(a,\ a')$ a pour nouvelles projections $(a_1,\ a')$, $(a\,a_1 = a'a)$, et comme a' est sur x_1y_1, ce point appartient à la nouvelle trace horizontale du plan; donc βa_1 est la trace cherchée.

16. Application.

Par un changement de plan horizontal rendre un plan quelconque vertical.

Il suffit que la nouvelle ligne de terre soit perpendiculaire à la trace frontale du plan donné ou, en général, aux projections frontales des frontales du plan.

Soit $P\alpha Q'$ le plan donné (fig. 16). Prenons x_1y_1 perpendiculaire à $\alpha Q'$, et déterminons la nouvelle trace horizontale βP_1, en utilisant le point $(a,\ a')$ du plan qui se projette frontalement au point de concours des deux lignes de terre.

Le plan $P_1\beta Q'$ est vertical dans le système x_1y_1.

Remarque. — L'angle $P_1\beta y_1 = \theta$ est l'angle formé par le plan donné avec le plan frontal.

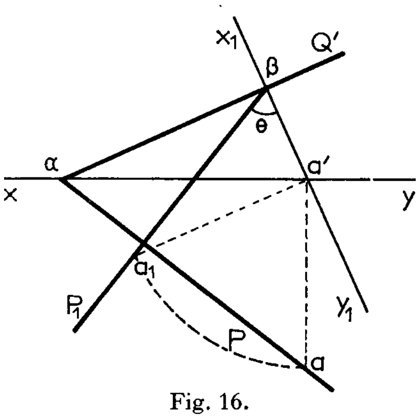


Fig. 16.

EXERCICES

Changements de plan.

148. Au moyen d'un changement de plan frontal :

1° Aligner les nouvelles projections frontales de trois points donnés ;
2° Amener en coïncidence, sur l'épure, les nouvelles traces d'un plan donné ;
3° Rendre parallèles les nouvelles projections frontales de deux droites données.

149. Au moyen d'un changement de plan horizontal :

1° Rendre de profil une droite donnée ;
2° Rendre une droite donnée parallèle au nouveau second bissecteur.

150. Par un double changement de plan :

1° Rendre de bout une droite donnée ;
2° Rendre horizontal un plan donné ;
3° Rendre horizontales deux droites données ;
4° Rendre de bout deux plans donnés.

151. Mener par un point A un plan perpendiculaire à une droite de profil.

152. Par un changement de plan frontal amener deux droites concourantes Δ_1 et Δ_2 à avoir même projection frontale.

153. Trouver la distance de deux plans parallèles.

154. Mener par un point A donné un plan α qui soit à une distance donnée l d'un plan donné β.

CHAPITRE 12

INTERSECTIONS DE DROITES ET DE PLANS

I. INTERSECTION DE DEUX PLANS

L'intersection de deux plans étant une droite, il suffit de déterminer deux points de cette intersection, ou bien un point et la direction de la droite.

1. Cas particulier.

L'un des plans est perpendiculaire à l'un des plans de projection.

Intersection d'un plan vertical avec un plan quelconque.

Soit RβS′ le plan vertical donné. L'intersection des deux plans aura sa projection horizontale sur la trace horizontale Rβ de ce plan, et nous sommes ramenés à trouver la projection frontale d'une droite d'un plan, connaissant sa projection horizontale Rβ (chapitre 10, n° 15).

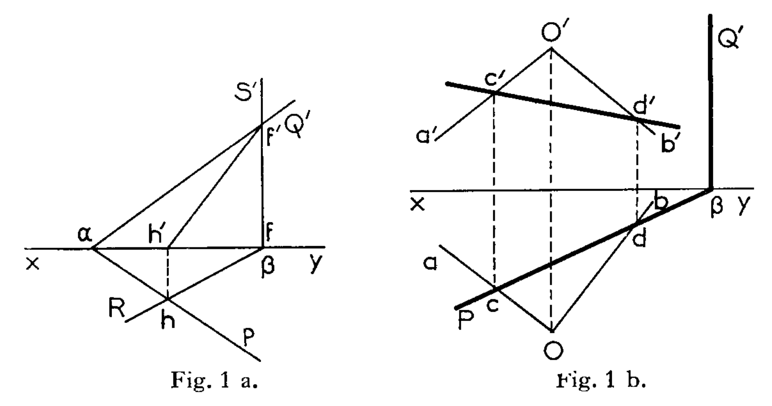


Fig. 1 a. Fig. 1 b.

Si le second plan PαQ′ est donné par ses traces (fig. 1 a), on obtient la droite (hf, $h'f'$). En effet, on connaît la trace horizontale h de l'intersection, ainsi que la projection horizontale f de sa trace

frontale ; il suffit de rappeler ces points respectivement en h' sur xy, et en f' sur $\alpha Q'$.

Si le second plan est donné par deux droites concourantes (fig. 1 b), on obtient la droite $(cd, c'd')$. En effet, $P\beta$ rencontre oa et ob aux points c et d, dont les projections frontales respectives sont c' sur $o'a'$ et d' sur $o'b'$.

2. Cas général.

Les deux plans sont quelconques.

Méthode générale. — ***Soient P et Q deux plans quelconques. Pour déterminer leur intersection, on coupe ces deux plans par un plan auxiliaire R, et l'on cherche les intersections CD, EF, de ce plan auxiliaire avec chacun des plans donnés. Le point G, commun aux deux droites, appartient à l'intersection cherchée. Un second plan auxiliaire donne un nouveau point de l'intersection.***

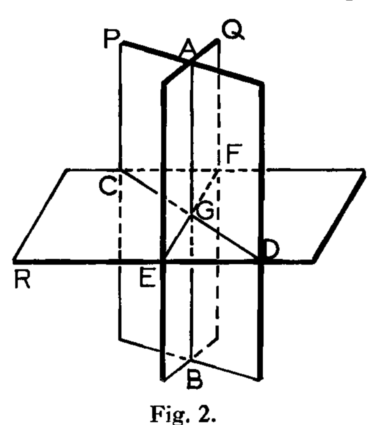


Fig. 2.

Lorsque le plan auxiliaire peut être choisi arbitrairement, ***on prend le plan qui donne lieu aux constructions les plus simples.***

Comme plans auxiliaires, on emploie souvent :

1° Les plans de projection ;

2° Un plan vertical ou un plan de bout ;

3° Un plan horizontal ou un plan de front ;

4° Le second bissecteur ;

5° On peut employer aussi un plan de profil, quoique celui-ci exige toujours un rabattement.

3. *Déterminer l'intersection de deux plans donnés par leurs traces.*

Soient les plans $P\alpha Q'$ et $R\beta S'$, donnés par leurs traces (fig. 3). Prenons d'abord le plan horizontal pour plan auxiliaire. Le

point de concours *h* des traces horizontales αP et βR est commun aux trois plans; donc il appartient à l'intersection cherchée; sa projection frontale *h'* est sur *xy*.

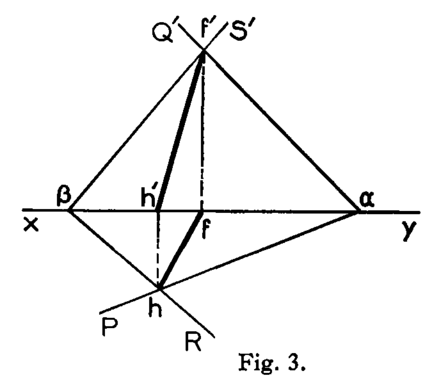


Fig. 3.

Prenons, en second lieu, le plan frontal pour plan auxiliaire. Le point de concours *f'* des traces frontales αQ' et βS' est commun aux trois plans ; donc il appartient à l'intersection cherchée; la projection horizontale est *f* sur *xy*.

La droite (*hf*, *h'f'*) est l'intersection demandée.

4. *Chaque plan est donné par deux droites concourantes ou parallèles.*

Soient deux plans dont l'un est donné par les parallèles EF, DG, et l'autre par les droites concourantes AB, AC. Coupons ces

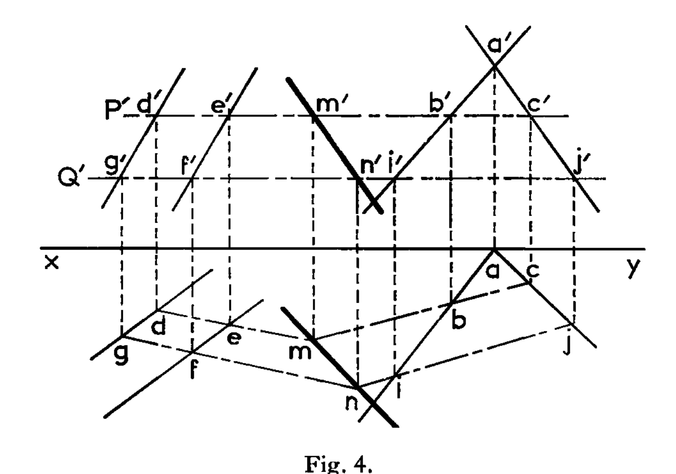


Fig. 4.

plans par un plan horizontal P'; chacun d'eux est rencontré suivant une horizontale DE ou BC : les projections horizontales *de*, *bc*, se

rencontrent en *m*, qui fait connaître *m'* ; ainsi M est un des points de l'intersection . Un second plan horizontal Q' donne un nouveau point N de la droite demandée (*mn*, *m'n'*) (fig. 4).

5. ***Les traces des deux plans donnés ne se coupent pas dans les limites de l'épure.***

Soient PαQ' et RβS' les plans donnés (fig. 5).

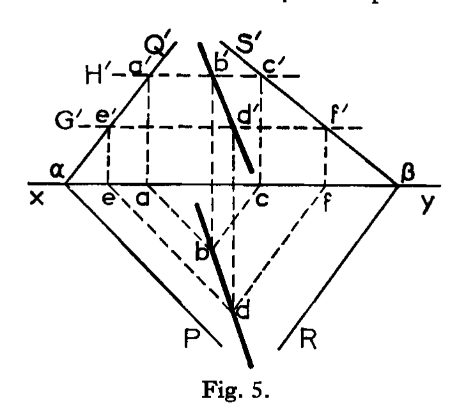


Fig. 5.

Prenons deux plans auxiliaires horizontaux.

Le plan H' coupe le plan PαQ' suivant l'horizontale (*ab*, *a'b'*), et le plan RβS' suivant l'horizontale (*cb*, *c'b'*) ; donc le point (*b*, *b'*) appartient à l'intersection des plans donnés.

Un second plan horizontal donne le point (*d*, *d'*) ; par suite, (*bd*, *b'd'*) est l'intersection cherchée.

6. ***Les deux plans donnés sont parallèles à la ligne de terre.***

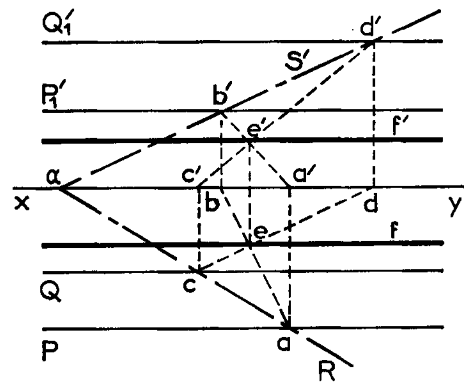


Fig. 6.

Les plans étant parallèles à *xy*, leur intersection est aussi parallèle à cette droite ; il suffit d'en déterminer un point.

Prenons comme plan auxiliaire un plan quelconque RαS' (fig. 6).

Le plan P, P'_1, est coupé suivant la droite AB, et le plan Q, Q'_1 suivant CD.

Le point (e, e'), commun à ces deux droites, appartient à l'intersection cherchée. Il faut mener ef, $e'f'$ parallèles à xy.

Remarques. — *a)* Si les droites obtenues, AB et CD, se trouvent parallèles, c'est que les plans P et Q sont eux-mêmes parallèles.

b) Les constructions sont plus simples lorsqu'on fait choix d'un plan auxiliaire perpendiculaire à l'un des plans de projection.

II. INTERSECTION D'UNE DROITE ET D'UN PLAN

7. Soit à déterminer l'intersection de la droite AB avec le plan P.

Méthode générale. — ***Par la droite, on fait passer un plan Q ; on cherche l'intersection CD des deux plans : le point E, commun à cette intersection et à la droite donnée, est le point cherché.***

Remarque. — Le point d'intersection d'une droite et d'un plan est nommé parfois **trace** de la droite sur le plan.

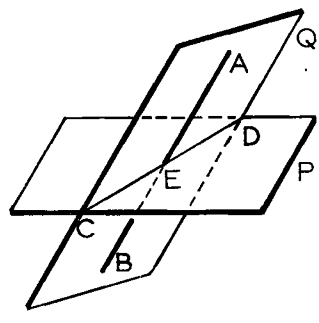


Fig. 7.

8. ***Déterminer le point ou une droite rencontre un plan.***

1° Le plan est donné par ses traces.

Soient (ab, $a'b'$) et PαQ' la droite et le plan donnés.

Comme plan auxiliaire, prenons le plan vertical hff' qui projette horizontalement la droite (fig. 8).

Le plan projetant hff' coupe PαQ' suivant (hf, $h'f'$). Cette dernière ligne rencontre la droite (ab, $a'b'$) au point (d, d') ; donc (d, d') est le point cherché.

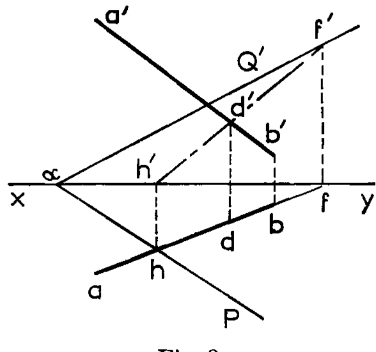


Fig. 8.

9. **2° Le plan est donné par deux droites concourantes.**

Soit à déterminer le point de rencontre de la droite (*de*, *d'e'*) avec le plan défini par les deux droites concourantes (*ab*, *a'b'*) et (*ac*, *a'c'*) (fig. 9).

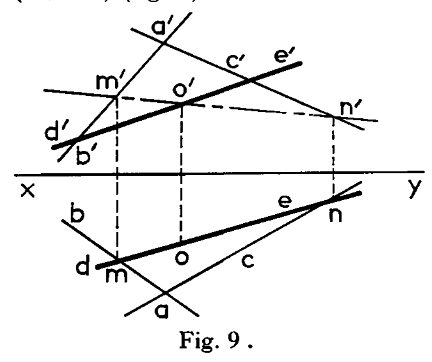


Fig. 9.

Le plan vertical *de*, projetant horizontalement la droite, rencontre le plan donné suivant une droite qui a pour projection horizontale *mn*.

Des lignes de rappel menées par *m* et *n* déterminent *m'* et *n'* : ainsi le plan projetant coupe le plan donné suivant (*mn*, *m'n'*). Mais les deux droites (*de*, *d'e'*) et (*mn*, *m'n'*), situées dans un même plan vertical, se coupent en (*o*, *o'*).

Donc (*o*, *o'*) est le point de rencontre cherché.

10. **Cas particulier.**

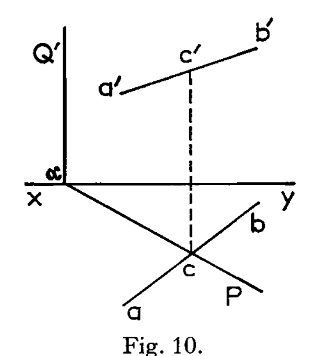


Fig. 10.

Le plan est perpendiculaire à l'un des plans de projection.

Soit à déterminer l'intersection de la droite (*ab*, *a'b'*) avec le **plan** vertical PαQ' (fig. 10). Le point d'intersection cherché doit avoir sa projection horizontale sur la trace horizontale αP du plan et sur la projection horizontale *ab* de la droite. Elle est donc en *c*, intersection de αP et de *ab*. Une ligne de rappel détermine *c'* sur *a'b'*, et le point (*c*, *c'*) est le point demandé.

EXERCICES

Intersection des droites et des plans.

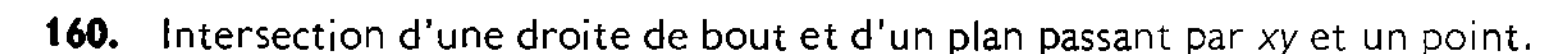
155. Intersection de deux plans qui ont leurs traces de noms contraires confondues (PαQ′, RαS′).

156. Intersection de deux plans dont les traces de même nom se confondent.

157. Intersection d'un plan de profil et d'un plan passant par xy et un point A.

158. Intersection d'un plan parallèle à xy et d'un plan donné par sa ligne de plus grande pente.

159. Intersection d'une droite de profil et d'un plan passant par xy et un point.



160. Intersection d'une droite de bout et d'un plan passant par xy et un point.

161. Intersection d'une droite de profil avec :

a) le second bissecteur,
b) le premier bissecteur,
c) un plan à traces confondues.

162. Intersection d'une droite à projections confondues avec :

a) un plan passant par xy et un point,
b) un plan parallèle à xy,
c) un plan à traces confondues.

163. Trouver, sans recourir aux traces du plan, le point où une droite donnée rencontre un plan donné par une de ses lignes de pente.

164. Déterminer le point où une droite rencontre le plan d'un triangle donné par les projections de ses côtés.

165. Intersection d'une horizontale et d'un plan déterminé par la ligne de pente et un point. (Bacc. Paris).

166. Par un point du second bissecteur, mener une droite rencontrant une droite quelconque et une droite du plan horizontal.

167. Mener par un point donné une droite parallèle à un plan donné et s'appuyant sur une droite donnée :

1° La droite est verticale, le plan est quelconque ;
2° Le plan est donné par ses traces, la droite est dans le second bissecteur.

CHAPITRE 13

POSITIONS RELATIVES DES DROITES ET DES PLANS

I. DROITES ET PLANS PARALLÈLES

1. Théorèmes rappelés.

1° ***Les projections de deux droites parallèles sur un plan quelconque sont parallèles.***

2° ***Pour que deux droites soient parallèles, il faut et il suffit que leurs projections de même nom soient parallèles.***

3° ***Pour qu'une droite soit parallèle à un plan, il faut et il suffit qu'elle soit parallèle à une droite de ce plan.***

4° ***Sur un plan quelconque de projection, les traces de deux plans parallèles sont parallèles ;*** car les intersections de deux plans parallèles par un troisième sont parallèles.

5° ***Pour que deux plans soient parallèles, il faut et il suffit que l'un d'eux contienne deux droites concourantes, respectivement parallèles à deux droites situées dans l'autre plan.***

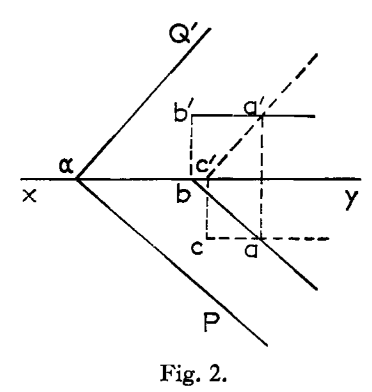


Fig. 2.

2. ***Par un point donné, mener une horizontale parallèle à un plan donné.***

Il suffit de mener par le point donné une parallèle à la trace horizontale du plan.

Soient (a, a') et $P\alpha Q'$ le point et le plan donnés.

Il faut mener ab parallèle à αP et $a'b'$ parallèle à xy.

Remarque. — De même, unefrontale (ac, $a'c'$) est parallèle au plan PαQ$'$ lorsque $a'c'$ est parallèle à αQ$'$ et ac parallèle à xy.

3. ***Par un point donné, mener un plan parallèle à un plan donné.***

1o **Le plan est défini par ses traces.**

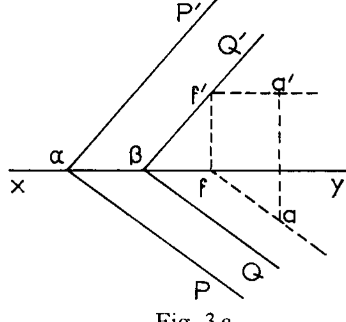


Fig. 3 a.

Le plan à construire doit avoir ses traces respectivement parallèles aux traces de même nom du plan donné ; il suffit donc d'obtenir un point de l'une des traces cherchées; pour cela, on peut employer une horizontale du plan demandé.

Soient (a, a'), PαP$'$, le point et le plan donnés.

Par le point (a, a'), menons l'horizontale (af, $a'f'$) parallèle au plan, puis $f'\beta$ parallèle à αP$'$ et βQ parallèle à αP.

Si l'on n'a pas besoin de connaître les traces du plan, on se borne à mener par (a, a') une horizontale et une frontale du plan cherché.

Ces droites sont respectivement parallèles aux horizontales et aux frontales du plan donné.

Remarque. — On emploierait, d'une manière analogue, une frontale ou une droite quelconque parallèle au plan.

2o **Le plan est donné par deux droites concourantes.**

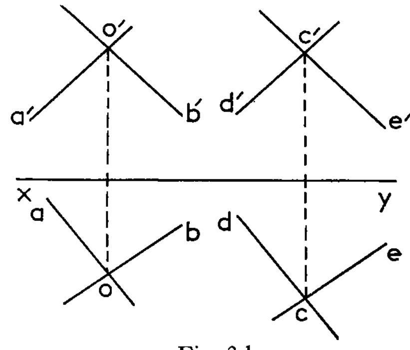


Fig. 3 b.

Soient un point (c, c') et un plan défini par deux droites concourantes (oa, $o'a'$) et (ob, $o'b'$) (fig. 3 b).

Par le point (c, c'), menons d'abord (cd, $c'd'$) parallèle à (oa, $o'a'$), puis (ce, $c'e'$) parallèle à (ob, $o'b'$).

Le plan déterminé par les droites (ce, $c'e'$) et (cd, $c'd'$) est parallèle au plan donné, car il contient deux droites concourantes respectivement parallèles à deux droites du premier plan.

II. APPLICATIONS

4. ***Par un point donné, mener une droite parallèle à un plan donné et rencontrant une droite donnée.***

Solution géométrique. — Par le point A, on mène un plan R parallèle au plan donné P ; on détermine le point de rencontre E de la droite donnée BC avec le plan R, et l'on joint le point A au point E.

La droite AE, contenue dans un plan R parallèle au plan P, est elle-même parallèle à ce plan. De plus, elle rencontre BC au point E.

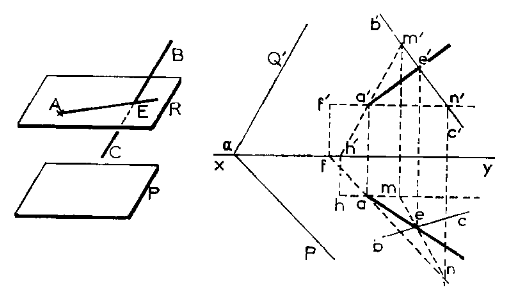


Fig. 4 a. Fig. 4 b.

Épure. — Soient PαQ', (bc, $b'c'$) et (a, a'), le plan, la droite et le point donnés (fig. 4 b).

Par le point (a, a'), menons une horizontale (af, $a'f'$) et une frontale (ah, $a'h'$), respectivement parallèles à (αP, xy) et (xy, αQ').

Ces deux droites déterminent un plan parallèle au plan PαQ'.

A l'aide du plan projetant frontalement la droite donnée, déterminons le point (e, e') où (bc, $b'c'$) perce ce plan.

La droite (ae, $a'e'$) est la droite demandée.

Autrement dit, la droite cherchée est l'intersection du plan R et du plan déterminé par le point A et la droite BC.

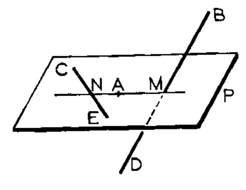


Fig. 5 a.

5. ***Par un point donné, mener une droite qui en rencontre deux autres non situées dans un même plan.***

Solution géométrique. — Par le point A et l'une des droites, CE, par exemple, on fait passer un plan P ; on cherche le point M où la seconde droite BD perce ce plan ; on joint le point M au point A.

AM est la droite demandée.

En effet, cette droite AM, située dans un même plan avec la première CE, la rencontrera ou lui sera parallèle.

Épure. — Soient (*bd*, *b'd'*), (*ce*, *c'e'*) et (*a*, *a'*) les droites et le point donnés (fig. 5 b). Par le point (*a*, *a'*) et la droite (*ce*, *c'e'*) faisons passer un plan ; il suffit de mener par le point (*a*, *a'*) une parallèle (*af*, *a'f'*) à (*ce*, *c'e'*).

Pour trouver le point où (*bd*, *b'd'*) perce ce plan, on peut employer le plan de bout *b'd'* qui projette frontalement la droite. Il coupe le plan considéré suivant (*cf*, *c'f'*) ; or *cf* et ***bd*** se rencontrant en *m*, une ligne de rappel fait connaître ***m'*** ; on trace ***amn*** et ***a'm'n'***. La droite (***mn***, *m'n'*) répond à la question.

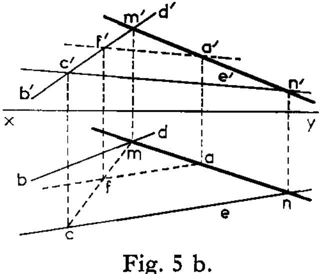


Fig. 5 b.

Vérification. — Les points ***n*** et *n'* doivent se trouver sur une même ligne de rappel.

III. DROITES ET PLANS PERPENDICULAIRES

6. Théorèmes rappelés.

1° ***Une droite est perpendiculaire à un plan, quand elle est perpendiculaire à toutes les droites de ce plan. (Il suffit d'ailleurs qu'elle soit perpendiculaire à deux droites concourantes du plan).***

2° ***La condition nécessaire et suffisante pour qu'un angle droit se projette sur un plan suivant un angle droit est qu'un de ses côtés soit parallèle au plan ou dans ce plan et que l'autre côté ne lui soit pas perpendiculaire.***

7. Conséquence importante.

Une droite perpendiculaire à un plan est perpendiculaire à toute droite de ce plan, et particulièrement aux horizontales et aux frontales de ce plan ; elle est donc perpendiculaire aux traces du plan, et l'angle droit, ayant un de ses côtés parallèle au plan de projection considéré, se projette en vraie grandeur sur ce plan.

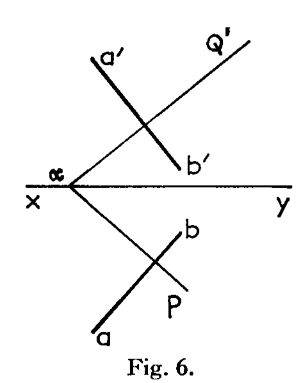


Fig. 6.

Donc, si la droite (*ab*, *a'b'*) est perpendiculaire au plan PαQ', sa projection

horizontale *ab* sera perpendiculaire à la trace horizontale αP, et sa projection frontale $a'b'$ sera perpendiculaire à la trace frontale αQ'.

Réciproquement :

Soit (ab, $a'b'$) une droite dont les projections sont respectivement perpendiculaires aux traces correspondantes du plan PαQ' (fig. 6).

La droite AB de l'espace et la trace αP ont leurs projections horizontales *ab* et αP rectangulaires, par hypothèse, et l'une d'elles, αP, est située dans le plan de projection ; donc AB est perpendiculaire à αP.

De même, la droite AB est perpendiculaire à αQ'.

Donc la droite AB, perpendiculaire à deux droites *non parallèles* αP *et* αQ' du plan PαQ', est perpendiculaire à ce plan.

Théorème. — ***Pour qu'une droite, définie par ses projections, soit perpendiculaire à un plan non parallèle à la ligne de terre, il faut et il suffit que sa projection horizontale soit perpendiculaire à la trace horizontale du plan et que sa projection frontale soit perpendiculaire à la trace frontale du plan.***

Remarques. 1° Dans ce théorème, on peut remplacer la trace horizontale par **la projection horizontale d'une horizontale du plan**, et la trace frontale par **la projection frontale d'une frontale de ce plan.**

2° Cette condition nécessaire *ou* suffisante est en défaut si le plan est parallèle à la ligne de terre (plan de front, ou de bout, ou traces parallèles à xy).

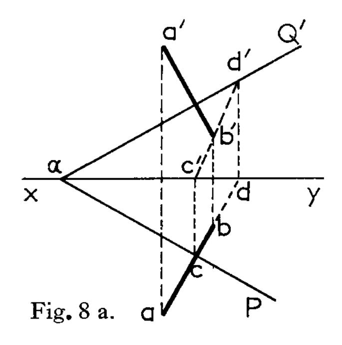


Fig. 8 a.

8. ***Par un point donné, mener une perpendiculaire à unplan et déterminer le pied de cette perpendiculaire.***

Méthode générale. — ***De chacune des projections du point, on abaisse une perpendiculaire sur la trace correspondante du plan.***

Si l'on ne connaît pas les traces du plan, on cherche leurs directions en déterminant une horizontale et une frontale de ce plan.

1° **Le plan est donné par ses traces.** — Soient (*a*, *a'*) et PαQ' le point et le plan donnés (fig. 8 a).

Abaissons de *a* la perpendiculaire *ab* sur αP, et de *a'* la perpendiculaire *a'b'* sur αQ'.

La droite (*ab*, *a'b'*) est la perpendiculaire demandée.

Le pied de la perpendiculaire est le point de rencontre de cette droite avec le plan. Pour le trouver, prenons pour plan auxiliaire le plan projetant horizontalement la droite. Ce plan coupe le plan donné suivant la droite (*cd*, *c'd'*) ; les deux droites (*cd*, *c'd'*) et (*ab*, *a'b'*) se rencontrent au point (*b*, *b'*), qui est le pied de la perpendiculaire.

2° **Le plan est donné par deux droites concourantes.**

Soit à mener du point (*p*, *p'*) une perpendiculaire au plan défini par les deux droites (*oa*, *o'a'*) et (*ob*, *o'b'*) (fig. 8 b).

On commence par déterminer une horizontale (*ce*, *c'e'*) et une frontale (*cf*, *c'f'*) de ce plan.

Puis de *p*, on abaisse la perpendiculaire *pq* sur *ce*, et de *p'*, la perpendiculaire *p'q'* sur *c'f'*. (*pq*, *p'q'*) est la perpendiculaire cherchée.

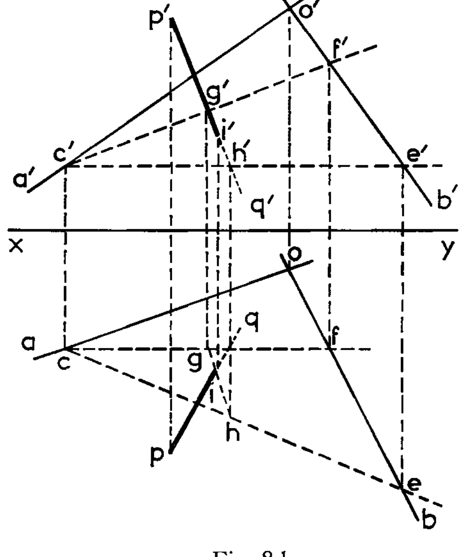


Fig. 8 b.

Pour obtenir le pied de cette perpendiculaire, remarquons que l'horizontale et la frontale du plan menées par le point (*c*, *c'*) définissent le plan de la même manière que les droites concourantes données.

9. *Par un point donné, mener une perpendiculaire à une droite donnée.*

Solution géométrique. — Par le point donné O (fig. 9 a), on mène le plan P perpendiculaire à la droite AB : ce plan est le lieu

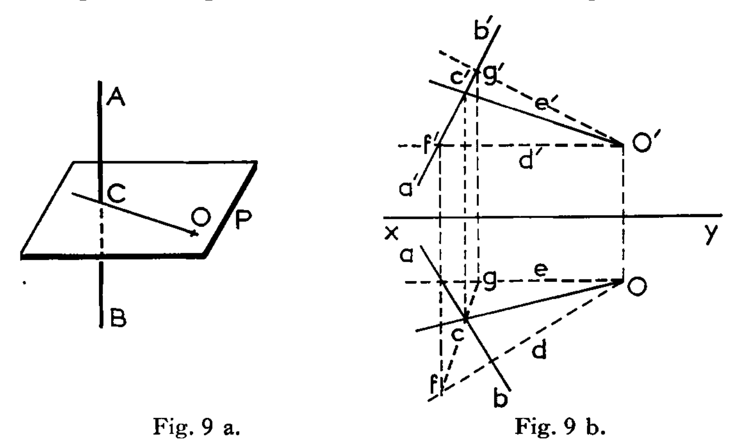


Fig. 9 a. Fig. 9 b.

des droites orthogonales à la droite donnée ; on cherche le point C où cette droite rencontre le plan, et on joint le point O au point C.

OC est la perpendiculaire demandée.

En effet, AB, perpendiculaire au plan P, est perpendiculaire à OC qui passe par son pied dans le plan, et réciproquement OC est perpendiculaire à AB.

Épure. — Par le point (o, o') (fig. 9 b), menons une horizontale $(od, o'd')$ et une frontale $(oe, o'e')$ perpendiculaires à la droite donnée, c'est-à-dire od perpendiculaire à ab et $o'e'$ perpendiculaire à $a'b'$.

Le plan de ces deux droites est lui-même perpendiculaire à la droite $(ab, a'b')$.

Cette dernière droite perce le plan au point (c, c'), et la droite $(oc, o'c')$ est la perpendiculaire cherchée.

IV. PERPENDICULAIRE COMMUNE A DEUX DROITES

Soient deux droites (D) et (Δ) *non situées dans un même plan.* Nous cherchons s'il existe des droites rencontrant (D) et (Δ) et

leur étant perpendiculaires. Une telle droite, si elle existe, est dite **perpendiculaire commune** à (D) et (Δ).

10. Les deux droites sont horizontales.

Choisissons un **plan horizontal parallèle aux droites (D) et (Δ)** qui sont alors des **horizontales.**

Les projections frontales d' et δ' sont donc parallèles à la ligne de terre xy ; les projections horizontales d et δ sont concourantes (sinon (D) et (Δ) seraient parallèles) (fig. 10).

Une perpendiculaire commune est une **verticale** dont la projection horizontale est un point appartenant nécessairement à d et δ.

C'est donc la verticale $(ij, i'j')$ du point d'intersection de d et δ. Elle est unique.

Théorème. — ***Deux droites non situées dans un même plan admettent une perpendiculaire commune et une seule.***

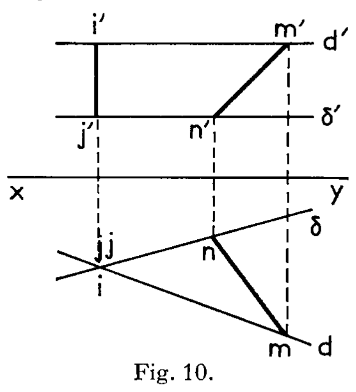


Fig. 10.

11. Plus courte distance de deux droites.

La perpendiculaire commune **IJ se projette en vraie grandeur en i'j'** (fig. 12). Soit M un point de D distinct de I et N un point de (Δ) distinct de J [I est sur (D) et J sur (Δ)].

- MN n'étant pas verticale, $m'n'$ est une oblique par rapport à δ' et d', donc : $m'n' > i'j' = \text{IJ}$.
- $m'n'$ étant la projection de MN, on a : $\text{MN} \geqslant m'n'$ (l'égalité ayant lieu si MN est frontale).

Par suite : $\text{MN} \geqslant m'n' > i'j' = \text{IJ}$.

Théorème. — ***La plus courte distance de deux droites est la distance des pieds de leur perpendiculaire commune.***

12. Une des droites est verticale.

Choisissons un plan horizontal perpendiculaire à (D) qui est alors **verticale.** (Δ) est quelconque (fig. 12).

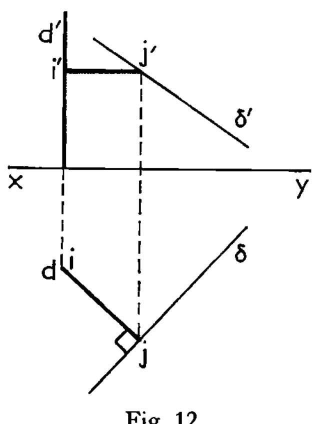


Fig. 12.

S'il existe une perpendiculaire commune, sa projection horizontale passe par le point d. Cette perpendiculaire commune est une **horizontale** perpendiculaire à Δ. Par suite sa projection horizontale est perpendiculaire à δ. Elle est donc unique, c'est la droite dj perpendiculaire à δ. j se rappelle en j' sur δ', l'horizontale de (j, j') rencontrant (D) est la droite $(ij, i'j')$. (i confondu avec d).

$(ij, i'j')$ est perpendiculaire commune et elle est unique.

13. Problème.

Résolvons encore un problème de Géométrie dans l'espace en utilisant la Géométrie descriptive.

Soient deux axes de l'espace Δ et Δ_1 l'angle de leurs directions positives étant égal à 60° et OO_1 leur perpendiculaire commune (O sur Δ, O_1 sur Δ_1). On désigne par I le point de OO_1 tel que $\overline{OI} = -2\overline{O_1I}$. On pose $OO_1 = 3a$ (a longueur donnée). Deux points M et M_1 décrivent respectivement Δ et Δ_1 de manière que l'on ait : $\overline{OM} = 2\overline{O_1M_1} = 2x$.

1° Montrer que MM_1 est perpendiculaire à Δ_1.

2° Le plan H perpendiculaire en I à OO_1 coupe MM_1 en J. Ensemble des points J. (Bacc.)

Épure. Choisissons le plan horizontal perpendiculaire à OO_1 en O_1 et le plan (Δ, OO_1) comme plan frontal. La droite Δ_1 se projette frontalement en δ'_1 sur la ligne de terre, la droite OO_1 est verticale dans le plan frontal, Δ est une horizontale du plan frontal de cote $3a$, donc δ est confondue avec δ'_1 sur la ligne de terre. Les points (m, m') de (δ, δ') et (m_1, m'_1) de (δ_1, δ'_1) sont tels que : $\overline{o'm'} = \overline{OM} = 2x$, $\overline{o_1m_1} = \overline{O_1M_1} = x$.

1° Le triangle o_1m_1m est demi-équilatéral. L'angle droit (δ_1, m_1m) est la projection horizontale de l'angle (Δ_1, M_1M). Δ_1 étant dans le plan horizontal, l'angle (Δ_1, M_1M) se projette en vraie grandeur en (δ_1, m_1m). Il est lui-même droit.

2° Le point i, projection horizontale de I, est confondu avec o_1, o'_1, o. Sa projection frontale i' est telle que : $\overline{o'i'} = \overline{OI} = 2\overline{i'o'_1} = 2\overline{IO_1}$.

Le plan H est horizontal, sa trace frontale h' passe par i'.

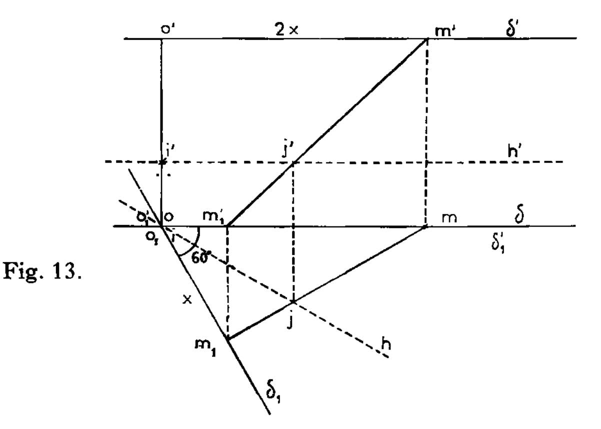


Fig. 13.

Le point j', projection frontale de J, est l'intersection de h' et $m'm'_1$
La ligne de rappel de j' donne j sur mm_1.

L'épure donne immédiatement les relations suivantes :

$$\frac{\overline{m_1 j}}{\overline{jm}} = \frac{\overline{m'_1 j'}}{\overline{j'm'}} = \frac{\overline{oi'}}{\overline{i'o'}} = \frac{1}{2}.$$

m_1m ayant une direction fixe, la relation $\frac{\overline{m_1 j}}{\overline{jm}} = \frac{1}{2}$ montre que la droite oj est fixe. Soit h cette droite.

Le point (j, j') appartient à la droite fixe (h, h').

Réciproquement, soit (j, j') un point de la droite (h, h'). Le plan mené par (j, j') perpendiculairement à (δ_1, δ'_1) coupe cette droite en (m_1, m'_1) et la droite (δ, δ') en (m, m'). La droite m'_1m' coupe la droite h' en un point ω' tel que : $\frac{\overline{oi'}}{\overline{i'o'}} = \frac{\overline{m'_1\omega'}}{\overline{\omega'm'}} = \frac{1}{2} = \frac{\overline{m_1 j}}{\overline{jm}}$.

$j\omega'$ est donc parallèle à mm', ω' est confondu avec j'. Tout point (j, j') de la droite (h, h') appartient donc au plan H et à une droite MN telle que $OM = 2\overline{O_1M_1} = 2x$.

L'ensemble des points (j, j') est donc la droite (h, h').

EXERCICES

Droites et plans parallèles.

168. Par un point donné, mener une droite parallèle à une droite de profil.

169. Mener une droite Δ parallèle à Δ_1 et s'appuyant sur deux droites Δ_2 et Δ_3, avec les hypothèses suivantes :

a) Δ_1 quelconque, Δ_2 et Δ_3 horizontales ;

b) Δ_1 horizontale, Δ_2 et Δ_3 quelconques ;
c) Δ_1 est quelconque, Δ_2 est horizontale, Δ_3 est de profil.

170. Par un point donné, mener une droite qui rencontre la ligne de terre et une seconde droite indiquée ci-après :

1° Droite quelconque ;
2° Horizontale ou frontale ;
3° Droite de profil.

171. Par un point donné, mener une droite parallèle à un plan donné et rencontrant une droite donnée :

1° Le plan et la droite sont quelconques ;
2° Le plan passe par la ligne de terre et un point, la droite est de profil, et elle est donnée par ses traces.

172. Par un point donné, mener un plan parallèle à un autre plan donné α, lorsque :

1° Les traces de α sont parallèles à xy ;
2° Les traces de α sont en ligne droite ;
3° Le plan α est déterminé par deux droites concourantes.

173. Par un point donné, mener un plan parallèle à un plan donné par une de ses lignes de pente.

Droites et plans perpendiculaires.

174. Trouver sur une droite Δ un point A équidistant de deux points donnés B et C :

a) Δ est confondu avec xy ;
b) Δ est une frontale ;
c) Δ est une verticale ;
d) Δ est de profil.

175. Mener d'un point A une perpendiculaire à une droite Δ de profil.

176. Mener dans un plan P et par un point A de ce plan une droite Δ orthogonale à une droite donnée Δ_1.

177. Mener par un point A une droite Δ orthogonale à une droite Δ_1 et s'appuyant sur une droite Δ_2 :

a) Δ_1 et Δ_2 étant quelconques ;
b) Δ_1 étant horizontale et Δ_2 de profil.

178. Par un point dont les projections coïncident, mener un plan perpendiculaire à une droite dont les projections coïncident.

179. Par un point donné, mener un plan perpendiculaire à une droite de profil.

180. Par la droite qui aurait pour projections les traces d'un plan donné, construire un plan perpendiculaire au premier et déterminer l'intersection des deux plans.

Géométrie dans l'espace.

181. Soient Δ et Δ_1 deux droites orthogonales de l'espace et AA_1 leur perpendiculaire commune (A sur Δ, A_1 sur Δ_1). Deux plans perpendiculaires passant par Δ_1 coupent Δ en M et N. B est un point fixe sur Δ_1.

1° Construire l'épure, le plan horizontal étant perpendiculaire en A à AA_1 et le plan frontal étant parallèle à Δ.

2° Déterminer le centre O de la sphère S passant par A_1BMN. Ensemble des points O quand les plans perpendiculaires passant par Δ_1 varient.

3° Trouver la position de O qui correspond au rayon minimal.

182. Deux carrés ABCD et ABEF, de côtés a, sont situés dans deux plans perpendiculaires.

1° Faire l'épure en prenant le plan ABCD comme plan horizontal et le plan ABEF comme plan frontal. Résoudre les questions suivantes en utilisant cette épure.

2° Déterminer la vraie longueur du segment DE et calculer sa longueur. Montrer que DE est orthogonale aux droites AC et BF.

3° Mener par D la parallèle à AC ; soit A_1 le point où elle rencontre la droite AB. Mener par E la parallèle à FB ; soit B_1 le point où elle rencontre AB. Montrer que $AA_1 = AB = BB_1$ et que $A_1D = B_1E$. Quelle est la perpendiculaire commune aux droites A_1D et B_1E ?

4° I est un point de la demi-droite A_1D d'origine A_1 et J est un point de la demi-droite B_1E d'origine B_1. Ces points sont tels que $A_1I = B_1J = x$. Calculer IJ^2 en fonction de a et x. Valeur de x pour que IJ soit minimal.

183. Soit un carré ABEF de côté 5 cm. Sur les perpendiculaires au plan de ce carré en A et B, on porte les segments AD = BC = 5 cm d'un même côté du plan du carré.

Soient M un point du segment BE et P un point du segment DC tels que $BM = DP = x$.

1° Faire l'épure de la figure en prenant le plan du carré comme plan horizontal et comme plan frontal le plan ADBC. Résoudre les questions suivantes en utilisant cette épure.

2° Démontrer que PM est orthogonale à BF. Déterminer la perpendiculaire commune à BC et PM.

3° Ensemble des milieux du segment MP quand M décrit EB.

4° Soit α l'angle de la droite MP avec le plan BEF. Calculer tg α en fonction de x

184. Soit un trapèze ABCD rectangle en A et D, de bases $AB = 2a$, $CD = a$ et dont le côté $AD = 3a$. Un point M décrit le segment AD. Sur la perpendiculaire en M au plan ABCD on prend un point S tel que AM = MS.

1° Le trapèze étant dans le plan horizontal, le plan frontal étant parallèle au plan AMS, construire l'épure.

2° Ensemble des points S.

3° Ensemble des centres de gravité du triangle SBC.

185. 1° Soit un tétraèdre *régulier* ABCD. Le plan ABC étant horizontal et l'arête AB étant de bout, déterminer l'épure du sommet D.

2° Montrer que les arêtes opposées sont orthogonales.

3° Montrer que la perpendiculaire commune aux arêtes opposées passe par les milieux de ces arêtes.

4° Montrer que ces perpendiculaires communes sont concourantes en leurs milieux situés sur les hauteurs du tétraèdre et que ce point commun est situé, sur chaque hauteur, aux trois quarts à partir des sommets.

TROISIÈME PARTIE

Géométrie orientée
Transformations

CHAPITRE 14

ARCS ET ANGLES ORIENTÉS

I. ARCS ORIENTÉS

1. Cercle orienté.

Un cercle orienté est un cercle sur lequel on a choisi un sens positif de parcours ; le sens opposé est le sens négatif.

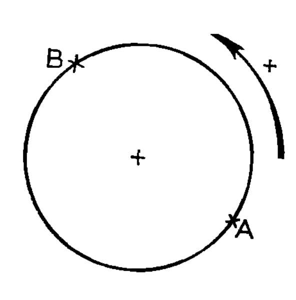


Fig. 1.

(On choisit habituellement pour sens positif le sens inverse du mouvement des aiguilles d'une montre.) Un cercle orienté s'appelle un **cycle.**

Arcs orientés. Soit M un mobile décrivant un cercle toujours dans le même sens et partant d'un point A pour s'arrêter en un point B. Il peut s'arrêter en B à son premier passage ou après avoir parcouru le cercle une, deux ..., *n* fois.

L'arc ainsi décrit est un arc orienté.

Il a pour origine le point A, pour extrémité le point B.

Il existe donc une infinité d'arcs de même origine A et de même extrémité B.

Tous ces arcs (dits arcs généralisés) sont représentés par le symbole

$$\overset{\curvearrowright}{AB}.$$

La mesure algébrique de cet arc $\overset{\curvearrowright}{AB}$ est un nombre relatif dont la valeur absolue est la mesure de l'arc $\overset{\curvearrowright}{AB}$ mesurée avec une unité convenablement choisie, affecté du signe + ou du signe — suivant le sens du parcours de A vers B.

La mesure algébrique de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ se représente par le symbole $\overline{AB}$ ou $\overset{\frown}{AB}$.

2. Relations entre les arcs de même origine et de même extrémité.

Supposons que le mobile aille de A en B dans le sens positif et s'arrête en B à son premier passage ; soit α la mesure exprimée en radians de l'arc ainsi parcouru. Tout autre arc $\overset{\frown}{AB}$ parcouru dans le sens positif s'obtiendra en ajoutant à l'arc α un arc de mesure $k.2\pi$ où k est un entier positif ($k \in$ N).

La mesure algébrique de ces arcs est donnée par

$$\alpha + 2k\pi.$$

Si l'arc $\overset{\frown}{AB}$ est décrit dans le sens négatif, avec arrêt au premier passage, sa mesure algébrique sera

$$-(2\pi - \alpha) \text{ ou } -2\pi + \alpha ;$$

les autres arcs décrits dans le sens négatif s'obtiendront en ajoutant au précédent $k.2\pi$ où k est un entier négatif. Ils seront donc de la forme

$$\alpha + 2k\pi.$$

Les arcs $\overset{\frown}{AB}$ ont donc pour mesure algébrique

$$\overset{\frown}{AB} = 2k\pi + \alpha, \qquad (k \in \mathrm{Z}).$$

Si on donne à k une valeur déterminée, on obtient une **détermination** de l'ensemble des arcs $\overset{\frown}{AB}$.

Soient a_1 et a_2 deux déterminations quelconques de l'ensemble des arcs $\overset{\frown}{AB}$ et α le plus petit arc positif $\overset{\frown}{AB}$. On a :

$$a_1 = \alpha + 2k_1\pi \qquad (k_1 \in \mathrm{Z})$$
$$a_2 = \alpha + 2k_2\pi \qquad (k_2 \in \mathrm{Z})$$

d'où

$$a_1 = a_2 + 2(k_1 - k_2)\pi \qquad (k_1 - k_2 \in \mathrm{Z}).$$

Donc : ***Tous les arcs $\overset{\frown}{AB}$ ont pour mesure algébrique***

$$a + 2k\pi$$

où a est une détermination quelconque de l'ensemble des arcs $\overset{\frown}{AB}$ et k un entier relatif.

On écrit :

$$\overset{\frown}{AB} = a + 2k\pi \quad \text{ou} \quad \overset{\frown}{AB} \equiv a \qquad (\text{mod. } 2\pi)$$

(lire : arc orienté $\overset{\frown}{AB}$ congru à a modulo 2π).

La relation $a_1 \equiv a_2$ (mod. 2π) est une **relation d'équivalence** car :

- $a_1 \equiv a_1$ (mod. 2π), puisque $a_1 = a_1 + 0 \times 2\pi$;
- $a_1 \equiv a_2$ (mod. 2π) $\Rightarrow$ $a_2 \equiv a_1$ (mod. 2π).
  En effet : $a_1 = a_2 + 2k\pi \Rightarrow a_2 = a_1 - 2k\pi$;
- $a_1 \equiv a_2$ et $a_2 \equiv a_3$ (mod. 2π) $\Rightarrow$ $a_1 \equiv a_3$ (mod. 2π).
  En effet :

$$\left.\begin{array}{r} a_1 = a_2 + 2k_1\pi \\ \text{et } a_2 = a_3 + 2k_2\pi \end{array}\right\} \Rightarrow a_1 = a_3 + 2(k_1 + k_2)\pi.$$

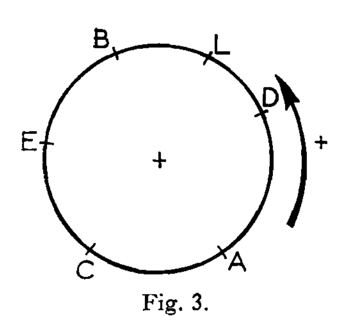


Fig. 3.

3. Relation de Chasles.

Soient sur un cercle orienté, différents arcs consécutifs $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$ ... $\overset{\frown}{EL}$, c'est-à-dire tels que l'origine de l'un coïncide avec l'extrémité du précédent.

Si un mobile M parcourt, *toujours dans le même sens*, et successivement les arcs $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, ... $\overset{\frown}{EL}$, $\overset{\frown}{LA}$, il aura parcouru un nombre entier de circonférences quand il reviendra en A et on peut écrire :

$$\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD} + \dots + \overset{\frown}{EL} + \overset{\frown}{LA} = 2k\pi$$

$$\text{ou} \quad \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD} + \dots + \overset{\frown}{EL} = 2k\pi - \overset{\frown}{LA}$$

$$\boldsymbol{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD} + \dots + \overset{\frown}{EL} = 2k\pi + \overset{\frown}{AL}}.$$

C'est la relation de Chasles pour les arcs.

Remarque. Si l'unité d'arc est le degré ou le grade, on doit écrire :

$$\overset{\frown}{AB} = a + k.360^{\circ}$$

$$\text{ou} \quad \overset{\frown}{AB} = a + k.400 \text{ gr.}$$

II. ANGLES ORIENTÉS DANS LE PLAN

4. Plan orienté.

Un plan est orienté si, un cercle étant donné dans ce plan, l'orientation de ce cercle est déterminée. Cette orientation est valable pour tous les cercles du plan.

5. Angle de deux demi-droites.

Soient Ox et Oy deux demi-droites d'un plan orienté et Oz une demi-droite de ce plan pivotant autour de O *en tournant toujours dans le même sens.*

On appelle angle des deux demi-droites Ox et Oy, l'un quelconque des angles balayés par Oz pour l'amener du côté origine Ox sur le côté extrémité Oy.

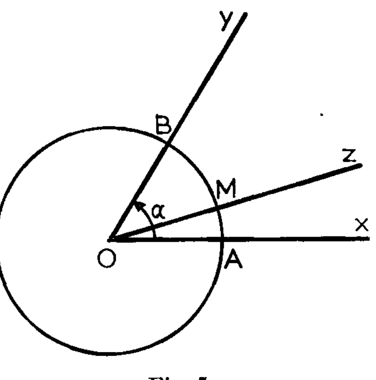


Fig. 5.

Il y a donc une infinité de tels angles.

La mesure algébrique de ces angles qui se note : $(\vec{Ox}, \vec{Oy})$ est un nombre relatif qui a pour valeur absolue la mesure de l'angle balayé par Oz affectée du signe + ou du signe — suivant que la demi-droite Oz tourne dans le sens positif ou négatif.

Soit un cercle de centre O qui coupe respectivement Ox, Oy et Oz en A, B et M. Lorsque Oz balaye l'angle $(\vec{Ox}, \vec{Oy})$, M décrit l'arc $\overset{\frown}{AB}$. En unités correspondantes, les angles $(\vec{Ox}, \vec{Oy})$ et les arcs $\overset{\frown}{AB}$ ont même mesure. On peut donc appliquer aux angles $(\vec{Ox}, \vec{Oy})$ les relations concernant les arcs.

En particulier :

• Si α est l'un quelconque des angles $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy})$, tous les autres angles sont liés par la relation :

$$(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy}) = \alpha + 2k\pi \qquad (k \in Z)$$

qu'on écrit aussi : $$(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy}) \equiv \alpha \qquad (\text{mod. } 2\pi)$$

Chaque valeur de k définit une **détermination** de l'angle $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy})$. La détermination principale de l'angle $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy})$ est celle qui est comprise entre $-\pi$ et $+\pi$.

• Entre les angles de plusieurs demi-droites Ox, Oy, Oz, Ou, existe la relation dite relation de Chasles :

$$(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy}) + (\overrightarrow{Oy}, \overrightarrow{Oz}) + (\overrightarrow{Oz}, \overrightarrow{Ou}) = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Ou}) + 2k\pi.$$

Remarque. Si α est la détermination principale de $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy})$, celle de $(\overrightarrow{Oy}, \overrightarrow{Ox})$ est $-\alpha$ et $(\overrightarrow{Oy}, \overrightarrow{Ox}) = -(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy}) + 2k\pi$.

6. Angle de deux axes.

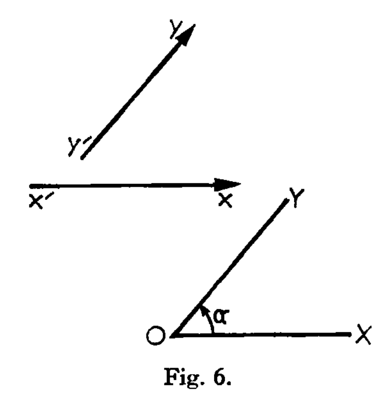


Fig. 6.

Soient, dans un plan orienté, deux axes $x'x$ et $y'y$. Par un point O menons les demi-droites OX et OY respectivement parallèles aux axes $x'x$ et $y'y$, et de même sens.

Par définition : ***On appelle angle des axes x'x et y'y, l'angle des demi-droites OX et OY.***

Cet angle d'axes se note : $(\overrightarrow{x'x}, \overrightarrow{y'y})$.

On a donc :

$$(\overrightarrow{x'x}, \overrightarrow{y'y}) = (\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY}).$$

Si α désigne la mesure en radians de l'un quelconque des angles $(\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY})$, on aura :

$$(\overrightarrow{x'x}, \overrightarrow{y'y}) \equiv \alpha \quad (\text{mod. } 2\pi)$$

7. Relation de Chasles.

Dans un plan orienté considérons les axes $x'x$, $y'y$, $z'z$, $u'u$ et menons par un point O les demi-droites OX, OY, OZ, OU respectivement parallèles aux axes $x'x$, $y'y$, $z'z$, $u'u$ et de même sens.

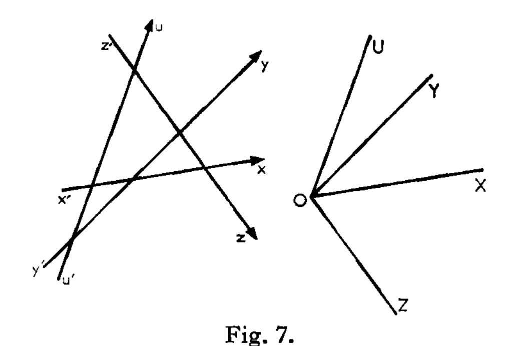


Fig. 7.

On a :

$$(\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY}) + (\overrightarrow{OY}, \overrightarrow{OZ}) + (\overrightarrow{OZ}, \overrightarrow{OU}) \equiv (\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OU}) \pmod{2\pi}$$

soit :

$$(\overrightarrow{x'x}, \overrightarrow{y'y}) + (\overrightarrow{y'y}, \overrightarrow{z'z}) + (\overrightarrow{z'z}, \overrightarrow{u'u}) \equiv (\overrightarrow{x'x}, \overrightarrow{u'u}) \pmod{2\pi}$$

C'est la **relation de Chasles** pour les angles d'axes.

8. Angle de deux vecteurs.

Soient $\overrightarrow{V}$ et $\overrightarrow{V'}$ deux vecteurs, $x'x$ et $y'y$ les axes qui les portent orientés dans le sens de ces vecteurs.

On appelle angle des deux vecteurs $\overrightarrow{V}$ et $\overrightarrow{V'}$, l'angle des deux axes $x'x$ et $y'y$.

On désigne cet angle par la notation

$$(\overrightarrow{V}, \overrightarrow{V'}).$$

$$(\overrightarrow{x'x}, \overrightarrow{y'y}) = (\overrightarrow{V}, \overrightarrow{V'}).$$

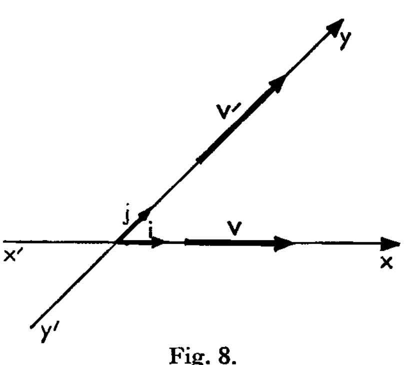


Fig. 8.

Remarque. L'angle de deux axes est égal à l'angle de leurs vecteurs unitaires.
$$(\overrightarrow{x'x}, \overrightarrow{y'y}) = (\vec{i}, \vec{j}).$$

9. Angle de deux droites ou de deux directions.

Soient (D) et (D') deux droites concourant en un point O et (OΔ) une demi-droite mobile autour du point O.

L'angle des deux droites (D) et (D') (ou des deux directions (D) et (D') est l'un quelconque des angles balayés par la demi-droite (OΔ) tournant toujours dans le même sens autour du point O en partant de (D) pour s'arrêter en (D').

La mesure de cet angle est un nombre relatif dont la valeur absolue égale la mesure de l'angle ainsi balayé avec une unité convenablement choisie et dont le signe est + ou — suivant que la demi-droite (OΔ) tourne dans le sens positif ou dans le sens négatif.

On le désigne par (D, D').

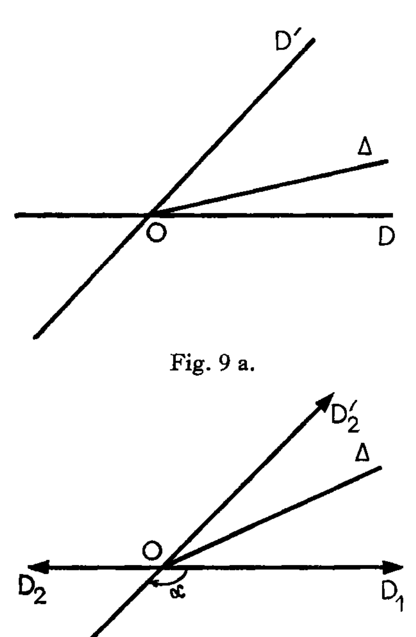


Fig. 9 a.

Fig. 9 b.

On peut choisir arbitrairement un sens positif sur (D) ; soit $\overrightarrow{D_1}$ l'axe ainsi obtenu.

On peut prendre ensuite sur (D') l'un ou l'autre des sens positifs D'_1 ou D'_2.

(D, D') sera l'un quelconque des angles $(\overrightarrow{D_1}, \overrightarrow{D'_1})$ ou $(\overrightarrow{D_1}, \overrightarrow{D'_2})$.

Soit α l'un quelconque des angles $(\overrightarrow{D_1}, \overrightarrow{D'_1})$.

On aura
$$(\overrightarrow{D_1}, \overrightarrow{D'_1}) = \alpha + 2k\pi,$$

et $$(\overrightarrow{D_1}, \overrightarrow{D'_2}) = (\overrightarrow{D_1}, \overrightarrow{D'_1}) + (\overrightarrow{D'_1}, \overrightarrow{D'_2}) + 2k'\pi$$
$$= \alpha + \pi + 2k'\pi$$
$$= \alpha + (2k' + 1)\pi.$$

Ces deux formes peuvent se résumer en la forme unique :

$$\boldsymbol{(D, D') = \alpha + k\pi.} \qquad (k \in Z)$$

ou $$\boldsymbol{(D, D') \equiv \alpha} \qquad (\text{mod. } \pi)$$

Remarques. — *a)* L'angle de deux axes (ou demi-droites) ou de deux vecteurs est défini à $2k\pi$ près, l'angle de deux droites à $k\pi$ près.

b) L'angle de deux droites ne dépend pas du sens adopté sur ces droites ; on a donc

$$(MA, MB) = (AM, MB) = (AM, BM) = (MA, BM).$$

c) $$(MA, MB) = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) + k\pi.$$

d) Trois points A, B, C sont alignés si l'on a

$$(BA, BC) = k\pi.$$

e) $(D, D') = \alpha + k\pi \Rightarrow (D', D) = -\alpha + k\pi.$

10. Relation de Chasles.

Soient, dans un plan orienté, trois droites D, D′, D″. On a :

$$(D, D') = (\vec{D}, \overrightarrow{D'}) + k\pi \qquad (k \in Z)$$

$$(D', D'') = (\overrightarrow{D'}, \overrightarrow{D''}) + h\pi \qquad (h \in Z)$$

Additionnons membre à membre :

$$(D, D') + (D', D'') = (\vec{D}, \overrightarrow{D'}) + (\overrightarrow{D'}, \overrightarrow{D''}) + (k + h)\pi$$

soit :

$$(D, D') + (D', D'') = (\overrightarrow{D}, \overrightarrow{D''}) + (k + h).\pi$$

Or $$(D, D'') = (\vec{D}, \overrightarrow{D''}) + m\pi \qquad (m \in Z)$$

Donc : $\mathbf{(D, D') + (D', D'') \equiv (D, D'')}$ (mod. π)

C'est la formule de **Chasles** pour les angles de droites.

11. Angle polaire d'un axe.

Pour fixer la position d'un axe dans un plan, on fait choix d'un axe particulier appelé axe polaire. Soit $x'x$ cet axe.

L'angle d'un axe quelconque $y'y$ avec l'axe polaire est appelé angle polaire de cet axe :

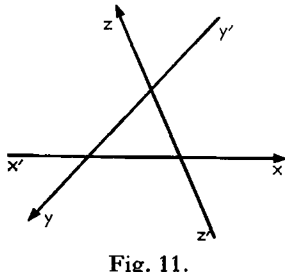


Fig. 11.

$$(\overrightarrow{x'x}, \overrightarrow{y'y}).$$

Soient $y'y$ et $z'z$ deux axes et

$$(\overrightarrow{x'x}, \overrightarrow{y'y}) = \alpha,$$
$$(\overrightarrow{x'x}, \overrightarrow{z'z}) = \beta.$$

On peut écrire :

$$(\overrightarrow{y'y}, \overrightarrow{z'z}) = (\overrightarrow{y'y}, \overrightarrow{x'x}) + (\overrightarrow{x'x}, \overrightarrow{z'z}) + 2k\pi\ ;$$

or $$(\overrightarrow{y'y}, \overrightarrow{x'x}) = -(\overrightarrow{x'x}, \overrightarrow{y'y}) = -\alpha\ ;$$

d'où $$(\overrightarrow{y'y}, \overrightarrow{z'z}) = \beta - \alpha + 2k\pi.$$

La mesure algébrique de l'angle de deux axes est égale à l'angle polaire de l'axe extrémité diminué de l'angle polaire de l'axe origine.

12. Angle polaire d'une droite ou d'une direction.

Soit (D) une droite, $x'x$ un axe polaire.

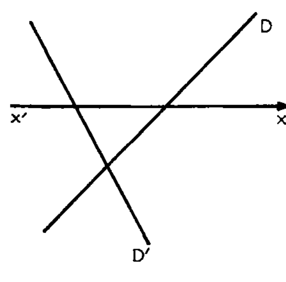


Fig. 12.

L'angle polaire de la droite (D) est l'un quelconque des angles ($x'x$, D).

Il est défini à $k\pi$ près.

Soient deux droites D et D' d'angles polaires α et β respectivement. On a : $(D, D') = (D, x'x) + (x'x, D') + k\pi$.

Soit :

$$\boldsymbol{(D, D') = \beta - \alpha + k\pi.}$$

L'angle de deux droites (D, D') est égal à l'angle polaire de la droite D' diminué de l'angle polaire de la droite D.

III. APPLICATIONS

13. Bissectrice de l'angle de deux axes.

La bissectrice de l'angle de deux axes Oy et Oz est un axe Ou, tel que

$$(\overrightarrow{Oy}, \overrightarrow{Ou}) = (\overrightarrow{Ou}, \overrightarrow{Oz}). \qquad (1)$$

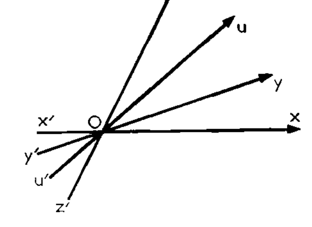


Fig. 13.

Soient $x'x$ un axe polaire

et $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy}) = \alpha$,

$(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oz}) = \beta$,

les angles polaires des deux axes Oy et Oz

et $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Ou}) = \theta$

l'angle polaire de la bissectrice.

L'égalité (1) peut s'écrire : $\theta - \alpha = \beta - \theta + 2k\pi$,

ou $$\theta = \frac{\alpha + \beta}{2} + k\pi.$$

Si k est pair on obtient un axe Ou d'angle polaire $\frac{\alpha + \beta}{2}$ (mod. 2π) et si k est impair on obtient l'axe Ou' opposé au précédent.

Il existe donc **une** droite $u'u$ bissectrice de l'angle d'axes $(\overrightarrow{Oy}, \overrightarrow{Oz})$.

Remarque. Si on choisit Oy comme axe polaire, la bissectrice $u'u$ sera définie par la relation :

$$(Oy, Ou) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{Oy}, \overrightarrow{Oz}) + k\pi.$$

14. Bissectrice de l'angle de deux droites ou de deux directions.

Soient (D) et (D') deux droites (ou deux directions).

La bissectrice de l'angle de ces deux droites, est une droite (Δ) telle que

$$(D, \Delta) = (\Delta, D').$$

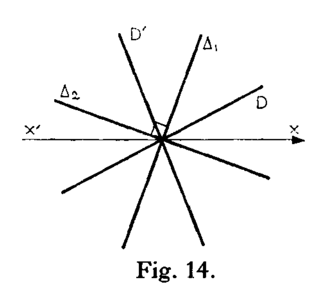


Fig. 14.

Si $x'x$ est l'axe polaire, α, β et θ les angles polaires de (D), (D') et (Δ), on aura :

$$\begin{aligned}(D, \Delta) &= (D, Ox) + (Ox, \Delta)\\ &= (\Delta, Ox) + (Ox, D') + k\pi,\end{aligned}$$

ou $$-\alpha + \theta = -\theta + \beta + k\pi,$$

ou $$\theta = \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{k\pi}{2}$$

qui définit deux directions rectangulaires (Δ_1) et (Δ_2) suivant que l'on donne à k une valeur paire ou impaire.

L'angle de deux droites (ou de deux directions) admet deux bissectrices rectangulaires.

Remarque. Si l'axe polaire $x'x$ et la droite (D) coïncident, les deux bissectrices seront définies par la relation :

$$(D, \Delta) = \frac{1}{2}(D, D') + k\frac{\pi}{2}.$$

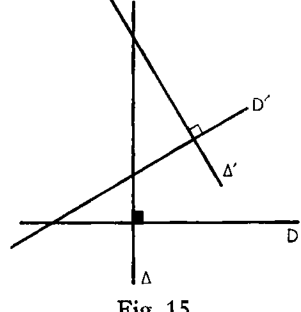


Fig. 15.

15. Angles de droites à côtés respectivement perpendiculaires.

Soient deux angles de droites (D, D') et (Δ, Δ') tels que D et D' sont respectivement perpendiculaires à Δ et Δ'.

On a :

$$(D, \Delta) \equiv (D', \Delta') \equiv \frac{\pi}{2} \quad (\text{mod. } \pi)$$

D'autre part :

$$(D, D') \equiv (D, \Delta) + (\Delta, \Delta') + (\Delta', D') \quad (\text{mod. } \pi)$$

ou $$(D, D') \equiv (\Delta, \Delta') \quad (\text{mod. } \pi)$$

Deux angles de droites à côtés respectivement perpendiculaires sont égaux modulo π.

16. Points sur un cercle.

Sur un cercle de centre O, soient deux points fixes A et B et un point variable M. Désignons respectivement par $u'u$ et $v'v$ les bissectrices des angles

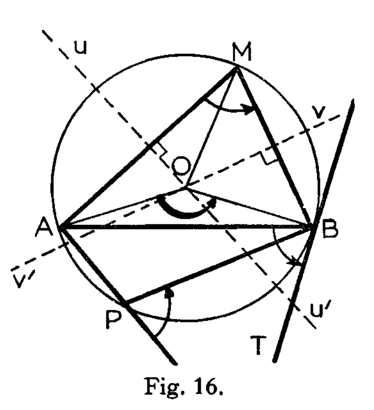


Fig. 16.

$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$ et $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OB})$. On a :

$$(Ou, OM) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) + k'\pi$$

$$(OM, Ov) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OB}) + k''\pi$$

(Remarque n° 13).

En ajoutant membre à membre, il vient :

$$(Ou, Ov) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) + k_1\pi.$$

Or $(Ou, Ov) = (MA, MB) + m\pi$ (n° 15)

Donc : $$\boldsymbol{(MA, MB) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) + k\pi.}$$

Si M décrit le cercle de centre O, l'angle de droites (MA, MB) est constant et égal à la moitié de l'angle d'axes $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.

Cas limite. Si M tend vers B (par exemple), MB tend vers la tangente BT et la relation précédente devient :

$$(BA, BT) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) + k\pi.$$

Donc : $$\boldsymbol{(BA, BT) = (MA, MB) + k\pi.}$$

17. Points cocycliques.

Soit P un autre point du cercle. On a :

$$(BA, BT) = (PA, PB) + k\pi$$

Donc : $$(MA, MB) \equiv (PA, PB) \quad (\text{mod. } \pi)$$

Réciproquement : soient quatre points A, B, M, P non alignés tels que :

$$(MA, MB) \equiv (PA, PB) \qquad (\text{mod. } \pi).$$

Considérons le cercle passant par M, B et A. La tangente BT en B est définie par :

$$(BA, BT) \equiv (MA, MB) \qquad (\text{mod. } \pi).$$

Considérons le cercle passant par P, B et A. La tangente BT′ en B est définie par :

$$(BA, BT') \equiv (PA, PB) \qquad (\text{mod. } \pi).$$

Donc $$(BA, BT) \equiv (BA, BT') \qquad (\text{mod. } \pi).$$

Par suite, les deux tangentes BT et BT′ sont confondues ainsi que les deux cercles. Les quatre points A, B, M, P sont sur un même cercle (sont cocycliques).

Théorème. — ***Une condition nécessaire et suffisante pour que quatre points non alignés A, B, M, P soient sur un même cercle est :***

$$(MA, MB) \equiv (PA, PB) \qquad (\text{mod. } \pi).$$

18. Ensemble des points M tels que (MA, MB) = $\alpha + k\pi$.

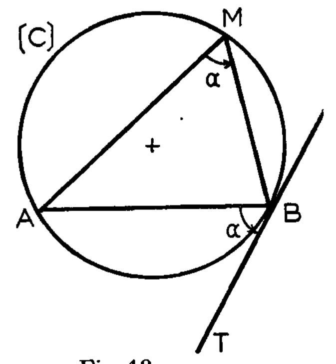


Fig. 18.

A et B étant deux points fixes, cherchons l'ensemble des points M du plan tels que l'angle (MA, MB) soit égal à un angle donné α.

1er *cas* — Si $\alpha = k\pi$, ($k \in Z$), l'ensemble des points M est la droite AB, sauf les points A et B car les droites MA ou MB ne sont plus définies.

2me *cas.*
(MA, MB) $= \alpha + k\pi$ ($\alpha \neq k'\pi$).

Soit M un point tel que (MA, MB) $= \alpha + k\pi$. Les points A, B, M ne sont pas alignés puisque $\alpha \neq k'\pi$, donc il existe un cercle (C) passant par A, B et M. La tangente BT en B est définie par :

$$(BA, BT) = \alpha$$

elle est donc fixe ainsi que le cercle (C).

Donc tout point M tel que (MA, MB) $= \alpha + k\pi$ est sur le cercle fixe (C).

Réciproquement, tout point M du cercle (C) est tel que : (MA, MB) $\equiv$ (BA, BT) $\equiv \alpha$(mod. π).

Théorème. — ***Les points A et B étant fixes, l'ensemble des points M tels que (MA, MB) = $\alpha + k\pi$, α étant un angle constant différent de $k'\pi$, est un cercle passant par A et B.***

La tangente BT en B est définie par :

$$(BA, BT) \equiv \alpha \quad (\text{mod. } \pi)$$

Le centre, situé sur la médiatrice de AB et sur la perpendiculaire en B à BT, est tel que :

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 2(MA, MB) = 2\alpha + 2k\pi.$$

On peut appeler ce cercle : **cercle capable** de l'angle de droites α, relatif à A et B.

19. Ensemble des points M tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \alpha + 2k\pi$.

1er *Cas.* — **Si $\alpha = 0$** (mod. 2π), les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ ont même support et même sens. L'ensemble des points M est formé des portions de la droite illimitée AB qui sont extérieures au segment AB (A et B exclus car la direction de MA ou MB n'est plus définie).

2e *Cas.* — **Si $\alpha = \pi$** (mod. 2π), les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ ont même support mais sont de sens contraires.

L'ensemble des points M est le segment AB (A et B exclus).

3e *Cas.* — **$\alpha \neq k'\pi$.**

On a : $$(MA, MB) = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) + K'\pi$$

ou $$(MA, MB) = \alpha + K\pi.$$

Par suite, tout point M tel que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \alpha + 2k\pi$, appartient au cercle ensemble des points tels que (MA, MB) $= \alpha + K\pi$.

Soit TT′ la tangente en B à ce **cercle orientée de telle sorte que** $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BT}) = \alpha + 2k\pi$.

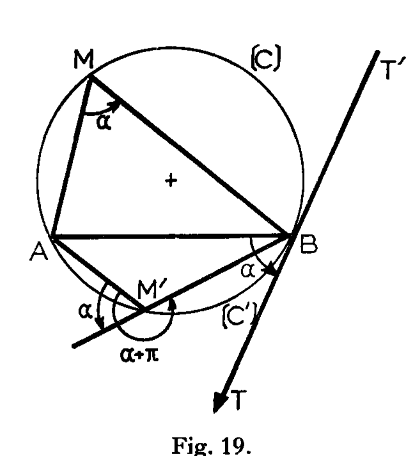


Fig. 19.

La droite AB divise le cercle en deux arcs (C) et (C′) tels que :

(C) et BT′, (C′) et BT sont de part et d'autre de AB.

Pour tout point M ∈ (C), on a : $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \alpha + 2k\pi$.

Pour tout point M′ ∈ (C′) on a :

$(\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'B}) = \alpha + \pi + 2k\pi$.

L'arc de cercle (C), ensemble des points M tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \alpha + 2k\pi$, et l'axe tangent $\overrightarrow{BT}$ défini par $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BT}) = \alpha + 2k\pi$ sont de part et d'autre de la droite AB.

Théorème. — ***Les points A et B étant fixes, l'ensemble des points M tels que*** $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \alpha + 2k\pi$, ***α étant un angle constant différent de*** $k'\pi$, ***est un*** **arc de cercle** ***passant par A et B.***

20. Droites antiparallèles.

Deux droites (D) et (D′) sont antiparallèles par rapport à deux droites (Δ) et (Δ′) si les angles **(D, D′) et (Δ, Δ′) ont mêmes directions de bissectrices.**

Soit (δ) une direction commune des bissectrices ; on peut écrire :

$$(D, \delta) = (\delta, D') + k_1\pi \qquad (1)$$

$$(\delta, \Delta) = (\Delta', \delta) + k_2\pi \qquad (2)$$

donc : $(D, \delta) + (\delta, \Delta) = (\Delta', \delta) + (\delta, D') + (k_1 + k_2)\pi \qquad (3)$

soit : $\boldsymbol{(D, \Delta) = (\Delta', D') + k\pi} \qquad (4)$

Réciproquement : La relation (4) entraîne (3) et si (δ) vérifie (2), elle vérifie (1). La relation (4) est donc une condition nécessaire et suffisante d'antiparallélisme.

Si les droites antiparallèles sont concourantes deux à deux en A, B, A′, B′, la relation (4) s'écrit :

$$(\mathrm{AB}, \mathrm{AA'}) = (\mathrm{B'B}, \mathrm{B'A'}) + k\pi$$

et les quatre points A, B, A′, B′ sont cocycliques.

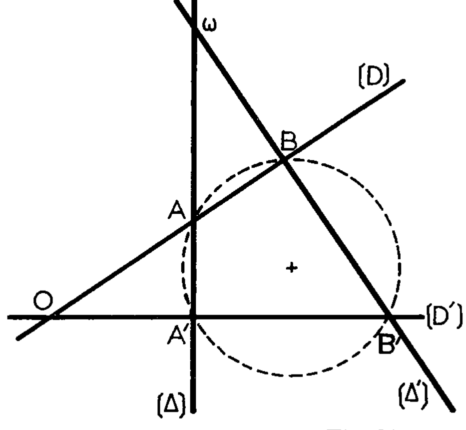


Fig. 20 a.

Théorème. — ***Une condition nécessaire et suffisante pour que deux couples de droites (D), (D′) et (Δ), (Δ′) se coupant en quatre points distincts, soient antiparallèles, est que les quatre points soient sur un même cercle.***

Cas particuliers.

1° Si (D) est parallèle à (D′), leur direction commune est celle de l'une des bissectrices de (Δ, Δ′). (fig. 20 b).

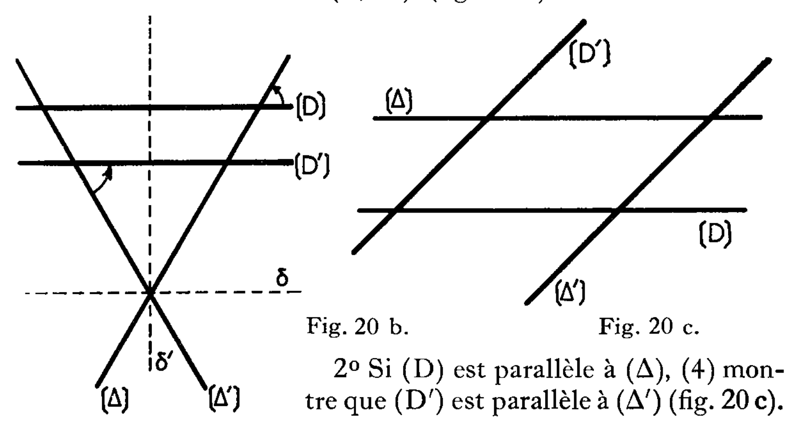


Fig. 20 b. Fig. 20 c.

2° Si (D) est parallèle à (Δ), (4) montre que (D′) est parallèle à (Δ′) (fig. 20 c).

3° Si deux des quatre points A, B, A′, B′ sont confondus, A et B par exemple (fig. 20 d), la relation (4) devient :

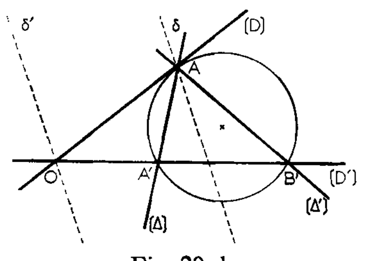


Fig. 20 d.

$(AO, AA') = (B'A, B'A') + k\pi$ qui exprime que (D) est tangente au cercle AA′B′.

La tangente au cercle circonscrit en un sommet d'un triangle et le côté opposé sont antiparallèles par rapport aux deux autres côtés.

4° Si les droites D, D′, Δ, Δ′ sont concourantes et forment deux couples de droites antiparallèles, ces couples sont dits **isogonaux** (fig. 20 e).

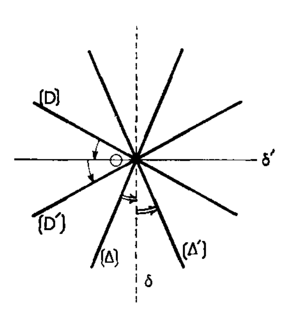


Fig. 20 e.

Le théorème précédent s'énoncera alors :

Une condition nécessaire et suffisante pour que deux couples de droites concourantes (D), (D′) et (Δ), (Δ′) soient isogonaux est :

$$(D, \Delta) = (\Delta', D') + k\pi.$$

21. Applications au triangle.

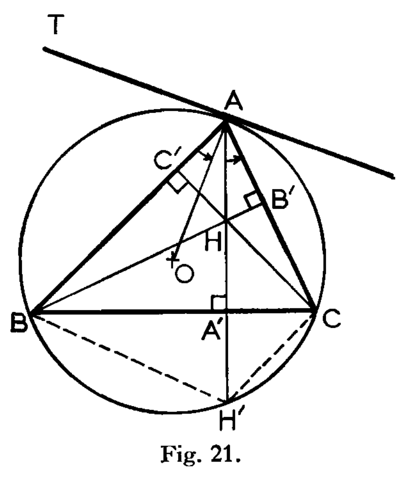


Fig. 21.

Soit un triangle ABC, O le centre de son cercle circonscrit, H son orthocentre.

1° **Les couples (AO, AH) et (AB, AC) sont isogonaux.**

Il faut montrer que

$$(AB, AO) = (AH, AC) + k\pi.$$

Soit AT la tangente en A. On a :

$$(AB, AO) \equiv (AB, AT) + (AT, AO) \pmod{\pi}$$

$$\equiv (AB, AT) + \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$$

$$(AH, AC) \equiv (AH, BC) + (CB, CA) \pmod{\pi}$$

$$(AH, AC) \equiv \frac{\pi}{2} + (CB, CA) \qquad (\text{mod. } \pi)$$

Or : $(AB, AT) \equiv (CB, CA) \qquad (\text{mod. } \pi)$

donc : $(AB, AO) \equiv (AH, AC) \qquad (\text{mod. } \pi)$

2° **Le symétrique de l'orthocentre par rapport à un côté est sur le cercle circonscrit au triangle.**

Par symétrie on a : $(HB, HC) \equiv -(H'B, H'C)$ (mod. π).

A, C', H, B' sont cocycliques, donc :

$$(HB', HC') \equiv (AB', AC') \qquad (\text{mod. } \pi).$$

ou $(HB, HC) \equiv (AC, AB) \qquad (\text{mod. } \pi).$

Donc :

$$-(H'B, H'C) \equiv (AC, AB) \qquad (\text{mod. } \pi).$$

Soit $(H'B, H'C) \equiv (AB, AC) \qquad (\text{mod. } \pi).$

Les points H', A, B, C sont donc cocycliques.

22. Droite de Simson.

Soient M un point *quelconque* du plan d'un triangle ABC, D, E, F les projections respectives de M sur les côtés BC, CA, AB. (M est distinct d'un sommet).

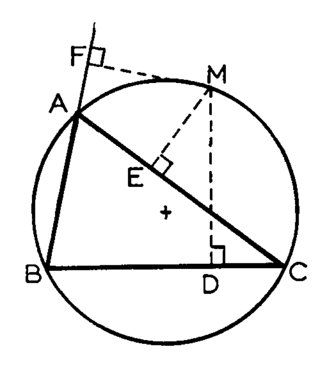


Fig. 22.

On a (mod. π) :

$$(EF, ED) \equiv (EF, EM) + (EM, ED) \qquad (1)$$

A, F, M, E étant cocycliques :

$$(EF, EM) \equiv (AF, AM) \equiv (AB, AM)$$

C, D, E, M étant cocycliques :

$$(EM, ED) \equiv (CM, CD) \equiv (CM, CB)$$

Quel que soit M, la relation (1) s'écrit :

$$(EF, ED) \equiv (AB, AM) + (CM, CB).$$

1° Les points E, F, D sont alignés si : $(EF, ED) \equiv 0$, donc

si : $(AB, AM) + (CM, CB) \equiv 0$

ou $(AB, AM) \equiv (CB, CM)$

Donc D, E, F sont alignés si M est sur le cercle circonscrit au triangle ABC.

2° Si M est un point du cercle circonscrit :
(AB, AM) ≡ (CB, CM). Donc :
(AB, AM) + (CM, CB) ≡ (EF, ED) ≡ 0.
Les points D, E, F sont alignés.

Théorème. — ***Une condition nécessaire et suffisante pour que les projections d'un point d'un plan sur les côtés d'un triangle de ce plan soient alignées est que ce point soit sur le cercle circonscrit au triangle.***

La droite EFD est dite **droite de Simson** relative au point M correspondant. Si M est en un des sommets, la droite de Simson est la hauteur issue de ce sommet.

23. Projection orthogonale d'un vecteur.

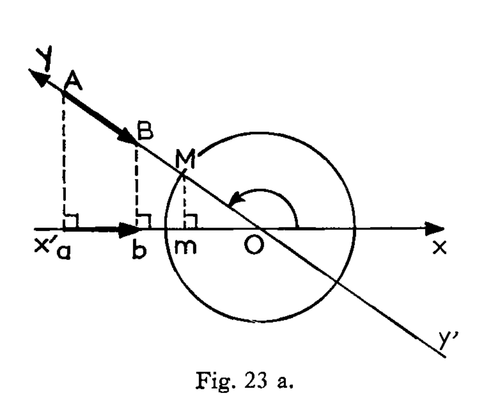


Fig. 23 a.

Soit un vecteur $\overrightarrow{AB}$ porté par un axe $y'y$. Désignons par $\overrightarrow{ab}$ la projection de $\overrightarrow{AB}$ sur un axe $x'x$ qui coupe $y'y$ en O. Traçons le cercle trigonométrique de centre O. Il coupe Oy en M qui se projette en m sur $x'x$. On a :

$$\frac{\overline{ab}}{\overline{Om}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{OM}}$$

Or : $\overline{OM} = +1$ et $\overline{Om} = \cos(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy})$

Donc : $\overline{ab} = \overline{AB}.\cos(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy})$.

Théorème. — ***La mesure algébrique de la projection d'un vecteur sur un axe est le produit de la mesure algébrique de ce vecteur évaluée sur l'axe qui le porte par le cosinus de l'angle des deux axes.***

Application.

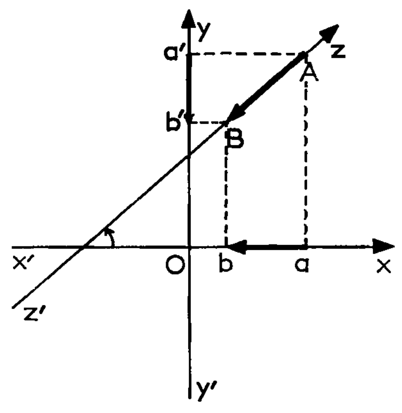


Fig. 23 b.

Soit, dans un repère orthonormé $x'Ox$, $y'Oy$ tel que $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy}) = +\frac{\pi}{2}$, un vecteur $\overrightarrow{AB}$ porté par un axe $z'z$. Désignons par $\overrightarrow{ab}$ et $\overrightarrow{a'b'}$ les composantes de $\overrightarrow{AB}$ sur $x'x$ et $y'y$.

On a :

$$\mathbf{\overline{ab} = \overline{AB} \cos (\overrightarrow{x'x}, \overrightarrow{z'z})}$$

$$\overline{a'b'} = \overline{AB} \cos (\overrightarrow{y'y}, \overrightarrow{z'z}).$$

Or : $$(\overrightarrow{y'y}, \overrightarrow{z'z}) \equiv (\overrightarrow{y'y}, \overrightarrow{x'x}) + (\overrightarrow{x'x}, \overrightarrow{z'z}) \quad (\text{mod. } 2\pi)$$

$$\equiv -\frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{x'x}, \overrightarrow{z'z}) \quad (\text{mod. } 2\pi)$$

Donc :

$$\mathbf{\overline{a'b'} = \overline{AB} \sin (\overrightarrow{x'x}, \overrightarrow{z'z})}.$$

IV. DIÈDRES ORIENTÉS

24. Orientation de l'espace.

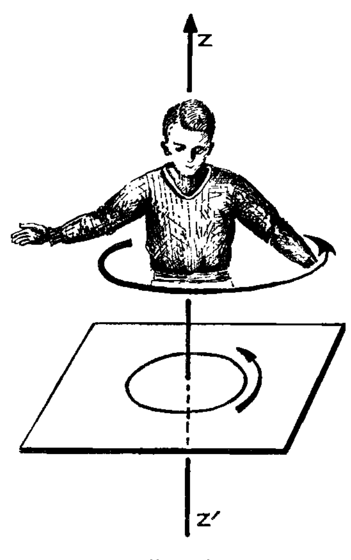


Fig. 24.

Soit $z'z$ un axe quelconque de l'espace. Supposons un observateur placé suivant cet axe qui le traverse des pieds à la tête. Si l'on fait choix d'un sens de rotation positif autour de cet observateur, on oriente l'espace par rapport à cet axe.

On adopte habituellement comme sens positif, celui qui va de la droite à la gauche de l'observateur (dit sens direct). Le sens opposé est le sens négatif (ou

rétrograde). Si l'on mène les plans perpendiculaires à cet axe, ils seront orientés dans le même sens, en supposant l'observateur placé au-dessus du plan.

25. Dièdre orienté.

Un dièdre est la figure formée par deux demi-plans qui se coupent. Soient (P) et (Q) ces deux demi-plans, AB leur droite commune. (P) et (Q) sont les faces, AB l'arête du dièdre.

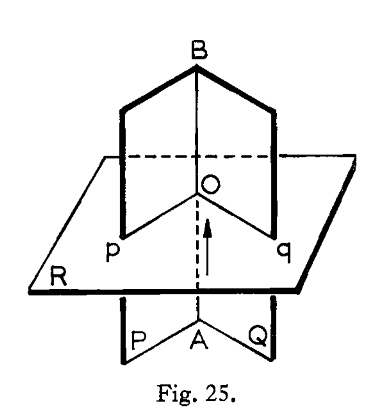


Fig. 25.

Orientons l'arête AB, de A vers B par exemple, et choisissons l'un des plans pour origine, (P) par exemple, l'autre, (Q) pour extrémité. Le dièdre $(P, \overrightarrow{AB}, Q)$ est orienté. Sa mesure sera un nombre relatif dont la valeur absolue est la mesure du dièdre rapporté au dièdre unité et dont le signe est + ou — suivant que l'observateur placé suivant AB voit la face (P) aller vers la face (Q) dans le sens positif ou le sens négatif.

Soit R un plan perpendiculaire à AB qui coupe (P) suivant Op, (Q) suivant Oq. $(\overrightarrow{Op}, \overrightarrow{Oq})$ est le rectiligne du dièdre $(P, \overrightarrow{AB}, Q)$. Sa mesure algébrique est la même que celle du dièdre $(P, \overrightarrow{AB}, Q)$.

Ceci permet d'étendre aux mesures des dièdres les relations des mesures des angles.

V. TRIÈDRES ORIENTÉS

26. Sens d'un trièdre.

Soit $Sxyz$ un trièdre dont les arêtes ont été rangées dans un certain ordre **(trièdre orienté)**.

Par définition, **le sens du trièdre Sxyz est celui du dièdre $(y, \overrightarrow{Sx}, z)$.**

Si un observateur placé suivant Sx, les pieds en S et la tête vers x, regardant à l'intérieur du trièdre voit la face xSy aller vers la face xSz dans le sens direct (généralement de droite à gauche), le trièdre est de sens direct (fig. 26 a).

Dans le cas contraire, le trièdre est de sens rétrograde (fig. 26 b).

Remarque. *Si l'arête* Sy *se déplace en restant toujours du même côté de la face* xSz, *le trièdre ne change pas de sens.*

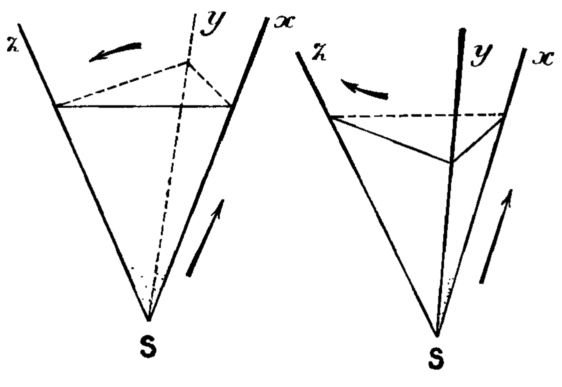


Fig. 26 a. Fig. 26 b.

EXERCICES

186. On donne un triangle équilatéral ABC tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = +\frac{\pi}{3}$ et un axe $x'x$ passant par A. Connaissant l'angle $(\overrightarrow{Ax}, \overrightarrow{AB}) = \theta$, calculer les angles polaires des vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA}$.

Par projections orthogonales sur des axes judicieusement choisis en déduire les relations :

$$\cos\theta + \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right) = 0$$

$$\sin\theta + \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right) = 0.$$

187. On donne un triangle ABC dans un plan orienté. Démontrer que si un mobile parcourant son cercle circonscrit dans le sens positif rencontre les sommets dans l'ordre A, B, C on a :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \pi + 2k\pi.$$

188. On donne un point P dans le plan d'un triangle ABC. On construit les cercles symétriques des cercles circonscrits aux triangles PAB, PBC et PCA par rapport aux côtés AB, BC et CA. Démontrer que les cercles ainsi obtenus ont un point commun.

189. Sur les trois côtés BC, CA et AB d'un triangle, on prend respectivement les trois points P, Q et R. Démontrer que les cercles circonscrits aux triangles AQR, BRP et CPQ ont un point commun.

190. On donne quatre points A, B, C et D d'un cercle. Les cercles de diamètre BA et BC, CB et CD, DC et DA, AD et AB se coupent respectivement en B_1 C_1 D_1 A_1. Montrer que ces quatre points sont sur un même cercle.

191. Un triangle ABC a une base fixe BC ; le sommet A décrit un cercle fixe passant par B et C. En désignant par $B\delta$ l'une des bissectrices de l'angle (BC, BA) et par $C\delta'$ l'une des bissectrices de l'angle (CA, CB) et en posant (AB, AC) $= \alpha + k\pi$, calculer $(B\delta, C\delta')$ en fonction de α.

En déduire les ensembles des centres des cercles inscrits et exinscrits.

Déterminer l'ensemble décrit par l'orthocentre du triangle.

192. On se donne sur une droite $x'x$ quatre points A, B, C et D qui se suivent dans cet ordre. Déterminer un point O du plan tel que, de O, on voie les trois segments AB, BC et CD sous un même angle.

193. Soient D_1 et Δ_1 deux droites fixes se coupant en O et telles que l'angle de droites $(D_1, \Delta_1) = \alpha$ (à $k\pi$ près).

Deux droites variables D et Δ, situées dans le même plan que D_1 et Δ_1, se coupent en un point fixe donné, P, non situé sur D_1 ou Δ_1 et font entre elles un angle constant $(D, \Delta) = \beta$ (à $k\pi$ près).

On appelle M le point d'intersection de D et D_1, N le point d'intersection de Δ et Δ_1, A, B et I les projections orthogonales de P respectivement sur D_1, Δ_1 et la droite MN.

1° Démontrer que les cercles circonscrits aux triangles PAI et PBI se coupent sous un angle constant.

2° Calculer l'angle (IA, IB) et en déduire l'ensemble des points I.

(Espagne, 1958 — Extraits)

194. On considère un segment BC et un point A non situé sur la droite BC. Un point M varie sur le segment BC et l'on porte sur BA, dans le sens $\overrightarrow{BA}$, une longueur BN = BM, sur CA, dans le sens $\overrightarrow{CA}$, une longueur CP = CM.

1° Montrer que, lorsque M varie, l'angle NMP reste constant et que le centre F du cercle circonscrit au triangle NMP est un point fixe.

2° Démontrer que les points A, N, P, F sont sur un même cercle et trouver l'ensemble des centres de ce cercle lorsque M décrit le segment BC.

3° En déduire les positions des points M, N, P pour lesquelles le segment NP a une longueur minimale.

(Liban 52 — Partiel).

CHAPITRE 15

PUISSANCE. AXE RADICAL

PUISSANCE D'UN POINT PAR RAPPORT A UN CERCLE

1. Définition.

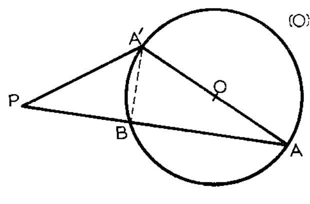


Fig. 1.

Étant donné un cercle (O), de centre O, et un point P fixe de son plan, quel que soit le diamètre AA′, on aura :

$\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PA'} = (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OA})(\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OA'})$

et puisque $\overrightarrow{OA'} = -\overrightarrow{OA}$:

$\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PA'} = PO^2 - OA^2 = PO^2 - R^2$

La grandeur $\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PA'} = PO^2 - R^2$ qui, pour un point P donné, est indépendante du diamètre AA′ choisi, est appelée **puissance du point P par rapport au cercle (O).**

Nous la noterons $\mathscr{P}P/(O)$

$$\boxed{\mathscr{P}P/(O) = \overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PA'} = PO^2 - R^2}$$

2. Autres expressions de la puissance.

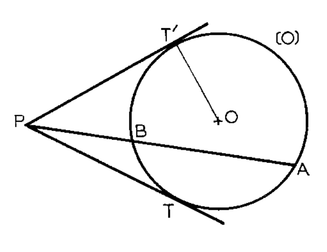


Fig. 2

Si B est le second point commun au cercle (O) et à la droite PA, (fig. 1) l'angle A′BA est droit, et B est la projection orthogonale du point A′ sur la droite PA, donc :

$\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PA'} = \overline{PA}.\overline{PB}$ et

$$\boxed{\mathscr{P}P/(O) = \overline{PA}.\overline{PB}}.$$

Si le point P est extérieur au cercle (O), il existe deux tangentes PT et PT′ issues du point P. Les points de contact, T ou T′, correspondent à des points A et B confondus, donc :

$$\mathscr{P}\mathrm{P}/(\mathrm{O}) = \mathrm{PT}^2 = \mathrm{PT}'^2.$$

3. Signe de la puissance d'un point P par rapport à un cercle.

Appelons d la distance du point P au centre O du cercle :

P est extérieur au cercle (O) de rayon R si, et seulement si, $d > \mathrm{R}$, c'est-à-dire si $d^2 - \mathrm{R}^2 > 0$, donc :

$$\textbf{P extérieur au cercle} \Leftrightarrow \mathscr{P}\mathrm{P}/(\mathrm{O}) > 0$$

P appartient au cercle (O) si, et seulement si, $d = \mathrm{R}$, c'est-à-dire si $d^2 - \mathrm{R}^2 = \mathrm{O}$

$$\mathrm{P} \in (0) \Leftrightarrow \mathscr{P}\mathrm{P}/(\mathrm{O}) = 0$$

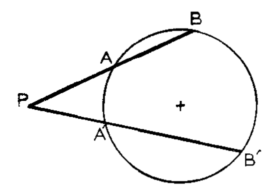
P est intérieur au cercle (O) si, et seulement si, $d < \mathrm{R}$, c'est-à-dire si $d^2 - \mathrm{R}^2 < 0$, donc

$$\textbf{P intérieur au cercle} \Leftrightarrow \mathscr{P}\mathrm{P}/(\mathrm{O}) < 0$$

4. Points cocycliques.

Si quatre points A, B, A′, B′ sont cocycliques, et si les droites AB et A′B′ se coupent en P, on a :

$$\mathscr{P}\mathrm{P}/(\mathrm{O}) = \overline{\mathrm{PA}}.\overline{\mathrm{PB}} = \overline{\mathrm{PA}'}.\overline{\mathrm{PB}'}$$



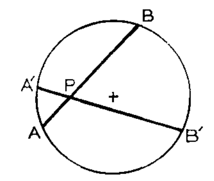


Fig. 4.

Réciproquement, soient quatre points A, B, A′ et B′ non alignés, tels que $\overline{\mathrm{PA}}.\overline{\mathrm{PB}} = \overline{\mathrm{PA}'}.\overline{\mathrm{PB}'}$, P étant l'intersection des droites AB et A′B′. Il existe un cercle et un seul passant par les trois points A, B, et A′ ; ce cercle recoupe la droite PA′ en B_1 et l'on a :

$$\overline{\mathrm{PA}}.\overline{\mathrm{PB}} = \overline{\mathrm{PA}'}.\overline{\mathrm{PB}_1}$$

Ces deux relations montrent que les points B_1 et B' sont confondus, donc que les points A, B, A′ et B′ sont cocycliques.

La relation $\overline{PA}.\overline{PB} = \overline{PA'}.\overline{PB'}$ est donc caractéristique de quatre points cocycliques. (Points A, B, A′, B′ non alignés).

5. Cercle tangent à une droite.

Soient deux droites PT et PAB respectivement tangente en T et sécante en A et B à un cercle (O) : on sait que

$$PT^2 = \overline{PA}.\overline{PB}.$$

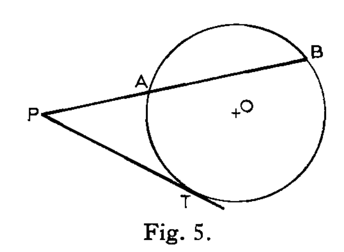


Fig. 5.

Réciproquement, soient trois points A, B et T non alignés et un point P de la droite AB tel que $PT^2 = \overline{PA}.\overline{PB}$: il existe un cercle et un seul passant par A, B et T. Si la droite PT recoupe le cercle en T′, on aura $\overline{PT}.\overline{PT'} = \overline{PA}.\overline{PB}$.

Ces deux relations entraînent $\overline{PT} = \overline{PT'}$, donc les points T et T′ sont confondus et le cercle est tangent à la droite PT.

La relation $PT^2 = \overline{PA}.\overline{PB}$ (A, B, T non alignés) est donc nécessaire et suffisante pour que le cercle (ABT) soit tangent en T à la droite PT.

6. Axe radical de deux cercles.

Proposons-nous de déterminer l'ensemble des points P ayant même puissance par rapport à deux cercles (O) et (O′) de rayons R et R′.

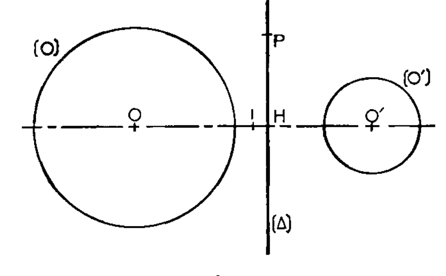


Fig. 6.

$\mathscr{P}P/(O) = \mathscr{P}P/(O') \Leftrightarrow$
$PO^2 - R^2 = PO'^2 - R'^2$

ou :

$PO^2 - PO'^2 = R^2 - R'^2$ (1)

Si l'on appelle I le milieu de OO′ et H la projection orthogonale d'un point P sur la droite OO′, on sait que :

$$PO^2 - PO'^2 = 2\,\overline{OO'}.\overline{IH} \qquad (2)$$

La relation (1) est vérifiée si, et seulement si,

$$2\,\overline{OO'}.\overline{IH} = R^2 - R'^2$$

c'est-à-dire si le point P se projette orthogonalement sur AB en un point fixe H tel que :

$$\boxed{\overline{IH} = \frac{R^2 - R'^2}{2\,\overline{OO'}}}$$

L'ensemble des points P ayant même puissance par rapport aux deux cercles est la perpendiculaire en H à la ligne des centres. Cette droite est appelée axe radical des deux cercles.

7. Position de l'axe radical.

$\overrightarrow{IH}$ et $\overrightarrow{OO'}$ sont de même sens si

$$R^2 > R'^2$$

de sens contraires si

$$R^2 < R'^2$$

par conséquent le centre du plus petit cercle est le plus rapproché de l'axe radical.

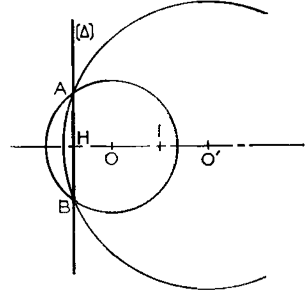


Fig. 7 a.

Fig. 7 b.

Cercles sécants en A et B : les points communs ont même puissance (nulle) par rapport aux deux cercles, donc appartiennent à l'axe radical.

L'axe radical de deux cercles sécants est la droite passant par les deux points communs.

Cercles tangents en A : l'axe radical est perpendiculaire à la ligne des centres et il contient le point A qui a même puissance (nulle) par rapport aux deux cercles, il est donc confondu avec la tangente commune au point A.

Cercles intérieurs ou extérieurs : dans ce cas, l'axe radical n'a aucun point commun avec l'un des cercles, car tout point de l'un des cercles a une puissance nulle par rapport à ce cercle et une puissance non nulle par rapport à l'autre.

Si les cercles sont **intérieurs**, l'axe radical est extérieur aux cercles et du côté du centre du plus petit cercle.

Les cercles sont **extérieurs** si $OO' > R + R'$ ou $\dfrac{R + R'}{OO'} < 1$

or $\quad IH = \dfrac{|R^2 - R'^2|}{2\,OO'} = \dfrac{R + R'}{OO'} \times \dfrac{|R - R'|}{2}$

ce qui entraîne $\quad IH < \dfrac{|R - R'|}{2}$

et à fortiori : $\quad IH < \dfrac{R + R'}{2} < \dfrac{OO'}{2}$

donc $IH < IO'$, ce qui montre que l'axe radical est entre les deux cercles.

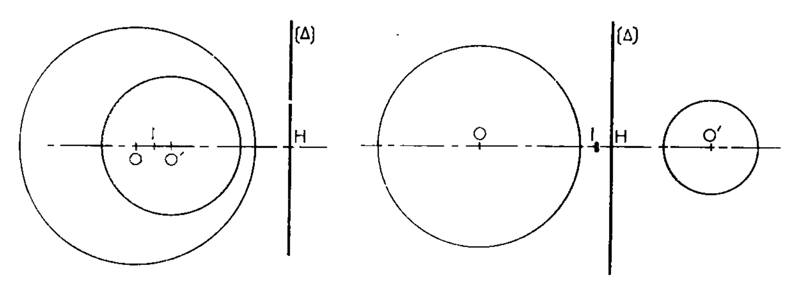


Fig. 7 c.

8. Lieu géométrique.

Soient PT et PT' deux droites issues d'un même point P et respectivement tangentes en T et T' à deux cercles (O) et (O'). Cherchons l'ensemble des points P tels que $PT = PT'$. Les tangentes n'existent que si P est extérieur aux deux cercles et alors

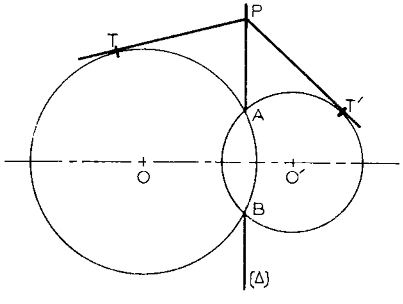


Fig. 8 a.

$PT = PT' \Leftrightarrow \mathscr{P}P/(O) = \mathscr{P}P/(O')$
ce qui montre que

L'ensemble des points d'où l'on peut mener des tangentes égales à deux cercles, est l'axe radical de ces deux cercles, diminué, s'il y a lieu, du segment intérieur à ces deux cercles.

On peut utiliser cette propriété pour construire l'axe radical de deux cercles extérieurs : on mène deux tangentes communes et on détermine les points de contact T_1 et T'_1 pour l'une, T_2 et T'_2 pour l'autre. Les milieux des segments $T_1T'_1$ et $T_2T'_2$ appartiennent à l'axe radical.

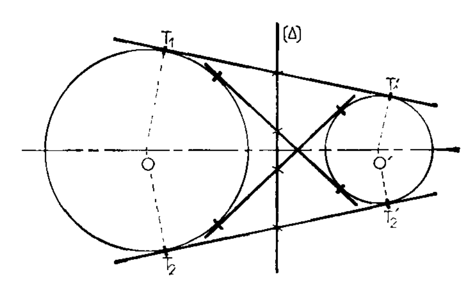


Fig. 8 b .

9. Différence des puissances d'un point par rapport à deux cercles.

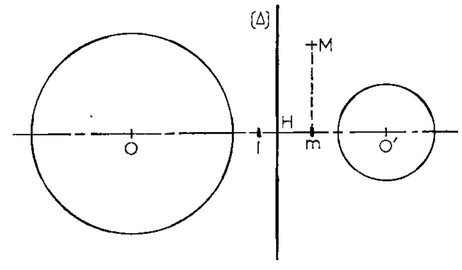


Fig. 9.

M étant un point quelconque du plan, on aura, avec les notations précédentes :

$$\mathscr{P}M/(O) - \mathscr{P}M/(O') = (MO^2 - R^2) - (MO'^2 - R'^2)$$
$$= (MO^2 - MO'^2) - (R^2 - R'^2)$$

et si m est la projection orthogonale de M sur la droite OO′ et H le pied de l'axe radical :

$$\mathscr{P}M/(O) - \mathscr{P}M/(O') = 2\,\overline{OO'}.\overline{Im} - 2\,\overline{OO'}.\overline{IH}$$

ou bien :

$$\boxed{\mathscr{P}\mathbf{M}/(\mathbf{O}) - \mathscr{P}\mathbf{M}/(\mathbf{O}') = 2\,\overline{\mathbf{OO}'}.\overline{\mathbf{Hm}}}$$

Lieu géométrique.

Cherchons l'ensemble des points M dont la différence des puissances par rapport à deux cercles est égale à un nombre donné k :

$$\mathscr{P}\mathrm{M}/(\mathrm{O}) - \mathscr{P}\mathrm{M}/(\mathrm{O}') = k \Leftrightarrow \boxed{\overline{\mathbf{Hm}} = \frac{\mathbf{k}}{2\,\overline{\mathbf{OO}'}}}$$

cette expression détermine une valeur $\overline{\mathrm{H}m}$ constante, donc un point m fixe, ce qui montre que l'ensemble des points M est une droite perpendiculaire à OO′.

Le lieu des points dont la différence des puissances par rapport à deux cercles est constante, est une droite parallèle à l'axe radical.

10. Régions déterminées par l'axe radical.

La relation $\mathscr{P}\mathrm{M}/(\mathrm{O}) - \mathscr{P}\mathrm{M}/(\mathrm{O}') = 2\,\overline{\mathrm{OO}'}.\overline{\mathrm{H}m}$

entraîne : $\mathscr{P}\mathrm{M}/(\mathrm{O}) > \mathscr{P}\mathrm{M}/(\mathrm{O}') \Leftrightarrow 2\,\overline{\mathrm{OO}'}.\overline{\mathrm{H}m} > 0$

qui est vérifié si, et seulement si, $\overrightarrow{\mathrm{H}m}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OO}'}$ sont de même sens, donc pour tout point M situé du côté de O′ par rapport à l'axe radical.

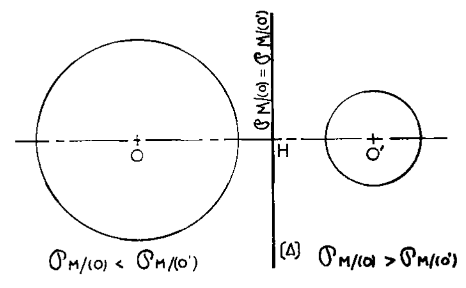


Fig. 10.

Inversement : $\mathscr{P}M/(O) < \mathscr{P}M/(O') \Leftrightarrow 2\,\overline{OO'}.\overline{Hm} < 0$ cette relation est vérifiée pour tout point M situé du côté de O par rapport à l'axe radical.

L'axe radical détermine donc sur le plan trois sous-ensembles : la **région qui contient** O′, ou ensemble des points M tels que

$$\mathscr{P}M/(O) > \mathscr{P}M/(O')$$

la **région qui contient** O, ou ensemble des points M tels que

$$\mathscr{P}M/(O) < \mathscr{P}M/(O')$$

l'**axe radical** ou ensemble des points M tels que

$$\mathscr{P}M/(O) = \mathscr{P}M(O').$$

11. Centre radical de trois cercles.

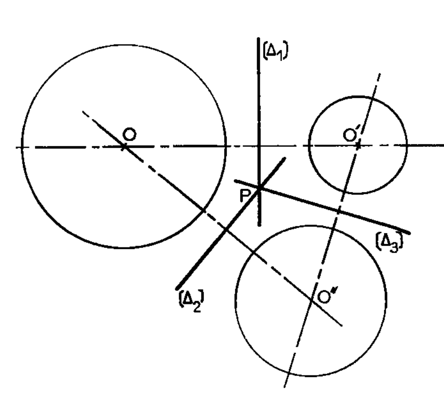


Fig. 11.

Soient (O), (O′) et (O″) trois cercles d'un même plan,
(Δ_1) l'axe radical des cercles (O) et (O′)
(Δ_2) l'axe radical des cercles (O) et (O″) :

Si les centres des trois cercles ne sont pas alignés, (Δ_1) et (Δ_2) se coupent en un point P qui a même puissance par rapport aux trois cercles, donc appartient à l'axe radical (Δ_3) des cercles (O′) et (O″).

Les axes radicaux de ces trois cercles pris deux à deux sont concourants en un point appelé centre radical des trois cercles.

Si les centres des trois cercles sont alignés, (Δ_1) et (Δ_2) ont même direction et dans ce cas :

- si (Δ_1) et (Δ_2) sont parallèles, il n'existe aucun point ayant même puissance par rapport aux trois cercles,
- si (Δ_1) et (Δ_2) sont confondus, tous leurs points ont même puissance par rapport aux trois cercles.

12. Construction de l'axe radical.

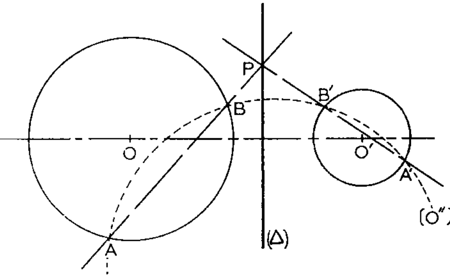


Fig. 12.

Si deux cercles (O) et (O') n'ont aucun point commun, on peut tracer un cercle auxiliaire (O'') qui les coupe en A et B, A' et B' respectivement. Les droites AB et A'B' se coupent au centre radical, P, des trois cercles ; l'axe radical des cercles (O) et (O') est la perpendiculaire à OO' qui passe par P.

EXERCICES

196. Par deux points A et B symétriques par rapport au centre d'un cercle (O), on mène deux segments parallèles et de même sens, AM et BN, limités au cercle.

Démontrer que le produit AM.BN est constant.

197. On mène dans un cercle, par les extrémités d'un diamètre AB, deux cordes quelconques AA' et BB' qui se coupent en un point M. Montrer que la somme des puissances du point A par rapport au cercle MBA' et du point B par rapport au cercle MAB' est égale à AB^2.

198. On donne un cercle (O) et deux points fixes A et B. Par A on mène une droite variable qui rencontre le cercle en M et M'.

Ensemble des centres des cercles circonscrits au triangle BMM'.

199. Soient A', B', C' les pieds des hauteurs AA', BB', CC' d'un triangle ABC d'orthocentre H.

Démontrer que : $\overline{A'B}.\overline{A'C} = -\overline{A'H}.\overline{A'A}$

$$\overline{HA}.\overline{HA'} = \overline{HB}.\overline{HB'} = \overline{HC}.\overline{HC'}$$

200. On donne trois points A, B, C. Par le point A on mène une droite variable. Par B et C on peut, en général, faire passer deux cercles tangents à cette droite en M et M'.

Ensemble des points P conjugués harmoniques de A par rapport à M et M'.

201. On donne un cercle (O) et un point fixe A intérieur à ce cercle. Une droite variable issue de A coupe le cercle en M et N. On trace le cercle (Γ) de diamètre MN et l'on mène dans ce cercle la corde PAP' perpendiculaire à MN.

Lieu des points P et P'.

202. Dans un triangle ABC, on mène une parallèle B'C' à la base BC. Démontrer que l'axe radical des cercles de diamètres BC' et CB' est la hauteur AH de ce triangle.

203. Sur le côté AB d'un parallélogramme ABCD, on considère deux points variables A′ et B′ et l'on trace les droites CA′ et DB′ qui se coupent au point P.

Démontrer que l'axe radical des cercles PAA′ et PBB′ est parallèle au côté BC.

204. D'un point P fixe, on mène les sécantes variables PAA′ à un cercle (O). La tangente en A au cercle (O) coupe en Q la parallèle menée par P à la tangente en A′.

Lieu du point Q.

205. D'un point P fixe, on mène les sécantes PMN à un cercle (O). Les cercles de diamètre PM et PN recoupent le cercle (O) en M′ et N′. Lieu de l'intersection S des droites MM′ et NN′.

206. On considère deux cercles fixes (C) et (C′), un point fixe O sur (C) et la droite OT tangente en O au cercle (C). On mène une corde variable A″B″ du cercle (C′) parallèle à OT. OA″ coupe (C) en A et (C′) en A′ ; OB″ coupe (C) en B et (C′) en B′.

1° Démontrer que AB et A′B′ sont parallèles.

2° A″B″ se déplaçant parallèlement à OT, démontrer que A′B′ passe par un point fixe et trouver le lieu du point commun à AB et A″B″.

207. Un cercle variable (Γ) passe par un point fixe A et a son centre sur un cercle fixe (O). Quelle est l'enveloppe de l'axe radical du cercle (Γ) et du cercle (O).

208. Lieu du centre d'un cercle variable qui coupe diamétralement deux cercles donnés (O) et (O′).

Construire un cercle qui coupe diamétralement trois cercles donnés (O), (O′) et (O″).

209. Démontrer que l'axe radical du cercle circonscrit à un triangle et du cercle d'Euler de ce triangle passe par les conjugués harmoniques des pieds des hauteurs par rapport aux sommets situés sur le même côté du triangle.

210. Par le point A commun à deux cercles (O) et (O′), on mène une sécante variable qui recoupe les cercles en M et M′. Ensemble des points P qui divisent les segments MM′ dans un rapport donné *k*.

211. Soient A*x* et B*y* deux axes tangents à un cercle (Γ), de centre O, aux deux extrémités d'un diamètre AB de (Γ). A*x* et B*y* sont orientés dans le même sens. Une tangente variable à (Γ) en M rencontre A*x* en A′ et B*y* en B′.

Démontrer les propriétés suivantes :

1° $\overline{AA'} + \overline{BB'} = \pm A'B'$;

2° Le cercle de diamètre A′B′ est tangent en O à AB ;

3° Le produit $\overline{AA'}.\overline{BB'}$ est constant ;

4° Si P est la projection orthogonale de M sur AB, PM est la bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{PA'}, \overrightarrow{PB'})$;

5° Le produit A′B′.PM est constant ;

6° AB′ et BA′ se coupent au milieu de PM et $\dfrac{2}{\overline{PM}} = \dfrac{1}{\overline{AA'}} + \dfrac{1}{\overline{BB'}}$.

CHAPITRE 16

CERCLES ORTHOGONAUX

1. Définitions.

L'angle de **deux courbes** (non orientées) sécantes en A est l'angle de leurs tangentes en A.

Si les tangentes AT et AT′ sont perpendiculaires, les courbes sont dites orthogonales en A.

alors : $(AT, AT') \equiv (AT', AT) \equiv \pi/2 \pmod{\pi}$.

Si **deux cercles** (O) et (O′), de centres O et O′, se coupent en A et admettent pour tangentes AT et AT′ respectivement, on a :

$$(AT', AT) \equiv (AO, AO') \pmod{\pi}$$

comme étant des angles de droites respectivement perpendiculaires ; il en résulte que deux cercles sont orthogonaux en A si, et seulement si, $(AO, AO') \equiv \pi/2 \pmod{\pi}$.

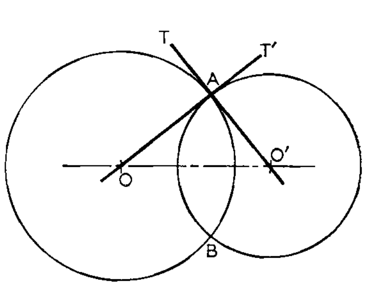


Fig. 1.

Dans ce cas, il existe un second point B commun aux deux cercles, et la symétrie par rapport à OO′ donne :

$$(AO, AO') \equiv (BO', BO) \equiv \pi/2 \pmod{\pi}$$

les cercles sont aussi orthogonaux en B, nous pourrons dire sans plus préciser que les cercles sont orthogonaux.

2. Propriétés caractéristiques des cercles orthogonaux.

1° Sachant que $(AO, AT) \equiv \pi/2 \pmod{\pi}$

la condition $(AO, AO') = \pi/2$ est vérifiée si, et seulement si, le point O′ appartient à la droite AT.

Une condition nécessaire et suffisante pour que deux cercles sécants en A soient orthogonaux, est que la tangente en A à l'un des cercles passe par le centre de l'autre.

Il résulte de cette propriété que le centre de chacun des cercles est extérieur à l'autre.

2° La relation $(AO, AO') = \pi/2$ est vérifiée si, et seulement si, le triangle OAO' est rectangle en A, donc :

Deux cercles de centres O et O', de rayons R et R', sont orthogonaux si, et seulement si, $OO'^2 = R^2 + R'^2$.

3° Cette dernière relation est équivalente à :

$$OO'^2 - R^2 = R'^2 \quad \text{ou} \quad \mathscr{P}O'/(O) = R'^2$$

et à :

$$OO'^2 - R'^2 = R^2 \quad \text{ou} \quad \mathscr{P}O/(O') = R^2$$

Deux cercles sont orthogonaux si, et seulement si, le carré du rayon de l'un des cercles est égal à la puissance de son centre par rapport à l'autre cercle.

4° Si un diamètre du cercle (O) coupe le cercle (O') en E et E' :

$$\mathscr{P}O/(O') = R^2 \Leftrightarrow \overline{OE}.\overline{OE'} = OA^2 = OB^2$$

ce qui montre que :

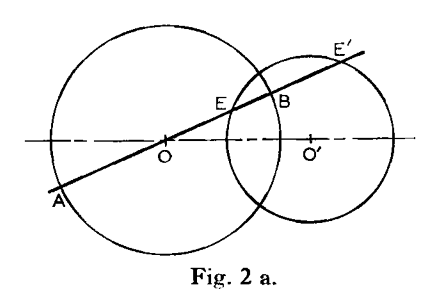


Fig. 2 a.

Deux cercles sont orthogonaux si, et seulement si, un diamètre de l'un des cercles est divisé harmoniquement par l'autre cercle.

5° Si les cercles (O) et (O') se coupent en A et B, et si une sécante passant par A recoupe (O) en M, et (O') en M', on a (mod. π) :

$$(MB, MA) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) = (OO', OA)$$

$$(M'A, M'B) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{O'A}, \overrightarrow{O'B}) = (O'A, OO')$$

et par addition :

$$(MB, M'B) = (O'A, OA)$$

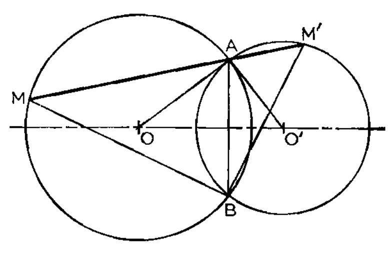


Fig. 2 b.

ce qui montre que :

$$(AO', AO) = \pi/2 \Leftrightarrow (BM, BM') = \pi/2.$$

Deux cercles sécants en A et B sont orthogonaux si, et seulement si, une sécante MM' passant par l'un des points A ou B est vue de l'autre point sous un angle droit.

3. Cercles orthogonaux à deux cercles donnés.

Un tel cercle (ω) existe à la condition nécessaire et suffisante que, ρ étant son rayon, on ait :

$$\mathscr{P}\omega/(O) = \rho^2 \text{ et } \mathscr{P}\omega/(O') = \rho^2$$

ce qui implique que ω est extérieur aux cercles (O) et (O') et appartient à l'axe radical de ces deux cercles.

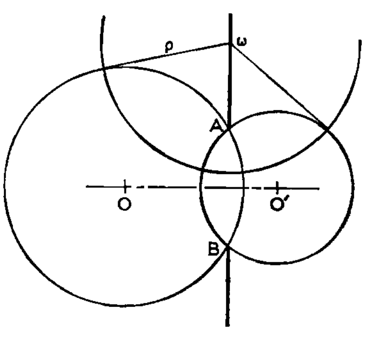


Fig. 3.

Si ω vérifie ces deux conditions, il est centre d'un cercle, et d'un seul, orthogonal à (O) et (O'), puisque les relations ci-dessus déterminent un rayon ρ et un seul.

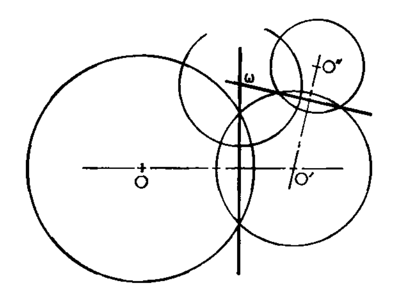
L'ensemble des centres des cercles (ω) orthogonaux à deux cercles (O) et (O') est l'axe radical de ces deux cercles, diminué, s'il existe, du segment intérieur aux deux cercles.

4. Cercle orthogonal à trois cercles donnés.

Le centre d'un tel cercle, s'il existe, a même puissance par rapport aux trois cercles et est extérieur à chacun d'eux.

Le cercle (ω) existe et est unique si les 3 cercles admettent un centre radical extérieur à chacun d'èux.

Le cercle (ω) n'existe pas si lestrois cercles n'admettent pas de centre radical (centres alignés) ou si le centre radical est intérieur à chacun d'eux.



Il existe une infinité de cercles (ω) si les trois cercles admettent deux à deux même axe radical (centres alignés).

Fig. 4.

5. Cercle pseudo-orthogonal à un autre cercle.

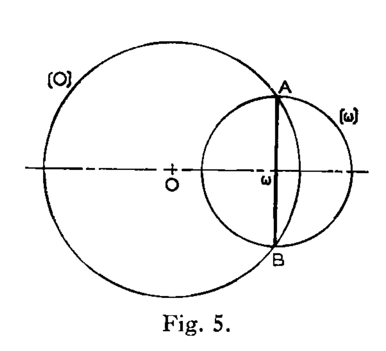


Fig. 5.

Soit un cercle (ω) de diamètre AB : tout cercle (O) passant par A et B est dit cercle pseudo-orthogonal au cercle (O).

On dit aussi que le cercle (O) coupe diamétralement le cercle (ω).

Cette propriété implique que le point ω est intérieur au cercle (O).

La pseudo-orthogonalité n'est pas une propriété symétrique : si (O) est pseudo-orthogonal à (ω), (ω) n'est pas pseudo-orthogonal à (O). Il serait **faux** de dire que **les cercles sont pseudo-orthogonaux.**

Propriété caractéristique.

Une corde AB du cercle (O) est un diamètre du cercle (ω) à la condition nécessaire et suffisante que le triangle OωA soit rectangle en ω milieu de AB,

donc que : $$OA^2 - O\omega^2 = \omega A^2$$

ou, en désignant par R et ρ les rayons des cercles (O) et (ω)

$$R^2 - O\omega^2 = \rho^2$$

ou encore : $$\boxed{\mathscr{P}\omega/(O) = -\rho^2}$$

6. Cercle coupé diamétralement par deux cercles (O) et (O').

Un tel cercle existe à la condition nécessaire et suffisante que l'on ait :

$$\mathscr{P}\omega/(O) = -\rho^2$$
$$\text{et } \mathscr{P}\omega/(O') = -\rho^2$$

ce qui implique que ω est intérieur aux deux cercles et appartient à leur axe radical.

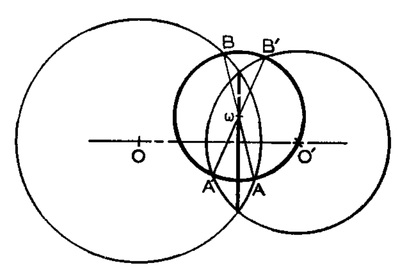


Fig. 6.

Si ω vérifie ces deux conditions, il est centre d'un cercle et d'un seul, coupé diamétralement par les cercles (O) et (O'), puisque les relations ci-dessus déterminent un rayon ρ et un seul.

L'ensemble des centres des cercles coupés diamétralement par deux cercles (O) et (O') est le segment d'axe radical intérieur à ces deux cercles, si ce segment existe.

EXERCICES

213. La division (A, B, C, D) étant harmonique et M et N étant les milieux des segments AB et CD, démontrer la relation :

$$AB^2 + CD^2 = 4MN^2$$

214. Construire un segment MN qui divise harmoniquement deux segments AB et CD portés par une même droite.

215. On donne une droite fixe (D) et un point A fixe sur (D). Par un second point fixe B du plan, extérieur à (D), on mène une sécante variable (Δ) qui rencontre (D) au point C et l'on considère le cercle (Γ) passant par A et tangent à (Δ) en C.

Montrer que les cercles (Γ) et (Γ') correspondant à deux droites perpendiculaires (Δ) et (Δ') sont orthogonaux. Montrer que le lieu du second point de rencontre, M, des deux cercles (Γ) et (Γ') est un cercle passant par B_1 symétrique de B par rapport à (D).

216. Étant donné un triangle ABC, on construit les cercles (A), (B), (C) ayant pour centres les sommets du triangle et pour rayon les longueurs *a*, *b*, *c* des côtés opposés.

1° Montrer que le centre ω du cercle (ω) orthogonal aux 3 cercles (A), (B), (C) est symétrique de l'orthocentre, par rapport au centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

2° Montrer que le rayon ρ du cercle (ω) vérifie la relation :

$$\rho^2 = -4R^2 \cos A . \cos B . \cos C$$

En déduire une condition d'existence du cercle (ω).

217. Construire un cercle passant par un point donné A, et orthogonal à deux cercles donnés (O) et (O′).

218. Construire un cercle de rayon donné R, passant par un point donné A, et orthogonal à un cercle donné (O).

219. Construire deux cercles orthogonaux connaissant leurs centres O et O′ et leur axe radical (Δ).

Construire trois cercles orthogonaux deux à deux, connaissant leurs centres.

220. Soient deux axes rectangulaires, Ox et Oy, un point fixe A sur la demi-droite Ox, un point fixe B sur la demi-droite Oy ($OA > OB$).

On désignera par (α) un cercle quelconque tangent en A à Ox et par (β) un cercle quelconque tangent en B à Oy.

1° Un cercle (α) étant donné, construire les cercles (β) tangents à ce cercle (α). Nombre de solutions.

2° M désignant le point de contact de deux cercles (α) et (β) tangents entre eux, on appellera B′ le point où la droite AM recoupe (β) et A′ le point où la droite BM recoupe (α).

Montrer que le lieu de B′, quand les cercles (α) et (β) varient en restant tangents, se compose de deux droites, que l'on appellera b_1 et b_2. De même le lieu de A′ se compose de deux droites, a_1 et a_2, respectivement parallèles à b_1 et b_2.

3° On suppose que les cercles (α) et (β) varient en restant tangents, le point A′ étant sur a_1 et B′ sur b_1 (a_1 parallèle à b_1). Montrer que le lieu de M est un cercle (Γ) et que la tangente commune aux cercles (α) et (β) coupe (Γ) sous un angle constant.

Qu'arrive-t-il si l'on suppose A′ sur a_2 et B′ sur b_2 ?

221. On donne deux cercles de centres O et O′, de rayons R et R′ ($R > R'$).

1° Calculer la puissance p par rapport à chacun des cercles du pied H de l'axe radical sur la droite des centres, en fonction de R, R′ et $OO' = d$. (On ordonnera par rapport à d).

Retrouver tous les cas de nullité de cette puissance.

2° Le cercle (O) étant fixe, le point O′ décrit une demi-droite Ox et l'on suppose $R' = 0$. Construire l'axe radical du cercle O et du cercle-point (O′) dans tous les cas de figure.

Montrer que la puissance p du point H n'est jamais négative.

3° Montrer qu'il existe deux positions O'_1 et O'_2 du cercle-point (O′) pour lesquelles p a une valeur donnée. Construire ces points dans le cas où $p = R^2$.

4° Montrer que les cercles (Γ) ayant pour diamètre $O'_1O'_2$ sont orthogonaux à un cercle fixe. Montrer qu'il passe en général un cercle (Γ) par un point donné du plan. Construction.

222. On donne deux axes $x'Ox$ et $y'Oy$ tels que $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy}) = \alpha \ (0 < \alpha < \pi)$ et sur Oy deux points A et B tels que $\overline{OA} = a > 0$, $\overline{OB} = b > 0$.

Soient $\Gamma(\Omega, R)$ et $\Gamma'(\Omega', R')$ les cercles passant par A et B et tangents à Ox, les points de contact étant T et T′.

1° Calculer en fonction de a, b et α les longueurs R, R′, TT′, $\Omega\Omega'$.

2° Démontrer que $(a - b)^2(R + R')^2 - 4(a + b)^2RR' + 4ab(a + b)^2 = 0$.

3° Déterminer α pour que Γ et Γ' soient orthogonaux. Discuter suivant les valeurs de a et de b.

223. Soient (D) et (D') deux droites parallèles et deux points fixes O et A sur (D). On considère un couple de points M et M' variables sur (D) et symétriques par rapport à A.

1° Construire les cercles (C) et (C') tangents à (D'), passant par O et respectivement par M et M'.

En désignant par N et N' les points de contact des cercles (C) et (C') avec (D'), montrer que les droites MN et M'N' se rencontrent en un point fixe I. Prouver que le second point de rencontre B des cercles (C) et (C') se déplace sur une droite fixe. Préciser le lieu de B.

2° La tangente en M à (C) et la tangente en M' à (C') se rencontrent en un point P. Montrer que la droite PI est l'une des bissectrices de (PM, PM') et que les droites PM et PM' enveloppent un cercle fixe.

Montrer que le point P se déplace sur la droite I'A', I' désignant le symétrique de O par rapport à I, et A' le symétrique de O par rapport à A. Préciser le lieu de P.

Montrer qu'on retrouve au point P l'angle des tangentes en O aux deux cercles (C) et (C'). Construire un couple de points M et M' symétriques par rapport à A et tels que les cercles (C) et (C') soient orthogonaux. Quel est le nombre de solutions ?

224. On considère les cercles (K) d'un plan qui possèdent la propriété suivante : tout cercle (C) passant par deux points donnés A et B du plan, de milieu O, coupe l'un quelconque d'entre eux en deux points diamétralement opposés, c'est-à-dire que l'axe radical d'un cercle (C) et d'un cercle (K) est toujours un diamètre de (K).

1° Montrer que le centre I d'un cercle (K) est nécessairement sur le segment de droite AB. Construire le cercle (K) dont le centre est un point donné I du segment AB.

Construire les centres des cercles (K) qui passent par un point donné M de AB.

Discuter suivant la valeur de $\overline{OM} = m$. Retrouver les résultats de cette discussion en étudiant l'équation qui a pour racines les abscisses $\overline{OI} = x$ des centres des cercles cherchés.

Construire les cercles (K) qui passent par un point donné M hors de AB. On cherchera d'abord l'axe radical du cercle (K) inconnu et du cercle (C) qui passe par M. La discussion n'est pas demandée.

2° On donne M sur la médiatrice D de AB. Soit I le centre de l'un des cercles (K) qui passent par M. On désigne par N le point diamétralement opposé à M sur (K).

Montrer que les rapports $\frac{NA}{IA}$ et $\frac{NB}{IB}$ gardent une valeur constante quand M se déplace sur D.

3° On suppose que les deux cercles (K) qui passent par un point donné M soient orthogonaux. Que peut-on dire des autres points d'intersection de ces cercles (K_1) et (K_2) et du cercle (C) qui passe par M ?

Établir la relation $\overline{HA}.\overline{HB} = -3HM^2$, où H désigne la projection orthogonale de M sur AB.

225. A. Deux cercles (Γ) et (Γ') de centres respectifs C et C', sécants en I et J sont orthogonaux.

1° Une droite variable passant par I coupe les cercles (Γ) et (Γ') respectivement en A et B. Évaluer l'angle AJB.

La droite AJ recoupe le cercle (Γ') en B′ et la droite BJ recoupe le cercle (Γ) en A′. Montrer que les points A, C, A′ sont alignés de même que B, C′, B′ et I, A′ et B′.

Montrer que les tangentes en A à (Γ) et en B à (Γ') sont perpendiculaires.

2° Soient A un point du cercle (Γ) et B un point du cercle (Γ') tels que les tangentes en A et B aux cercles (Γ) et (Γ') soient perpendiculaires. Montrer que la droite AB passe par l'un des points I ou J.

B. On donne un angle droit xOy, un point fixe A sur la droite Ox, un point B sur la droite Oy, et l'on envisage deux cercles variables (Γ) et (Γ'), tangents respectivement à Ox en A et à Oy en B. Ces cercles variables sont orthogonaux et l'on appelle I et J leurs points communs.

1° Montrer que l'un des points I ou J (I par exemple) appartient à la droite AB et trouver le lieu géométrique des points I et J.

2° Montrer que la droite IJ coupe le cercle de diamètre AB en un point fixe K et que la perpendiculaire en J à la droite KJ passe par un point fixe K′.

Montrer que la projection orthogonale du milieu F de AB sur la droite des centres des cercles (Γ) et (Γ') coïncide avec le milieu de IK′.

CHAPITRE 17

FAISCEAUX LINÉAIRES DE CERCLES

1. Définition.

On appelle faisceau linéaire de cercles l'ensemble des cercles admettant avec un cercle donné un axe radical donné.

Si un cercle (O′) appartient à un faisceau donné par le cercle (O) et l'axe radical (Δ), on sait que (Δ) est perpendiculaire à OO′, il en résulte que les centres de tous les cercles du faisceau sont alignés sur une même perpendiculaire à l'axe radical : cette droite est appelée droite des centres.

2. Propriétés caractéristiques.

S'il existe deux points A et B ayant même puissance par rapport à plusieurs cercles, ces cercles appartiennent à un faisceau, car la droite AB est alors axe radical de chacun des cercles pris avec l'un d'entre eux.

Inversement, si plusieurs cercles appartiennent à un faisceau, deux points quelconques de l'axe radical ont même puissance par rapport à chacun d'eux.

On peut donc énoncer :

Une condition nécessaire et suffisante pour que plusieurs cercles appartiennent à un faisceau, est qu'il existe deux points ayant même puissance par rapport à chacun d'eux.

Si plusieurs cercles ont leurs centres alignés sur une droite (D) et s'il existe un point A ayant même puissance par rapport à tous ces cercles, la perpendiculaire à (D) issue du point A est axe radical de chacun des cercles pris deux à deux, donc ces cercles appartiennent à un faisceau.

Réciproquement, si plusieurs cercles appartiennent à un faisceau, leurs centres sont alignés et un point quelconque de l'axe radical a même puissance par rapport à chacun d'eux.

Nous énoncerons :

Une condition nécessaire et suffisante pour que plusieurs cercles, dont les centres sont alignés, appartiennent à un faisceau, est qu'il existe un point ayant même puissance par rapport à chacun d'eux.

3. Genres de faisceaux.

1er cas : l'axe radical (Δ) coupe le cercle (O) en A et B.

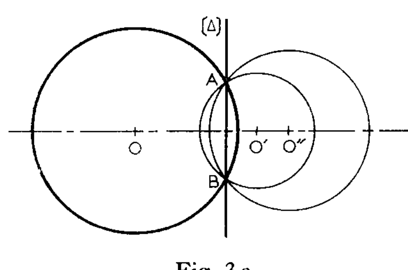


Fig. 3 a.

Dans ce cas, les points A et B appartiennent à tous les cercles du faisceau, puisque leur puissance par rapport à chacun d'eux est nulle.

Inversement, tout cercle passant par A et B appartient au faisceau puisqu'il admet avec le cercle (O) la droite (Δ) pour axe radical.

Le faisceau défini par (O) et (Δ) est aussi l'ensemble des cercles passant par A et B. Les points A et B sont appelés points de base.

Le faisceau est appelé **faisceau à points de base** ou faisceau de cercles sécants.

Dans ce cas, tout point O′ de la droite des centres est centre d'un cercle du faisceau, et d'un seul, admettant pour rayon la longueur O′A.

Si l'on donne le rayon R′, on peut construire le cercle (O′) : le centre O′ appartient à l'intersection de la droite des centres et du cercle (A, R′).

Il existe deux cercles de rayon R′ si : $R' > \frac{1}{2}$ AB

ce cercle est unique si : $R' = \frac{1}{2}$ AB.

2me cas : l'axe radical (Δ) est tangent au cercle (O) en A.

La droite OA perpendiculaire à (Δ) est alors la droite des centres.

Le point A appartient à chacun des cercles du faisceau puisque sa puissance par rapport à chacun d'eux est nulle, donc tous les cercles du faisceau sont tangents en A à la droite (Δ).

Inversement, tout cercle tangent à la droite (Δ) en A admet, avec le cercle (O), la droite (Δ) pour axe radical.

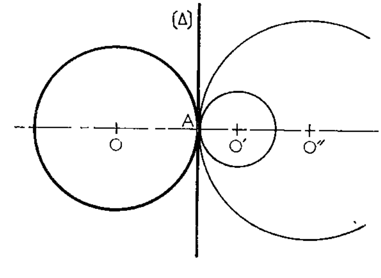


Fig. 3 b.

Le faisceau défini par le cercle (O) et l'axe radical (Δ) est, dans ce cas, l'ensemble des cercles tangents à la droite (Δ) en A, donc tangents entre eux en A.

Le faisceau est appelé **faisceau singulier** ou faisceau de cercles tangents.

3me cas : l'axe radical (Δ) est extérieur au cercle (O).

Dans ce cas, les cercles du faisceau n'ont aucun point commun avec l'axe radical.

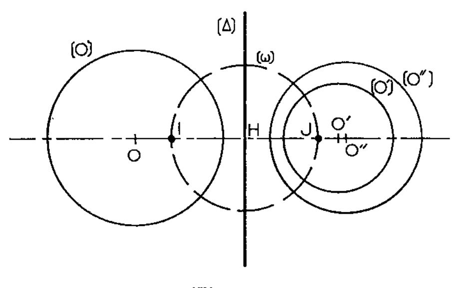


Fig. 3 c.

Si H est le point commun à la droite des centres et à l'axe radical, il existe un cercle de centre H (et un seul) orthogonal au cercle (O). Ce cercle (ω) a un rayon ρ tel que $\rho^2 = \mathscr{P}H/(O)$.

Ce cercle est aussi orthogonal à tout cercle (O′) du faisceau puisque $\mathscr{P}H/(O') = \rho^2$, ce qui montre que les centres des cercles du faisceau sont extérieurs au cercle (ω), donc au segment IJ si l'on désigne par I et J les points communs au cercle (ω) et à la ligne des centres.

Inversement, tout point O′ de la droite des centres, pris à l'extérieur du segment IJ, est centre d'un cercle (et d'un seul) orthogonal au cercle (ω), donc admettant, avec (O), (Δ) pour axe radical puisque $\mathcal{P}H/(O') = \mathcal{P}H/(O)$.

Le faisceau est aussi l'ensemble des cercles centrés sur la droite OH et orthogonaux au cercle (ω).

Les points I et J peuvent être considérés comme des cercles dont le rayon est nul (cercles-points) et qui appartiennent au faisceau. On aurait :

$$\mathcal{P}H/(O) = \mathcal{P}H/(O') = HI^2 = HJ^2$$

Ces points I et J sont appelés **points limites** ou **points de Poncelet**. Le faisceau est appelé **faisceau à points limites** ou faisceau à points de Poncelet.

A tout rayon R′ donné, il correspond deux cercles du faisceau : les centres sont déterminés par $HO'^2 = R'^2 + \rho^2$.

4. Cercles d'un faisceau passant par un point donné M.

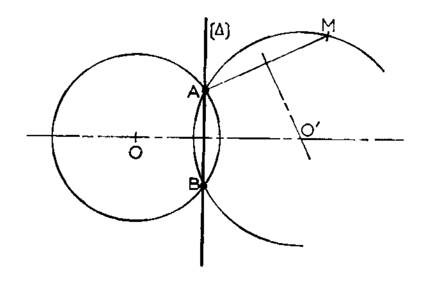


Fig. 4 a.

a) **Faisceau à points de base A et B.**

M étant donné hors de la droite AB, il existe un cercle et un seul passant par A, B et M, donc un cercle du faisceau et un seul passant par M.

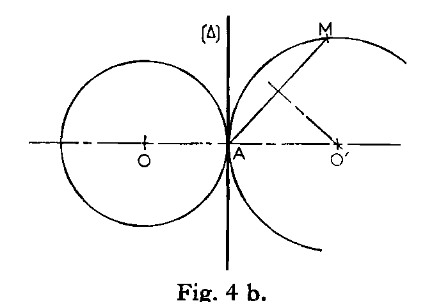


Fig. 4 b.

b) **Faisceau singulier.**

A étant le point de contact, les centres des cercles passant par A et M appartiennent à la médiatrice du segment AM.

Si M n'est pas sur (Δ), cette médiatrice coupe la ligne des centres en un point O′, et le seul cercle du

faisceau qui passe par M est le cercle de centre O′ et de rayon R′ = O′A = O′M.

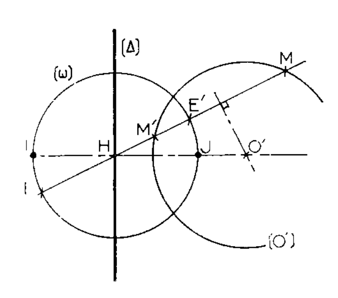


Fig. 4 c.

c) **Faisceau à points limites I et J.**

Première construction : La droite HM étant diamétrale pour le cercle (ω) de diamètre IJ, le cercle (O′) cherché et le cercle (ω) déterminent sur la droite HM une division harmonique (M, M′, E, E′) puisque les cercles (O′) et (ω) sont orthogonaux. On peut construire M′. Le centre O′ est l'intersection de la droite des centres et de la médiatrice de MM′. Cette construction détermine un point O′ et un seul si M est hors de (Δ).

Seconde construction : Le cercle (O′) cherché, orthogonal au cercle (ω), détermine sur le diamètre IJ une division harmonique (α, α′, I, J) ; αα′ est un diamètre du cercle (O′) donc $\widehat{\alpha M \alpha'} = 1D$, et les rayons Mα et Mα′ du faisceau harmonique M.αα′IJ sont les bissectrices de (MI, MJ), ce qui permet de construire α et α′ sur la droite des centres. Ces deux bissectrices coupent la droite des centres si M est hors de (Δ).

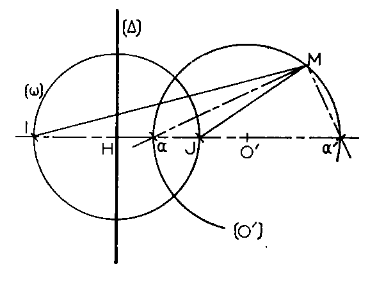


Fig. 4 d.

Dans les 3 cas ***par un point M donné hors de l'axe radical, il passe un cercle du faisceau et un seul.***

On peut considérer l'axe radical comme la limite d'un cercle du faisceau dont le rayon tend vers l'infini; en effet suivant le genre de faisceau, la droite (Δ) satisfait à la condition

- soit de passer par A et B ;
- soit d'être tangente en A au cercle (O) ;

- soit d'être orthogonale au cercle de diamètre IJ.

On énoncera alors :

Par tout point du plan, il passe un cercle du faisceau et un seul.

5. Faisceau et cercle quelconque.

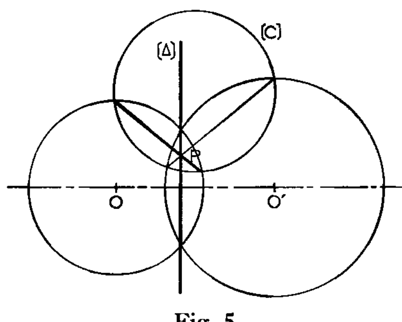


Fig. 5.

Soit un faisceau déterminé par le cercle (O) et l'axe radical (Δ).

(C) étant un cercle quelconque n'appartenant pas au faisceau, l'axe radical des cercles (C) et (O) coupe, en général, (Δ) en un point P qui a même puissance par rapport au cercle (C) et à tous les cercles du faisceau.

Si le centre C n'appartient pas à la droite des centres du faisceau, les deux axes radicaux sont sécants et alors le point P existe et il est unique.

Si le centre C appartient à la droite des centres du faisceau, les deux axes radicaux sont parallèles et le point P n'existe pas.

6. Cercles passant par deux points donnés A et B et tangents à une droite donnée (D).

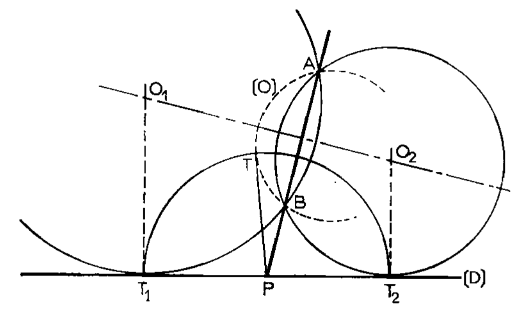


Fig. 6 a.

Soit T_1 le point de contact de la droite (D) et de l'un des cercles (O_1) cherchés, et soit P l'intersection des droites AB et (D) ; on aura :

$$\mathscr{P}P/(O_1) = \overline{PA}.\overline{PB} = PT^2$$

On peut déterminer la longueur PT_1 en menant du point P la tangente à un cercle quelconque passant par A et B, ce qui est possible si, et seulement si, le point P est extérieur au segment AB, donc si les points A et B sont d'un même côté de la droite (D).

Dans ce cas, on porte sur la droite (D), de part et d'autre du point P, les longueurs $PT_1 = PT_2 = PT$ ce qui détermine deux points de contact T_1 et T_2.

Les centres des cercles cherchés sont les intersections de la médiatrice de AB et des perpendiculaires à la droite (D) en T_1 ou T_2 respectivement.

Cas particulier.

Si les droites (D) et AB sont parallèles, le point P est rejeté à l'infini, mais la construction est immédiate : la médiatrice de AB est axe de symétrie de la figure, le point de contact T est un point double : c'est l'intersection de la droite (D) et de l'axe de symétrie. Le cercle cherché est le cercle ABT et il est unique.

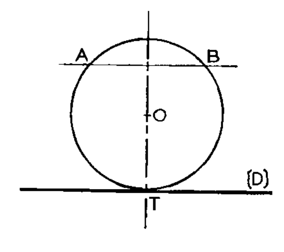


Fig. 6 b.

Cercles d'un faisceau, tangents à une droite donnée.

D'une façon plus générale, cette construction permet de déterminer les cercles qui appartiennent à un faisceau donné et sont tangents à une droite (D) donnée.

Le point P commun à la droite (D) et à l'axe radical du faisceau a même puissance par rapport à tous les cercles du faisceau; on détermine la longueur PT de la tangente à l'aide d'un cercle auxiliaire et l'on poursuit la construction comme ci-dessus.

7. Cercles passant par deux points donnés A et B, et tangents à un cercle donné (C).

Il existe, en général, sur la droite AB, un point P unique ayant même puissance par rapport au cercle (C) et à tous les cercles passant par A et B (voir n° 5) donc tel que :

$$\mathcal{P}P/(O) = \mathcal{P}P/(C) = \overline{PA}.\overline{PB}.$$

L'axe radical du cercle (C) et de l'un des cercles cherchés est la tangente commune au point de contact T_1, et cet axe radical passe par le point P ; on aura donc :

$$PT_1^2 = \overline{PA}.\overline{PB}.$$

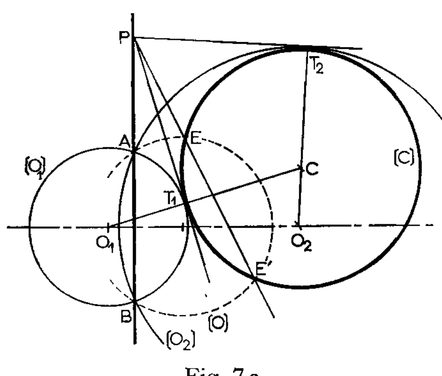


Fig. 7 a.

On détermine le point P à l'aide d'un cercle auxiliaire passant par A et B et coupant le cercle (C). Sur la figure, le cercle auxiliaire (O) coupe (C) en E et E', et $P = AB \cap EE'$.

Si le point P est extérieur au cercle (C), on peut mener deux tangentes PT_1 et PT_2, T_1 et T_2 sont les points de contact du cercle (C) et des cercles cherchés.

Les centres des cercles sont les intersections de la médiatrice de AB et respectivement de la perpendiculaire en T_1 à PT_1 ou en T_2 à PT_2.

La construction est possible si le point P n'est pas intérieur au cercle (C), donc si A et B sont sur le même arc EE' du cercle auxiliaire, ce qui a lieu :

1° si A et B sont tous deux intérieurs ou tous deux extérieurs au cercle (C), il existe alors deux solutions ;

2° si l'un des points A ou B appartient au cercle (C), il est alors confondu avec le point P et le point T, il n'y a qu'une solution.

Cas particulier. Si le centre du cercle (C) est sur la médiatrice de AB, le point P est rejeté à l'infini, mais la médiatrice de AB est alors axe de symétrie de la figure : elle coupe le cercle (C) aux points T_1 et T_2 qui sont les points de contact ; les cercles ABT_1 et ABT_2 sont les cercles cherchés.

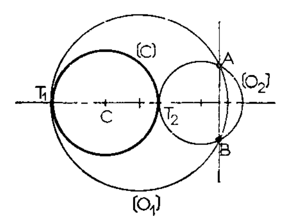


Fig. 7 b.

Cercles d'un faisceau, tangents à un cercle donné.

D'une façon plus générale, cette construction permet de déterminer les cercles qui appartiennent à un faisceau donné et sont tangents à un cercle (C) donné.

On construit l'axe radical du cercle (C) et d'un cercle auxiliaire du faisceau et l'on détermine le point P qui a même puissance par rapport au cercle (C) et à tous les cercles du faisceau.

On poursuit la construction comme ci-dessus.

8. Faisceaux de cercles orthogonaux.

Soit un faisceau (F) défini par deux cercles (O_1) et (O_2), soit (Δ) l'axe radical et (D) la droite des centres.

Supposons d'abord que **le faisceau (F) est un faisceau à points limites I et J.**

Il existe une infinité de cercles orthogonaux aux cercles (O_1) et (O_2), et le lieu géométrique de leurs centres est l'axe radical (Δ). (voir n° 3, chap. 16).

Si (ω) est l'un quelconque de ces cercles, et R_1 le rayon de (O_1) :

(O_1) et (ω) orthogonaux $\Leftrightarrow$ $\mathcal{P}O_1/(\omega) = R_1^2$, $\forall\omega$. Le point O_1 a même puissance par rapport à tous les cercles (ω) dont les centres sont alignés, par conséquent l'ensemble des cercles (ω) est un faisceau (Φ) (voir n° 2), admettant la droite (D) pour axe radical.

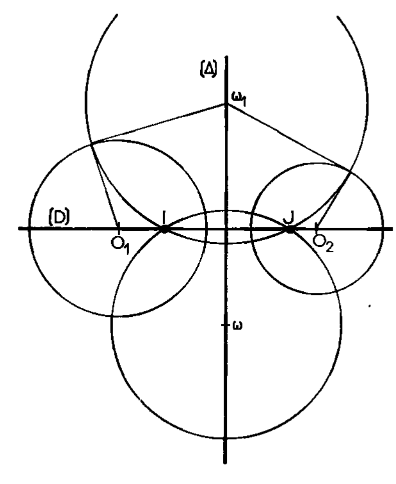


Fig. 8 a.

En particulier, l'un des cercles (ω) est le cercle de diamètre IJ : le faisceau (Φ) est donc un faisceau à points de base I et J puisque ces points sont communs à l'axe radical et à l'un des cercles du faisceau.

On démontre de la même façon que l'ensemble des cercles (O) orthogonaux aux cercles (ω) est **le faisceau (F)**, en effet, le lieu

géométrique de leurs centres est l'axe radical des cercles (ω), diminué du segment IJ, et ρ_1 étant le rayon de l'un des cercles (ω_1) :

$$(\omega_1) \text{ orthogonal à } (O) \Leftrightarrow \mathscr{P}\omega_1/(O) = \rho_1^2, \quad \forall O$$

ce qui montre que l'ensemble des cercles (O) est un faisceau que l'on peut identifier au faisceau (F) puisqu'il contient en particulier les cercles (O_1) et (O_2).

Nous énoncerons :

L'ensemble des cercles orthogonaux aux cercles d'un faisceau à points limites est un faisceau à point de base, et réciproquement, l'ensemble des cercles orthogonaux aux cercles d'un faisceau à points de base est un faisceau à points limites : les points limites de l'un sont les points de base de l'autre.

Les deux faisceaux sont appelés **faisceaux de cercles orthogonaux.** (On dit aussi faisceaux de cercles conjugués).

Étudions le cas ou le faisceau (F) est un faisceau singulier.

L'ensemble des centres des cercles orthogonaux aux deux cercles (O_1) et (O_2) est l'axe radical (Δ) entier, et pour qu'un cercle (ω), centré sur cette tangente au cercle (O_1) soit orthogonal à (O_1), il faut et il suffit qu'il appartienne au faisceau singulier (Φ) admettant (D) pour axe radical et A pour point de contact. Un tel cercle est alors orthogonal à tous les cercles tangents à (Δ) en A, donc à tous les cercles (O) du faisceau (F).

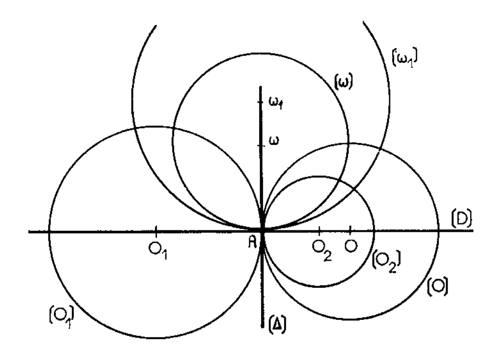


Fig. 8 b.

L'ensemble des cercles orthogonaux aux cercles d'un faisceau singulier est un faisceau singulier ; l'axe radical de l'un des faisceaux est la droite des centres de l'autre.

9. Lieu géométrique.

On se propose de chercher l'ensemble des points M dont le rapport des puissances par rapport à deux cercles donnés (O_1) et (O_2) est constant, soit :

$$\frac{\mathscr{P}M/(O_1)}{\mathscr{P}M/(O_2)} = k.$$

Si k = 1, le lieu cherché est l'axe radical (Δ) des deux cercles.

Si k ≠ 1 : on appelle Hm la distance de l'un des points M à l'axe radical, et (O) le cercle (unique) passant par M et appartenant au faisceau déterminé par (O_1) et (O_2).

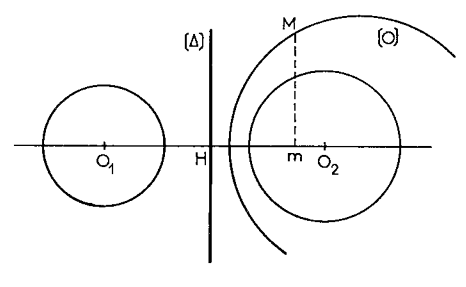


Fig. 9.

On aura successivement :

$$\mathscr{P}M/(O) = 0$$

$$\mathscr{P}M/(O_1) = \mathscr{P}M/(O_1) - \mathscr{P}M/(O) = 2\,\overline{O_1O}.\overline{Hm}$$

$$\mathscr{P}M/(O_2) = \mathscr{P}M/(O_2) - \mathscr{P}M/(O) = 2\,\overline{O_2O}.\overline{Hm}$$

et en faisant le rapport : $\dfrac{\mathscr{P}M/(O_1)}{\mathscr{P}M/(O_2)} = \dfrac{\overline{OO_1}}{\overline{OO_2}}$

il en résulte que : $\dfrac{\mathscr{P}M/(O_1)}{\mathscr{P}M/(O_2)} = k \Leftrightarrow \dfrac{\overline{OO_1}}{\overline{OO_2}} = k$

la relation $\dfrac{\overline{OO_1}}{\overline{OO_2}} = k$ montre que le cercle (O) est déterminé pour une valeur de k : son centre est le point qui divise le segment O_1O_2 dans le rapport k. Pour tout point $M \in (O)$ la relation imposée est vérifiée.

L'ensemble des points dont le rapport des puissances par rapport à deux cercles (O_1) et (O_2) est égal à k, est le cercle du faisceau déterminé par (O_1) et (O_2), dont le centre divise O_1O_2 dans le rapport k.

EXERCICES

226. Construire un cercle de centre O donné et appartenant à un faisceau donné par :

1° Deux points de base A et B ;
2° Deux points limites I et J ;
3° Le point de contact et l'axe radical (Δ) (faisceau singulier) ;
4° Un cercle (O′) du faisceau et l'axe radical (Δ) extérieur à (O′).

227. Construire un cercle (O) passant par un point donné M et appartenant à un faisceau donné par :

1° Le point de contact A et l'axe radical (Δ) (faisceau singulier) ;
2° Deux points de base A et B ;
3° Deux points limites I et J ;
4° Un cercle (O′) du faisceau et l'axe radical (Δ) extérieur à (O′).

228. Construire un cercle (O) tangent à une droite donnée (D) et appartenant à un faisceau donné par :

1° Le point de contact A et l'axe radical (Δ) (faisceau singulier) ;
2° Deux points de base A et B ;
3° Deux points limites I et J ;
4° Un cercle (O′) du faisceau et l'axe radical (Δ) extérieur à (O′).

229. Construire un cercle (O′) tangent à un cercle donné (C) et appartenant à un faisceau donné par :

1° Un cercle (O) et l'axe radical (Δ) extérieur à (O) ;
2° Deux points de base A et B ;
3° Deux points limites I et J ;
4° Le point de contact A et l'axe radical (Δ) (faisceau singulier).

230. Construire un cercle (O′) orthogonal à un cercle (C) donné et appartenant à un faisceau donné par un cercle (O) et l'axe radical (Δ).

231. Construire un cercle (O) tangent à un cercle donné (C), à une droite donnée (D), et passant par un point donné A.

Construire un cercle (O) tangent à une droite donnée (D′) et à deux cercles donnés (A) et (C′).

232. Construire un cercle (O) passant par deux points A et B et interceptant soit :

1° sur une droite donnée (D) une corde MN de longueur donnée *l*.
2° sur un cercle donné (C) une corde commune MN de longueur donnée *l*.

233. On donne trois cercles d'un faisceau, de centres O_1, O_2, O_3 tels que O_2 soit le milieu de O_1O_3.

P étant un point quelconque de leur plan, démontrer la relation :

$$2\mathscr{P}P/(O_2) = \mathscr{P}P/(O_1) + \mathscr{P}P/(O_3)$$

234. Trois cercles (O_1), (O_2), (O_3) ont leurs centres alignés. Quelle relation doit exister entre leurs rayons et les distances entre leurs centres pour que ces cercles appartiennent à un même faisceau.

235. Étant donné un segment fixe AB et un nombre arithmétique k variable montrer que l'ensemble des cercles d'Apollonius relatifs au segment AB est un faisceau.

Montrer que l'ensemble des cercles capables de l'angle de droite (MA, MB) = α est un faisceau si α prend toute valeur de 0 à π.

Comparer les deux faisceaux.

236. On donne un triangle ABC, rectangle en A, de hauteur AH fixe ; les sommets B et C sont variables. H se projette orthogonalement sur AB en D, et sur AC en E. Montrer que le quadrilatère CBDE est inscriptible et que les cercles circonscrits à ces quadrilatères forment un faisceau.

237. On donne quatre points A, B, C, D alignés se succédant dans cet ordre. On considère l'ensemble des cercles (C) passant par A et B, et l'ensemble des cercles (Γ) passant par C et D. Montrer que l'axe radical d'un cercle (C) et d'un cercle (Γ) quelconques passe par un point fixe.

Trouver le lieu des points de contact d'un cercle (C) et du cercle (Γ) qui lui est tangent, quand le cercle (C) varie.

238. Soient, dans le plan, deux axes rectangulaires, Ox et Oy, sur chacun desquels on choisit la même unité de longueur.

On donne l'équation :

$$(2m + 1)x^2 + (m - 3)x - m = 0$$

dans laquelle x désigne l'inconnue et m un paramètre.

1° Aux racines x' et x'' de cette équation correspondant à une valeur de m, on associe les points M′ et M″ de l'axe Ox tels que $\overline{OM'} = x'$ et $\overline{OM''} = x''$ et l'on considère le cercle (Ω) de diamètre M′M″.

a) P étant un point quelconque du plan, de coordonnées x et y, évaluer la puissance p de P par rapport à (Ω) en fonction de m et des coordonnées de P.

b) En déduire que l'on peut choisir P de manière que p soit nul quel que soit m.

c) Caractériser la famille des cercles (Ω).

2° *a)* A étant un point fixe de l'axe Oy, d'ordonnée a, montrer que les cercles circonscrits au triangle AM′M″ appartiennent à un faisceau (F) que l'on caractérisera.

b) Déterminer l'équation de l'axe radical du faisceau.

239. On donne deux axes de coordonnées rectangulaires $x'Ox$, $y'Oy$, le point O′$(3a, 0)$, la droite (D) d'équation $y = a$ et le point M d'abscisse x, variable sur (D). On désigne par (O) le cercle de centre O et de rayon $a\sqrt{2}$, par (O′) le cercle de centre O′ et de rayon a.

1° Calculer en fonction de a et x les puissances P et P′ du point M par rapport aux cercles (O) et (O′).

Étudier les variations de $z = P/P'$ quand M décrit (D). Graphe.

Pour quelles positions de M le rapport z a-t-il une valeur donnée k ? Discuter suivant les valeurs de k.

2° On se place dans l'hypothèse où il existe deux points M′ et M″ de (D) pour lesquels $z = k$. Évaluer le rapport dans lequel le segment OO′ est partagé par le point C de Ox qui a même abscisse que le milieu de M′M″. Montrer que, pour tout point du cercle (C) de centre C qui passe par M′ et M″, le rapport des puissances aux cercles (O) et (O′) est égal à k.

Comparer les axes radicaux des trois cercles (O), (O′), (C) pris deux à deux.

Que peut-on dire des cercles (C) lorsque k prend toutes les valeurs compatibles avec l'hypothèse faite au début de cette question ? Y a-t-il d'autres cercles lieux de points dont le rapport des puissances par rapport à (O) et (O′) garde une valeur constante ?

Tout point de l'axe Ox peut-il être le centre d'un tel cercle ?

3° Construire les points de Poncelet, I et J, du faisceau défini par (O) et (O′). Un cercle de diamètre MN est orthogonal aux cercles (O) et (O′). Comment peut-on utiliser les points I et J pour la construction graphique de N (M est donné).

On projette I et J en I′ et J′ sur (D) puis M et N en M′ et N′ sur Ox. Montrer que IM et J′N′ sont parallèles, ainsi que JM et I′N′.

Évaluer, en fonction de NN′, la puissance de N par rapport au cercle circonscrit à IJJ′I′.

240. 1° On considère un faisceau de cercles déterminés par deux cercles fixes tangents en un point O. Sur un de ces cercles on prend deux points fixes A et B. On considère tous les cercles passant par A et B et tangents à un cercle du faisceau. Ensemble des points de contact M.

2° On considère deux faisceaux de cercles déterminés le premier par l'axe radical (Δ_1) auquel les cercles sont tangents au point O_1 sur cet axe, le second par l'axe radical (Δ_2) auquel les cercles sont tangents en un point O_2 situé sur cet axe.

Ensemble des points de contact des cercles du premier faisceau tangents aux cercles du second faisceau.

3° On considère deux faisceaux de cercles : le premier donné par ses points de Poncelet I_1 et L_1, le second par ses points de Poncelet I_2 et L_2. Les droites I_1L_1 et I_2L_2 se coupent. Ces deux faisceaux sont supposés avoir un cercle commun (C).

a) Montrer que I_1, L_1, I_2, L_2 sont sur un même cercle.

b) Ensemble des points de contact des cercles du premier faisceau tangents aux cercles du second faisceau.

241. 1° Étudier les variations de la fonction $y = \dfrac{3x^2}{3x^2 + 2x - 1}$.

Construire son graphe (C) par rapport à un repère orthonormé (asymptotes, point d'intersection A de la courbe avec son asymptote parallèle à $x'x$, tangente en ce point).

2° Soit (D) la droite d'équation $y = k$, où k désigne un nombre relatif donné. Étudier, suivant la valeur de k, le nombre de points communs à (D) et (C), d'abord d'après le graphique, ensuite par le calcul.

k étant choisi de telle façon que (D) et (C) aient deux points communs, M et M′, et H et H′ étant leurs projections sur l'axe des x, démontrer que le cercle (Γ) de diamètre HH′ appartient, quel que soit k, à un même faisceau (F) à points limites, ces derniers étant les projections orthogonales sur l'axe des x des points de (C) où la tangente a une pente nulle.

Que devient le cercle (Γ) quand k tend vers l'infini ?

Vérifier que l'axe radical du faisceau (F) passe par le point A. Ce fait pouvait-il être prévu ?

3° Soit (Δ) la droite d'équation $y = mx$ où m désigne un nombre relatif donné. Montrer que (Δ) et (C) ont, en général, en dehors du point O, deux points communs

et P′. Démontrer que, N et N′ étant les projections de ces points sur l'axe des x, la puissance du point O par rapport au cercle (γ) de diamètre NN′ a une valeur indépendante de m. En conclure que le cercle (γ) appartient, quel que soit m, à un même faisceau (Φ) à points de base. Que devient le cercle (γ) quand m tend vers l'infini ? En déduire l'existence d'un cercle commun aux faisceaux (F) et (Φ). Peut-il en avoir d'autres ?

242. Soient deux points fixes A et A′. On désignera par (C) et (C′) deux cercles, tangents à la droite AA′ en A et A′ respectivement ; soient O et O′ leurs centres respectifs.

1° Démontrer qu'à tout cercle (C) on peut associer un cercle (C′) qui lui est orthogonal. Écrire une relation entre la longueur AA′ et les rayons des cercles (C) et (C′).

Dans tout ce qui suit, les cercles (C) et (C′) sont orthogonaux.

2° Montrer que le deuxième point d'intersection de la droite OA′ avec (C′) est la projection orthogonale de A sur OA′.

Montrer que OA′ et O′A se coupent sur l'axe radical des deux cercles (C) et (C′).

3° Lieu des points d'intersection M et N des cercles (C) et (C′).

4° On désigne par (Γ) le cercle de diamètre OO′. Montrer que les cercles (Γ) appartiennent à un faisceau à points limites, I et J, que l'on déterminera.

5° Dans cette question, on suppose que le cercle (C) et le point A sont fixes, mais A′ n'est plus fixe sur la tangente en A au cercle (C). Les cercles (C) et (C′) étant toujours orthogonaux et le cercle (C′) étant tangent en A′ à la droite AA′, déterminer le lieu du centre de (C′).

243. Soient deux points fixes distincts A et B. O désignant le milieu de AB, on pose OA = OB = a. On désigne par $x'Ax$ et $y'By$ deux axes parallèles fixes orientés dans le même sens et respectivement perpendiculaires en A et B à la droite AB.

Deux points M et N varient respectivement sur $x'Ax$ et $y'By$ de manière que $\overline{AM}.\overline{BN} = \lambda a^2$ (λ est un nombre relatif donné, différent de zéro). On désigne par ω le milieu de MN et par (ω) le cercle de diamètre MN.

1° Quelles sont les puissances des points A, B et O par rapport au cercle (ω) ? Montrer que les cercles (ω) appartiennent à un faisceau fixe (F). Préciser, suivant les valeurs de λ, les positions des points de base ou des points limites de ce faisceau.

2° Dans l'hypothèse où λ est égal à l'unité, montrer que la droite MN reste tangente à un cercle fixe.

3° On se place dans l'hypothèse où le faisceau (F) a des points limites distincts C et D. Lorsqu'elle n'est pas parallèle à AB, la droite MN coupe la droite AB en I. On pose α = (IO, IC) et β = (IO, Iω) ; α et β sont des angles de droites.

Montrer que $IC^2 = IM.IN$. Vérifier que le produit $IM.IN \sin^2\beta$ demeure constant lorsque M et N varient.

Exprimer le rapport $\dfrac{|\sin \alpha|}{|\sin \beta|}$ en fonction de λ.

Soit φ le symétrique de C par rapport à la droite MN. Montrer que le rapport $\dfrac{CD}{D\varphi}$ est indépendant des positions des points M et N. En déduire le lieu géométrique du point φ.

4° On se place dans l'hypothèse où le faisceau (F) admet des points de base, E et F distincts. Soit H la projection orthogonale de F sur la droite MN. Montrer que les droites HA et HB sont perpendiculaires. Lieu de H.

CHAPITRE 18

POLAIRE D'UN POINT PAR RAPPORT A UN CERCLE

1. Rappels du cours de Première.

Division harmonique.

Deux couples de points alignés, A et B, C et D forment une division harmonique si la relation $\dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\dfrac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$ est vérifiée.

On écrira (A, B, C, D) est harmonique

ou bien (A, B, C, D) $= -1$.

On dit que les points C et D sont conjugués harmoniques par rapport aux points A et B, et réciproquement les points A et B sont conjugués harmoniques par rapport aux points C et D.

Si l'on choisit une origine O sur la droite AB, et si l'on pose $\overline{OA} = a$, $\overline{OB} = b$, $\overline{OC} = c$ et $\overline{OD} = d$, on montre que :

(A, B, C, D) harmonique $\Leftrightarrow (a + b)(c + d) = 2(ab + cd)$

si l'origine O est le milieu du segment OA t.

(A, B, C, D) harmonique $\Leftrightarrow OA^2 = OB^2 = \overline{OC}.\overline{OD}$;

si le point A est pris pour origine :

(A, B, C, D) harmonique $\Leftrightarrow \dfrac{2}{\overline{AB}} = \dfrac{1}{\overline{AC}} + \dfrac{1}{\overline{AD}}$.

Faisceau harmonique.

On appelle faisceau harmonique, un ensemble de quatre droites concourantes ou parallèles passant par les quatre points d'une division harmonique.

On le note O.ABCD est harmonique

ou bien (D_1, D_2, D_3, D_4) harmonique.

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un faisceau de 4 droites concourantes soit harmonique, est que 3 des droites déterminent des segments égaux sur une parallèle à la quatrième.

Un faisceau harmonique détermine une division harmonique sur toute sécante parallèle à l'un des rayons.

Une condition nécessaire et suffisante pour que deux rayons conjugués d'un faisceau harmonique soient perpendiculaires, est qu'ils soient les bissectrices des angles des deux autres rayons.

Polaire d'un point par rapport à deux droites.

Deux points P et Q sont dits conjugués par rapport à deux droites (D_1) et (D_2) si ces deux droites déterminent sur la droite PQ une division harmonique.

On appelle polaire d'un point P par rapport à deux droites (D_1) et (D_2) l'ensemble des points conjugués du point P par rapport à ces deux droites.

La polaire d'un point P, par rapport à deux droites (D_1) et (D_2) sécantes en O, est le rayon (D_4) du faisceau harmonique (D_1, D_2, OP, D_4).

La polaire d'un point P, par rapport à deux droites parallèles (D_1) et (D_2) est le rayon (D_4) du faisceau harmonique (D_1, D_2, D_3, D_4) dans lequel le rayon (D_3) est la parallèle à (D_1) et (D_2) passant par P.

Le point P est appelé pôle de la droite (D_4) par rapport à (D_1) et (D_2).

Si la polaire d'un point P par rapport à deux droites (D_1) et (D_2) passe par un point Q, la polaire du point Q par rapport aux mêmes droites passe par P.

Quadrilatère complet.

On appelle quadrilatère complet la figure formée par quatre droites (ou côtés) non concourantes trois à trois.

Les points communs à deux côtés sont appelés sommets, et les droites, autres que les côtés, joignant deux sommets sont appelés diagonales.

Dans un quadrilatère complet, chaque diagonale est divisée harmoniquement par les deux autres.

2. Définitions.

Deux points P et Q sont conjugués par rapport à un cercle (O) si le cercle de diamètre PQ est orthogonal au cercle (O).

Il résulte de cette définition et d'une propriété caractéristique des cercles orthogonaux (n° 16-2) que si la droite PQ coupe le cercle (O) en deux points E et E′, la division (P, Q, E, E′) est harmonique.

L'ensemble des points Q conjugués d'un point P par rapport à un cercle (O) est appelé polaire du point P par rapport à ce cercle.

3. Détermination de la polaire d'un point par rapport à un cercle.

Si la droite PO coupe le cercle (O) en A et B et recoupe le cercle (PQ) en H, on sait que :

(PQ) orthogonal à (O) $\Leftrightarrow$ (P, H, A, B) harmonique ou bien, si l'on appelle R le rayon du cercle (O) :

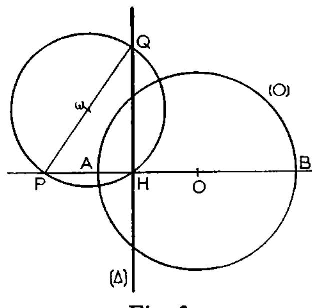


Fig. 3.

(PQ) orthogonal à (O) $\Leftrightarrow \overline{OH}.\overline{OP} = R^2$

Or l'angle inscrit PHQ est droit, donc H est la projection orthogonale du point Q sur la droite PO, et les cercles (PQ) et (O) sont orthogonaux si, et seulement si, le point Q se projette orthogonalement sur la droite OP en H conjugué harmonique du point P par rapport à A et B. Il en résulte que l'ensemble des points Q est une droite.

La polaire d'un point P par rapport à un cercle (O) de rayon R est la perpendiculaire à la droite OP en H tel que $\overline{OH}.\overline{OP} = R^2$.

4. Position de la polaire.

La relation $\overline{OH}.\overline{OP} = R^2$ montre que $\overline{OP}$ et $\overline{OH}$ ont même signe donc qu'un point et sa polaire sont d'un même côté du centre du cercle.

• **si OP > R,** c'est-à-dire si le point **P est extérieur** au cercle (O) on aura OH < R, le point H est donc intérieur au cercle (O) et la polaire (Δ) coupe le cercle.

Dans ce cas, il existe deux tangentes au cercle (O) issues de P. Si T et T′ sont les points de contact, les cercles de diamètre PT et PT′ sont orthogonaux au cercle (O) donc T et T′ appartiennent à la polaire (Δ).

• **si OP = R,** c'est-à-dire si **P est un point du cercle (O),** on aura OH = R, alors P et H sont confondus et la polaire du point P est la tangente au cercle (O) en P.

• **si OP < R,** c'est-à-dire **si P est intérieur au cercle (O),** on aura OH > R, la polaire du point P est extérieure au cercle (O).

• si le point P tend vers O, OH → ∞.

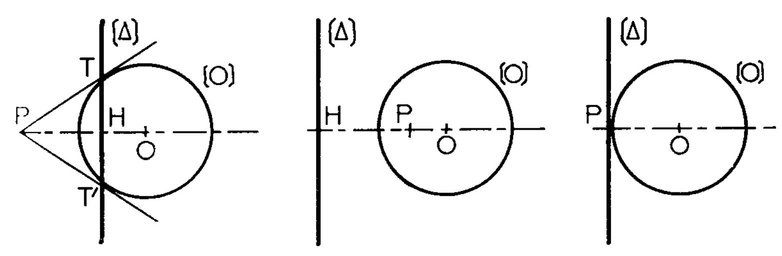


Fig. 4.

5. Propriétés de la polaire.

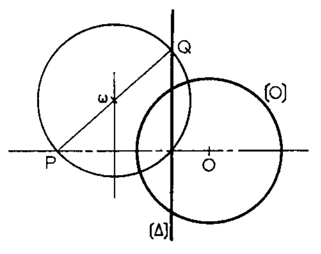


Fig. 5.

Un cercle de diamètre PQ orthogonal au cercle (O) est aussi orthogonal au cercle-point P, donc l'ensemble des centres ω des cercles (PQ) est l'axe radical de ces deux cercles (voir n° 16-3).

D'autre part, Q est l'homologue du centre ω dans l'homothétie (P, 2) par conséquent :

La polaire d'un point P par rapport à un cercle (O) est l'homologue dans l'homothétie (P, 2) de l'axe radical du cercle (O) et du cercle-point P.

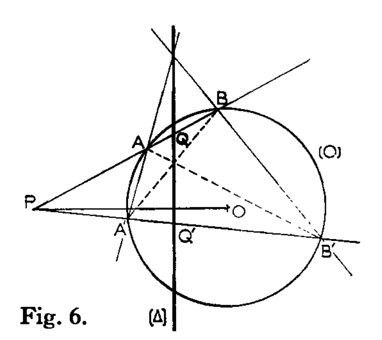


Fig. 6.

Construction de la polaire.

Si l'on mène par le point P deux sécantes quelconques PAB et PA'B' au cercle (O), il existe sur ces sécantes deux points Q et Q' conjugués du point P par rapport au cercle (O) et ces points appartiennent aussi à la polaire du point P par rapport aux droites AA' et BB' ; on sait construire cette polaire : elle passe par les points communs aux droites AA' et BB', AB' et A'B respectivement (cours de première).

7. Réciprocité polaire.

D'après la définition de la polaire d'un point :

P et Q conjugués ⇔ P appartient à la polaire de Q

P et Q conjugués ⇔ Q appartient à la polaire de P.

Ces trois propriétés étant équivalentes, il en résulte :

1) Si un point P appartient à la polaire d'un point Q par rapport à un cercle, le point Q appartient à la polaire du point P par rapport à ce cercle. Cette propriété est appelée réciprocité polaire.

2) Si un point décrit une droite, sa polaire tourne autour du pôle de cette droite.

3) Si une droite tourne autour d'un point, son pôle décrit la polaire de ce point.

8. Droites conjuguées par rapport à un cercle.

On appelle droites conjuguées par rapport à un cercle deux droites dont les pôles sont conjugués.

Il résulte de la réciprocité polaire que si deux droites sont conjuguées par rapport à un cercle, chacune passe par le pôle de l'autre par rapport à ce cercle.

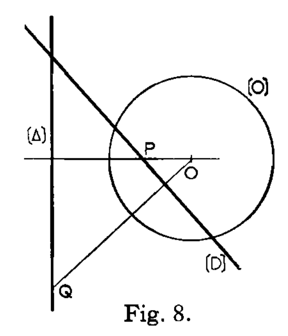


Fig. 8.

Inversement, si l'une des droites passe par le pôle de l'autre, les deux pôles sont conjugués, donc les droites sont elles-même conjuguées par rapport au cercle.

9. Applications.

Pour montrer que plusieurs points sont alignés, il suffit de montrer :

- soit qu'ils sont conjugués d'un même point par rapport à un même cercle ;
- soit que leurs polaires sont concourantes.

Pour montrer que plusieurs droites sont concourantes, il suffit de montrer :

- soit que leurs pôles par rapport à un même cercle sont alignés sur une même droite ;
- soit qu'elles sont conjuguées d'une même droite par rapport à un même cercle.

10. Triangle conjugué ou triangle autopolaire.

On appelle triangle conjugué ou triangle autopolaire un triangle dont chaque côté est la polaire du sommet opposé par rapport à un cercle.

Construction et existence.

Soit un cercle (O), un point P_1 et sa polaire (Δ_1). Tout point P_2 de la droite (Δ_1) a pour polaire une droite (Δ_2) passant par P_1 d'après la réciprocité polaire.

La droite P_1P_2 a pour pôle le point P_3 intersection de (Δ_1) et (Δ_2) et le triangle $P_1P_2P_3$ est conjugué.

OP_1 et OP_2 sont respectivement perpendiculaires aux

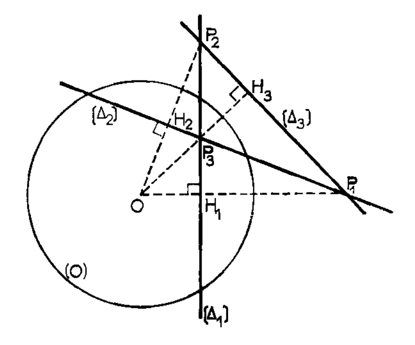


Fig. 10.

côtés (Δ_1) et (Δ_2) en H_1 et H_2 ce qui montre que O est l'orthocentre du triangle ; cet orthocentre est extérieur au triangle puisque l'on sait que le pôle et sa polaire sont d'un même côté du centre du cercle, donc le triangle est obtusangle.

Réciproquement, tout triangle obtusangle $P_1P_2P_3$ est conjugué par rapport à un cercle (unique) ayant pour centre l'orthocentre, en effet :

$$P_1H_1H_2P_2 \text{ inscriptible} \Leftrightarrow \overline{OP_1}.\overline{OH_1} = \overline{OP_2}.\overline{OH_2}$$

$$P_1H_1H_3P_3 \text{ inscriptible} \Leftrightarrow \overline{OP_1}.\overline{OH_1} = \overline{OP_3}.\overline{OH_3}$$

si le triangle est obtusangle, O est extérieur au triangle et $\overline{OP_1}.\overline{OH_1} > 0$ et alors il existe un point R (unique) tel que $R^2 = \overline{OP_1}.\overline{OH_1}$

$$\left.\begin{array}{l}\overline{OP_1}.\overline{OH_1} = R^2 \\ P_2P_3 \perp OH_1\end{array}\right\} \Rightarrow P_1 \text{ est le pôle de } P_2P_3$$

et ainsi pour chaque sommet qui est le pôle du côté opposé par rapport au cercle (O, R).

11. Problème.

On appelle **quadrangle harmonique** un ensemble de 4 points A, B, C, D d'un cercle (O), tel que les droites AB et CD soient conjuguées par rapport à ce cercle.

Montrer que, quel que soit le point S du cercle, si le quadrangle ABCD est harmonique le faisceau S.ABCD est harmonique.

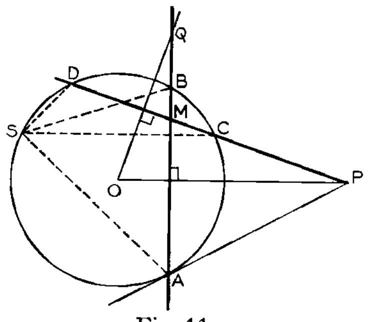


Fig. 11.

Soit P le pôle de la droite AB par rapport au cercle (O) passant par A, B, C et D et soit M l'intersection des droites AB et CD : les points P et M sont conjugués par rapport au cercle (O) donc la division (P, M, C, D) est harmonique et le faisceau A.PMCD est harmonique.

P étant le pôle de AB, la droite AP est tangente en A au cercle (O) donc :

$$(AB, AP) = (SB, SA) \quad \text{mod. } \pi$$

or on a aussi :

$$(AB, AC) = (SB, SC)$$

$$(AB, AD) = (SB, SD)$$

ces trois égalités montrent que les faisceaux A.PBCD et S.ABCD sont superposables donc que le faisceau S.ABCD est lui-même harmonique.

Nous laissons au lecteur le soin d'établir la réciproque à titre d'exercice.

EXERCICES

244. On donne deux cercles (O) et (O′). S étant l'un de leurs centres d'homothétie, démontrer que les polaires de S par rapport aux deux cercles (O) et (O′) sont équidistantes de l'axe radical de ces deux cercles.

245. Construire un cercle (C) passant par un point donné A et tel que la polaire d'un point donné P par rapport à ce cercle soit une droite donnée (D).

246. Construire un cercle (C) tangent à une droite donnée (D) et tel que la polaire d'un point donné P par rapport à ce cercle soit une droite donnée (Δ).

247. Ensemble des points A et B conjugués par rapport à trois cercles (O_1), (O_2) et (O_3).

248. Montrer que dans un triangle ABC inscrit dans un cercle (O), la droite (D′) symétrique de la médiane AM par rapport à la bissectrice AD passe par le pôle P de la corde BC par rapport au cercle (O).

249. On donne un cercle (O) de diamètre AB et un point P sur la droite AB ; sa polaire (Δ) de P par rapport à (O) coupe le diamètre AB au point Q. Par le point P on mène la sécante PCD qui coupe le cercle (O) en C et D ; les points C et D se projettent en E et F sur le diamètre AB.

1° Montrer que, par rapport au cercle de diamètre PQ, la droite EC est la polaire de F, la droite DF est la polaire de E.

2° Déterminer la sécante PCD de telle manière que le segment EF ait une longueur donné *l*.

250. Le cercle inscrit dans le triangle AOB rectangle en O touche les côtés OA, AB et OB aux points C, D et E respectivement. Du point C on abaisse la perpendiculaire CP sur DE. Montrer que l'angle OPA est droit.

251. 1° D'un point P on mène une sécante quelconque PAB au cercle (O) et la droite (D) perpendiculaire à OP en P. Montrer que les tangentes en A et B coupent la droite (D) en deux points M et M′ équidistants du point P.

2° On donne un cercle (O) et un point P extérieur au cercle ; du point P on mène les tangentes PA et PB au cercle (O). On trace le diamètre AOC et du point B on mène BD perpendiculaire à ce diamètre. Montrer que la droite PC passe par le milieu du segment BD.

252. On inscrit dans un cercle (O) un quadrilatère ABA′B′ dont la base AB est fixe et le côté A′B′ est variable. Les diagonales AA′ et BB′ se coupent en E et les côtés AB′ et A′B se coupent en F. Montrer que la droite EF passe par un point fixe.

253. On donne un cercle fixe (O), un point fixe P et une sécante variable PAB au cercle (O). M étant un point fixe, MA et MB recoupent le cercle en A′ et B′. Montrer que la droite A′B′ passe par un point fixe quand PAB tourne autour de P.

254. Un point M mobile décrit le cercle (O) circonscrit à un triangle ABC. La polaire de M par rapport à AB et AC recoupe le cercle en M′. Montrer que la droite MM′ passe par un point fixe et que son pôle décrit une droite fixe.

255. On donne un triangle ABC circonscrit à un cercle (O) et A′, B′, C′ les points de contact. Les bissectrices des angles B et C coupent B′C′ en D et E, et les droites BE et CD se coupent en I. Montrer que IO est perpendiculaire à BC.

256. Les bissectrices intérieures d'un triangle ABC recoupent respectivement le cercle circonscrit aux points A', B', C'. Montrer que les couples de tangentes en A et A', en B et B', en C et C' se coupent en trois points alignés.

257. On donne un triangle ABC, les points de contact α, β, γ des côtés BC, CA, AB et du cercle inscrit (O), les points de contact α', β', γ' de ces côtés et du cercle (O') exinscrit dans l'angle A. αO coupe $\beta\gamma$ en M et α'O' coupe $\beta'\gamma'$ en M'. Montrer que les points A, M, M' et le milieu I de BC sont alignés.

258. On donne trois cercles (O), (O'), (O") dont les centres ne sont pas alignés. Ensemble des points P dont les polaires par rapport à ces trois cercles sont concourantes.

259. Dans le plan d'un cercle (O) on donne trois points A, B et C. Construire deux sécantes AMN et AM'N' issues de A telles que MM' passe par B et que NN' passe par C.

260. On donne dans un plan un point fixe A, un cercle (O) et un diamètre mobile MN de ce cercle. Les droites AM et AN recoupent le cercle en M' et N'. Les droites MN' et M'N se coupent en E et les droites MN et M'N' en F.

1° Ensemble des points E.

2° Montrer que le cercle AMN passe par un point fixe.

3° Montrer que la droite M'N' passe par un point fixe.

4° Montrer que le cercle AM'N' passe par un point fixe.

261. On donne un cercle (O), un point fixe A de ce cercle et une corde BC se déplaçant parallèlement à une direction (δ).

1° Montrer que la polaire par rapport au cercle (O) de l'orthocentre H du triangle ABC passe par un point fixe P.

2° Ensemble des points P lorsque A décrit le cercle (O).

262. On donne deux cercles fixes (O) et (O') et un cercle variable (M) tangent à (O) en I et orthogonal à (O') qu'il coupe en H et K. Soient P l'intersection de HK et IO', Q l'intersection de HK et de la tangente en I aux cercles (O) et (M) ; IO' recoupe le cercle (M) en N.

1° Lieu du point Q. Déterminer sa polaire par rapport au cercle (M) et par rapport au cercle (O'). En déduire que la droite MP passe par un point fixe.

2° Montrer que la droite MN passe par un point fixe.

3° Montrer que le cercle (M) est tangent à un deuxième cercle fixe.

263. On donne un cercle (O) de diamètre AB et un point I de la droite AB extérieur au cercle (O). On mène une tangente IP et une sécante ICD puis on joint C et D au point M diamétralement opposé à P.

1° Montrer que les droites MC et MD coupent AB en des points E et F symétriques par rapport au point O.

2° Réciproquement, étant donnés un cercle (O), un diamètre AB et sur ce diamètre deux points E et F symétriques par rapport à O, on joint E et F à un point quelconque M du cercle (O) ; les droites ME et MF coupent le cercle en C et D. Soit P le point diamétralement opposé à M, montrer que la droite CD et la tangente en P se coupent sur la droite AB.

3° Étant donnés un cercle (O), un diamètre AB et une corde CD, construire un point M situé sur le cercle et tel que les droites MC et MD rencontrent le diamètre AB en des points E et F symétriques par rapport à O.

264. On donne dans un plan un point fixe O. Soit (C) un cercle variable de ce plan, de centre I et de rayon égal à OI/2. On désigne par (Δ) la polaire de O par rapport à (C), par J le point d'intersection de (Δ) avec OI.

1° Évaluer le rapport $\overline{OI}/\overline{OJ}$

2° On suppose que (Δ) passe par un point fixe A.
a) Montrer que (C) reste orthogonal à un cercle fixe.
b) Ensemble des points I.
c) Ensemble des points communs à (Δ) et (C).

3° On suppose que (C) passe par un point fixe B. Ensemble des points I et J.

4° Construire (C) connaissant un de ses points, B et un point A de (Δ). Montrer que si V est le symétrique de O par rapport à B, la condition de possibilité est : $|AV - AO| \leqslant OB$.

265. On donne un cercle (C) de centre O et de rayon R, et une droite (D) extérieure à ce cercle. P étant un point quelconque de (D), on considère les deux homothéties de centre P transformant respectivement le cercle (C) en deux cercles (C_1) et (C_2) dont les centres O_1 et O_2 sont sur le cercle (C).

1° Démontrer que les cercles (C_1) et (C_2) sont tangents et que la tangente en leur point de contact passe par un point fixe F lorsque P varie sur (D). On posera OI $= d$.

2° Soient A et B les extrémités du diamètre du cercle (C) passant par F et soit I un point fixe du cercle (C). On choisit les notations de façon que O_1 soit sur le demi-cercle AIB. On posera $\widehat{OFI} = \alpha$ et $\widehat{OFO_1} = \theta$.

On désigne par T la projection orthogonale de F sur la droite OO_1 et par K la projection orthogonale de O_1 sur la droite FI.

Exprimer le rapport FK/FT en fonction de R, d, α, θ. On pourra commencer par exprimer FK et FT en fonction de FO_1 et des données.

Pour quelle valeur de α ce rapport reste-t-il constant lorsque θ varie ? Quelle est alors la valeur de ce rapport ?

3° L'angle α ayant la valeur précédemment trouvée, démontrer que le cercle (C_1) coupe la droite FI en deux points P et Q. Exprimer FP et FQ en fonction de FK et FT. (On suppose FP $<$ FQ). Démontrer que FP/FQ reste constant lorsque O_1 varie sur (C).

266. Soient (O) un cercle fixe de centre O et de rayon r, AB un diamètre fixe de ce cercle, (D) la tangente au cercle (O) au point A et (Δ) la tangente au cercle (O) au point B. Une sécante variable issue de B coupe (D) en P et (O) en R. La droite AR coupe (Δ) en Q. Soit M le milieu de AP.

1° Montrer que MR est tangente en R au cercle (O). Quelles sont les polaires des points M et Q par rapport au cercle (O) ?

Établir que le cercle (Γ) de diamètre MQ est orthogonal à (O).

2° On appelle F et F′ les extrémités du diamètre de (O) perpendiculaire à AB. Montrer que (Γ) est orthogonal à tout cercle passant par F et F′. Quelle est la tangente en M au cercle circonscrit au triangle MFF′ ?

3° MQ coupe BP en S et AB en T.

Montrer que S et T sont conjugués harmoniques par rapport à M et Q et que le cercle circonscrit au triangle SFF′ passe par T.

267. Soient quatre points A, B, C, D situés sur un cercle (Γ) de centre O et tels que M étant un point de (Γ), le faisceau M.ABCD soit harmonqiue.

1° Montrer que si la propriété est vraie pour M, elle est vraie pour tout autre point M′ du cercle (Γ). Que devient, en particulier, cette propriété si M′ est con-

fondu avec l'un des points A, B, C ou D ? Montrer que les droites AB et CD sont conjuguées par rapport au cercle (Γ). Réciproque.

Démontrer que l'on a : $\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB}$.

2° Soient I le milieu de AB, E et F les points de rencontre de la médiatrice de AB avec le cercle (Γ). Montrer que CE et CF sont les bissectrices des angles formés par les droites CD et CI.

3° Montrer que :

a) IC et ID sont symétriques par rapport à AB.

b) $IA^2 = IC.ID$.

c) l'angle CID est double de CAD (si A et I sont d'un même côté de CD).

4° Soit H le point de rencontre de AB et CD.

Démontrer les égalités : $\frac{HC}{HD} = \frac{IC}{ID} = \left(\frac{AC}{AD}\right)^2 = \left(\frac{BC}{BD}\right)^2$.

5° Soit J le milieu de CD. Établir la relation $IC + ID = JA + JB$.

268. Deux cercles fixes inégaux (O) et (O') dont les centres sont respectivement O et O' sont tangents extérieurement en A. Leur axe radical est (D). Un cercle variable (C) dont le centre est désigné par C est tangent en M à (O) et en M' à (O').

1° Montrer que MM' passe par un point fixe P et que le pôle K de (D) par rapport à (C) est sur la droite MM'.

2° Soit H la projection orthogonale de C sur (D). HM et HM' coupent la droite OO' respectivement en I et I'. Montrer que I et I' restent fixes quand (C) varie.

3° (D') est une droite quelconque passant par P. Soient B et B' les pôles de (D') par rapport à (O) et (O') respectivement. Montrer que le milieu du segment BB' se trouve sur (D).

CHAPITRE 19

TRANSFORMATIONS PONCTUELLES GÉNÉRALITÉS

1. Définition.

Si à un point M donné, on associe par une loi déterminée, un autre point M′, on définit une transformation ponctuelle.

Les points M et M′ sont dits **points homologues** ou M′ est dit **transformé** de M.

Si un point M_0 est son propre transformé, on dit que M_0 est un **point double** ou un **point invariant** dans la transformation.

Si, quel que soit M, M′ coïncide avec M, la transformation est dite **transformation-identique.**

Exemples.

1. Soit un point fixe O. A tout point M faisons correspondre le point M′ tel que $\overrightarrow{OM'} = k.\overrightarrow{OM}$ [Homothétie $\mathscr{H}(O, k)$] où k est un nombre réel non nul.

Un point double M_0 est défini par la relation :

$$\overrightarrow{OM_0} = k.\overrightarrow{OM_0} \text{ ou } (1 - k)\overrightarrow{OM_0} = \vec{O}.$$

Ce qui exige :

- *Si* $k \neq 1$, $\overrightarrow{OM_0} = \vec{O}$. Le point O est donc le seul point double ;
- Si $k = 1$, on a : $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM}$. Tout point M est son propre transformé. L'homothétie est alors la transformation identique.

2. Considérons la transformation T (appelée involution) qui, à tout point M d'abscisse x situé sur un axe, associe le point M′ d'abscisse x' de cet axe de sorte que x et x' soient liés par la relation :

$$axx' + b(x + x') + c = 0, \qquad (1)$$

(a, b, c sont des constantes).

M est un point double si $x' = x$, donc si x est racine de l'équation :

$$ax^2 + 2bx + c = 0.$$

Si le point M décrit une figure (F), le point M′ décrit une figure (F′) dite homologue ou transformée de (F).

Une transformation ponctuelle T définit donc une ***application*** d'un ensemble (F) de points de l'espace dans un ensemble (F′) de points.

Si dans la transformation T, tout point de (F) a un transformé et un seul de (F′) et si tout point de (F′) est le transformé d'un seul point de (F), la transformation est une ***bijection***.

Il existe alors une application inverse de (F′) *sur* (F) qui est dite transformation réciproque.

2. Transformation réciproque (ou inverse) d'une transformation.

Soit une transformation T qui transforme le point M en un point M′.

On appelle ***transformation réciproque de la transformation T, la transformation T^{-1} qui transforme M′ en M.***

Exemple.

Dans l'exemple 1 du n° 1 ($k \neq 1$), la transformation T est l'homothétie $\mathcal{H}(0, k)$, elle est définie par $\overrightarrow{OM'} = k.\overrightarrow{OM}$. La transformation réciproque T^{-1} est celle qui transforme M′ en M, elle est définie par :

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{k}\overrightarrow{OM'}.$$

T^{-1} est donc l'homothétie $\mathcal{H}^{-1}$ $(0, 1/k)$.

3. Transformations involutives.

Une transformation est involutive si elle coïncide avec sa réciproque.

Autrement dit, une transformation sera dite involutive si la loi qui transforme un point M en un point M′, transforme aussi M′ en M.

Exemples.

1° L'homothétie sera involutive si : $k = 1/k$ donc si $k = +1$ (transformation identique) ou $k = -1$ (symétrie de centre 0).

2° Dans la relation (1) du n° 1, il est évident que l'on peut permuter x et x'. Autrement dit au point M′ d'abscisse x', la relation

(1) associe le point M d'abscisse x. La relation (1) définit donc une transformation involutive.

4. Produit de deux ou plusieurs transformations.

a) **Produit de deux transformations dans un ordre donné.**

Soient une première transformation T_1 qui transforme une figure (F) en une figure (F_1) et une deuxième transformation T_2 qui transforme (F_1) en (F_2), la transformation unique T qui transforme (F) en (F_2) est appelée **transformation-produit de la première transformation T_1 par la deuxième T_2** ou, plus brièvement, **transformation-produit**.

Pour indiquer que la figure F_1 est la transformée de F par la transformation T_1 on écrira :

$$F_1 = T_1(F).$$

La figure F_2 étant la transformée de F_1 par T_2, on écrira donc :

$$F_2 = T_2(F_1) = T_2[T_1(F)].$$

$T_2 \times T_1$ est alors le produit de la première transformation T_1 par la seconde T_2 et on est amené à *écrire les transformations successives de droite à gauche*. Donc :

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_2 \times \mathbf{T}_1.$$

T^{-1} désignant la transformation réciproque d'une transformation T et I désignant la transformation identique, on a donc :

$$T^{-1} \times T = I.$$

Si T est une transformation involutive nous écrirons :

$$T \times T = I \quad \text{ou} \quad T^2 = I.$$

En général, le produit de deux transformations **n'est pas commutatif** car la transformation produit dépend de l'ordre des transformations composantes (le cours en donne de nombreux exemples).

b) **Produit de plusieurs transformations dans un ordre donné.**

Soient n transformations : $T_1, T_2, T_3, ..., T_n$.

Transformons

une figure	(F)	en (F_1) par la transformation T_1,
puis	(F_1)	en (F_2) par la transformation T_2,
puis	(F_2)	en (F_3) par la transformation T_3.

....

(F_{n-1}) en (F_n) par la transformation T_n.

La transformation unique T qui transforme (F) en (F_n) est appelée **transformation produit des n transformations** ou plus brièvement, **transformation produit.**

Nous écrirons symboliquement :

$$T = T_n \times ... \times T_3 \times T_2 \times T_1.$$

Le produit de *n* transformations peut encore se représenter par le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} & T_1 & & T_2 & & T_3 & & T_n & \\ & \nearrow & (F_1) & \rightarrow & (F_2) & \rightarrow & (F_3) \ldots (F_{n-1}) & \searrow & \\ (F) & & & & \xrightarrow{\quad\quad\quad T \quad\quad\quad} & & & & (F_n) \end{array}$$

Remarque. — Le produit de deux transformations successives n'est pas commutatif en général, il importe de faire le produit des *n* transformations dans l'ordre indiqué.

5. Associativité du produit de n transformations.

Par définition de la transformation produit, on peut transformer (F) en (F_3) en transformant d'abord (F) en (F_2) par la transformation produit : $T' = T_2 \times T_1$ puis en transformant F_2 en F_3 par T_3.

Le produit des *n* transformations s'écrira donc :

$$T = T_n \times ... \times T_3 \times T' = T_n \times ... \times T_3 \times (T_2 \times T_1).$$

On peut aussi transformer (F) en (F_3) en transformant d'abord F en F_1 par T_1, puis F_1 en F_3 par la transformation produit $T'' = T_3 \times T_2$. Donc :

$$T = T_n \times ... \times T'' \times T_1 = T_n \times ... \times (T_3 \times T_2) \times T_1.$$

Deux transformations consécutives peuvent donc être remplacées par leur produit et, inversement une transformation peut être remplacée par deux autres dont elle est le produit.

Théorème. Le produit de plusieurs transformations est associatif.

6. Groupes de transformations.

Un **ensemble de transformations** muni de l'opération produit **est un groupe** si :

1° **Le produit de deux transformations de l'ensemble appartient à l'ensemble** (opération interne).

2° **La transformation identique appartient à l'ensemble** (élément neutre).

3° **Toute transformation de l'ensemble admet une transformation réciproque qui appartient à l'ensemble** (existence de l'élément symétrique).

N. B. — Il est entendu que le produit de plusieurs transformations est associatif (n° 5).

EXERCICES

269. On désigne par T la transformation qui, à un point M d'abscisse x situé sur un axe $x'Ox$, associe le point M' de $x'Ox$ d'abscisse $x' = ax + b$ où a et b sont des nombres réels ($a \neq 0$). A chaque couple (a, b) correspond une transformation T.

1° Trouver les points doubles de la transformation T.

Quelle est la transformation réciproque T^{-1} ? Dans quels cas la transformation T est-elle involutive ?

2° Montrer que, a et b décrivant l'ensemble des nombres réels ($a \neq 0$), l'ensemble des transformations T est un groupe commutatif.

270. A tout point M d'un axe $x'Ox$, d'abscisse x, on associe le point N de cet axe d'abscisse $y = \frac{1 - ax}{x - 2}$, a étant un paramètre.

1° Que peut-on dire de cette transformation dans le cas $a = \frac{1}{2}$?

On suppose dans la suite $a \neq \frac{1}{2}$.

2° Pour quelle position de M le point N est-il rejeté à l'infini sur $x'Ox$? Soit M_0 cette position. Pour quelle position de N le point M est-il à l'infini sur $x'Ox$? Soit N_0 cette position.

3° Quelles sont les abscisses des points doubles P et Q ? Calculer l'abscisse du point I, milieu de PQ.

4° Montrer que l'on peut choisir a de telle façon que, quels que soient M et N homologues dans la transformation, on ait : $\overline{IM}.\overline{IN} = k$. Calculer a et k. Que peut-on dire des points M, N, P, Q ?

5° Les points P et Q peuvent-ils être confondus ?

271. Étant donné un système d'axes orthonormé Ox, Oy, on appelle T la transformation ponctuelle qui, au point M de coordonnées x et y ($xy \neq 0$), associe le point M′ de coordonnées :

$$x' = \frac{a^2}{x} \text{ et } y' = \frac{a^2}{y} \text{ (} a \text{ longueur donnée).}$$

A. 1° Montrer que la transformation T est involutive et qu'elle admet quatre points doubles.

2° Montrer que les droites OM et OM′ sont symétriques par rapport aux bissectrices des droites Ox et Oy.

3° Soient P et Q les projections de M sur Ox et Oy, P′ et Q′ celles de M′.
Montrer que P et P′ d'une part, Q et Q′ d'autre part sont conjugués par rapport au cercle (C) de centre O et de rayon a.
En déduire que PQ et P′Q′ sont les polaires respectives de M′ et M par rapport au cercle (C).

4° PQ et P′Q′ se coupent en I. Montrer que MM′ est perpendiculaire à OI.

B. Dans toute la suite du problème, M décrit la parabole (P) d'équation : $ay = x^2$.

1° Calculer, en fonction de l'abscisse x de M, les coordonnées de M′. En déduire que la parabole (P) est globalement invariante dans la transformation T.

2° Montrer que la droite MM′ passe par le point fixe J(O, $-a$).
En déduire l'ensemble des points I.

3° La parabole (P) passe par deux des points doubles de la transformation T. Montrer que les tangentes en ces deux points à la parabole passent par J.

4° Montrer que les droites JP et OM′ sont parallèles ainsi que JP′ et OM.

(Bacc. Antilles, 1960).

CHAPITRE 20

FIGURES ÉGALES
FIGURES ISOMÉTRIQUES
TRANSLATION

I. FIGURES ÉGALES — DÉPLACEMENTS

On a vu, en Géométrie élémentaire, la définition des triangles égaux, des polygones égaux etc. Il est possible d'en donner une définition plus générale, à l'aide des transformations.

1. Figures planes directement égales.

Soit (F) une figure d'un plan orienté (P), A et B **deux points donnés** de cette figure ; soient A′ et B′ deux points du plan tels que :

$$AB = A'B'.$$

Si à tout point M de la figure (F), on fait correspondre un point M′ tel que

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'M'})$$

et $$AM = A'M'$$

l'ensemble des points M′ est une figure (F′) directement égale à la figure (F).

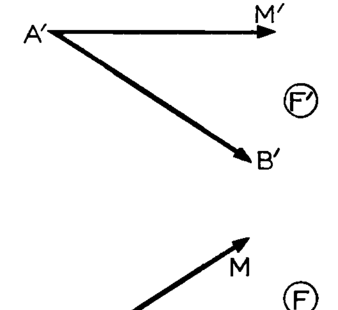


Fig. 1.

Si, par un glissement dans le plan, on amène AB à coïncider avec A′B′, AM prend la direction de A′M′ et M vient en M′.

Leurs éléments homologues (angles, segments, triangles...) sont égaux deux à deux et de même sens.

Cette transformation est appelée : ***déplacement dans le plan.***

Remarques. 1° La figure (F) étant donnée, la figure (F′) égale à (F) sera déterminée si on connaît les homologues A′ et B′ de deux points donnés A et B de (F) (la condition AB = A′B′ étant réalisée). Les couples de points (A, B) et (A′, B′) sont appelés *bases* des figures directement égales (F) et (F′).

2° Si, dans un déplacement plan, deux points homologues A *et* A′ *coïncident ainsi que deux autres points homologues* B *et* B′, *les figures homologues* (F) *et* (F′) *coïncident* car tout point M de (F) coïncide avec son homologue M′.

2. Figures planes inversement égales.

Soient (F) une figure plane d'un plan orienté (P), A et B deux points donnés de cette figure, A′, B′ deux points du plan (P) tels que

$$AB = A'B'.$$

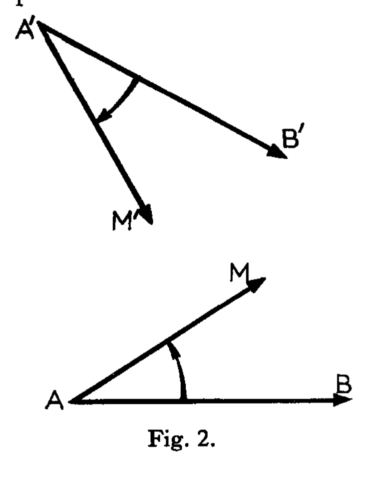


Fig. 2.

Si à tout point M de (F), on fait correspondre un point M′ tel que

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = -(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'M'})$$
$$\text{et} \quad AM = A'M'$$

l'ensemble des points M′ est une figure (F′) inversement égale à la figure (F).

Les deux figures (F) et (F′) ne sont pas superposables par un mouvement *effectué dans le plan.*

3. Figures égales dans l'espace.

Soit (F) une figure de l'espace ; A, B, C trois points donnés **non alignés** de cette figure, A′, B′, C′ trois points tels que :

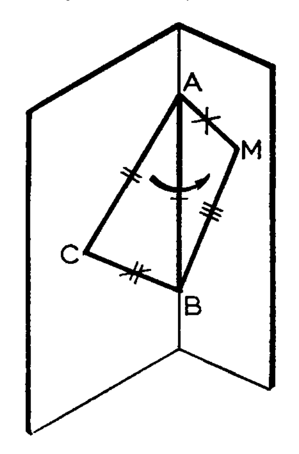
$$AB = A'B', \quad BC = B'C', \quad CA = C'A'.$$

A tout point M de la figure (F) faisons correspondre un point M' tel que :

a) ***les dièdres orientés (C, $\overrightarrow{AB}$, M) et (C', $\overrightarrow{A'B'}$, M') soient égaux ;***

b) ***AM = A'M' et BM = B'M'.***

L'ensemble des points M' ainsi défini est une figure (F') égale à (F).



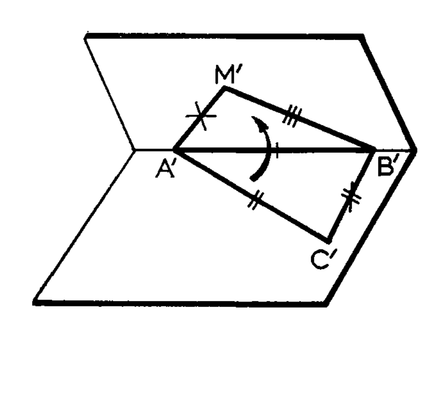


Fig. 3.

Cette transformation est appelée : ***déplacement dans l'espace.***

La superposition des triangles égaux ABC et A'B'C' amène en coïncidence les dièdres (C, $\overrightarrow{AB}$, M) et (C', $\overrightarrow{A'B'}$, M') ainsi que les points M et M'.

Remarques.

1° La figure (F) étant donnée, la figure homologue (F') égale à (F) sera déterminée si on connaît trois points non alignés A, B, C de (F) et leurs homologues A', B', C' de (F') (les conditions AB = A'B', BC = B'C', CA = C'A' étant réalisées). Les deux ensembles de points (A, B, C) et (A', B', C') sont appelés *bases* des deux figures égales (F) et (F').

2° *Si,* A', B', C' *coïncident respectivement avec* A, B, C *les figures égales* (F) *et* (F') *coïncident.*

En résumé : ***Toute transformation ponctuelle qui fait correspondre à une figure (F) une figure égale (F′) est un déplacement.*** En géométrie plane, (F) et (F′) doivent être *directement* égales.

4. Groupe des déplacements.

L'ensemble des déplacements est un groupe.

En effet :

1° **Le produit de deux déplacements est un déplacement** car si (F_1) est la transformée de (F) dans un déplacement (d_1) et (F_2) la transformée de (F_1) dans un déplacement (d_2), (F) et (F_2) égales à (F_1) sont elles-mêmes égales et se correspondent dans un déplacement.

2° **La transformation identique** qui laisse invariante point par point toute figure (F) est un déplacement.

3° **Tout déplacement admet un déplacement réciproque** dans lequel le vecteur $\overrightarrow{AB}$ sera l'homologue du vecteur $\overrightarrow{A'B'}$ en géométrie plane, et le triangle ABC l'homologue du triangle A′B′C′ en géométrie dans l'espace.

II. FIGURES ISOMÉTRIQUES — ANTIDÉPLACEMENT

5. Figures isométriques.

Définition. — Deux figures sont dites isométriques lorsqu'elles se correspondent point par point de manière que la distance de deux points quelconques de l'une soit égale à la distance des points homologues de l'autre.

6. Antidéplacement.

Définition. — Un antidéplacement est une transformation ponctuelle qui transforme une figure quelconque en une figure isométrique mais non égale.

Exemple : la transformation qui a servi à définir deux figures inversement égales dans le plan est un antidéplacement.

7. L'égalité des figures et l'isométrie sont des relations d'équivalence.

L'égalité des figures est une relation d'équivalence. En effet, c'est une propriété :

- **réflexive** : (F) est égale à elle-même ;
- **symétrique** : (F_1) égale à $(F_2) \Rightarrow (F_2)$ égale à (F_3) ;
- **transitive** : (F_1) égale (F_2) et (F_2) égale $(F_3) \Rightarrow (F_1)$ égale (F_3).

On vérifiera de la même manière que l'isométrie est une relation d'équivalence.

III. TRANSLATION

8. Définition.

Étant donné un vecteur $\vec{V}$, si, à un point M on fait correspondre un point M′ tel que

$$\overrightarrow{MM'} = \vec{V}$$

on définit une transformation ponctuelle appelée translation.

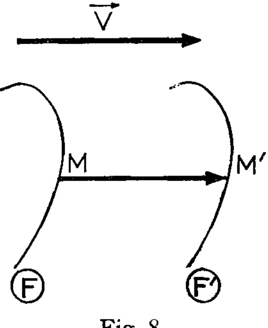


Fig. 8.

Le vecteur $\vec{V}$ est le **vecteur translation.**

Une translation de vecteur $\vec{V}$ se désigne en abrégé par translation $(\vec{V})$ ou $Tr(\vec{V})$.

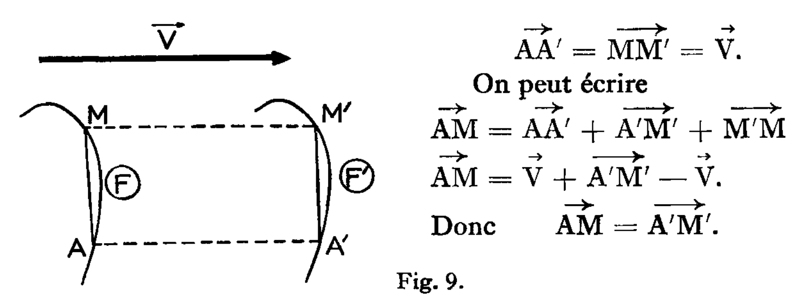
Si M décrit une figure (F), M′ décrit une figure (F′) homologue de (F).

La transformation réciproque est la translation de vecteur $-\vec{V}$. La translation n'est pas une transformation involutive.

Une translation de vecteur $\vec{V}$ non nul n'admet pas de point double.

9. Propriétés de la translation.

a) Soient A et A′, M et M′ deux couples de points homologues de deux figures (F) et (F′), déduites l'une de l'autre par la translation $\vec{V}$.



$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{MM'} = \vec{V}.$$

On peut écrire

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'M'} + \overrightarrow{M'M}$$

$$\overrightarrow{AM} = \vec{V} + \overrightarrow{A'M'} - \vec{V}.$$

Donc $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{A'M'}$.

Fig. 9.

Dans deux figures déduites l'une de l'autre par translation, deux vecteurs homologues sont équipollents.

Réciproquement : soient deux figures (F) et (F′), A et A′ deux points **donnés** de (F) et (F′). Supposons qu'il existe une correspondance biunivoque entre les points M de (F) et les points M′ de (F′) telle que : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{A'M'}$. (1).

On peut écrire :

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'M'} \,;$$

or, $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{A'M'} = \vec{0}$ d'après (1)

d'où $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AA'}$.

On peut donc passer de (F) à (F′) par la translation $\overrightarrow{AA'}$.

Une condition nécessaire et suffisante pour que deux figures (F) et (F′) se correspondent dans une translation est que les vecteurs homologues soient équipollents.

Cette propriété est caractéristique de la translation.

10. Produit de plusieurs translations.

Soient *n* translations de vecteurs $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$, ..., $\vec{V}_n$. Dans la translation $\vec{V}_1$, un vecteur $\overrightarrow{MN}$ de la figure (F) a pour homologue le vecteur $\overrightarrow{M_1N_1}$ de la figure (F_1), et on a : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M_1N_1}$.

$\overrightarrow{M_2N_2}$ étant l'homologue de $\overrightarrow{M_1N_1}$ dans la translation $\vec{V}_2$,

$\overrightarrow{M_3N_3}$ étant l'homologue de $\overrightarrow{M_2N_2}$ dans la translation $\vec{V}_3$

etc., on a :

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M_1N_1} = \overrightarrow{M_2N_2} = \ldots = \overrightarrow{M_nN_n}.$$

Donc : $$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M_nN_n}.$$

Deux vecteurs homologues quelconques de (F) et (F_n) étant équipollents, on peut transformer (F) en (F_n) par une translation.

D'autre part : $$\overrightarrow{MM_n} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M_2} + ... + \overrightarrow{M_{n-1}M_n}.$$
$$\overrightarrow{MM_n} = \overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2} + ... + \overrightarrow{V_n}.$$

Théorème. — ***Le produit de plusieurs translations est une translation dont le vecteur est la somme géométrique des vecteurs définissant les translations.***

Une somme vectorielle étant commutative, le produit de plusieurs translations est **commutatif**.

11. Groupe des translations.

Considérons l'ensemble des translations. Une translation quelconque sera notée t_i et son vecteur-directeur $\overrightarrow{V_i}$.

Cet ensemble est muni d'une opération : le produit de translations.

Propriétés du produit.

1° C'est une opération interne, car le produit $t_1 \times t_2$ est une translation de vecteur-directeur $\overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2}$.

2° La transformation identique I (translation de vecteur nul) est l'élément neutre pour cette opération, car :
$$I \times t_i = t_i \times I = t_i.$$

3° A toute translation t de vecteur directeur $\vec{V}$, correspond une translation réciproque (ou inverse) : la translation t^{-1} de vecteur-directeur $-\vec{V}$:
$$t \times t^{-1} = t^{-1} \times t = I.$$

L'ensemble des translations muni de l'opération produit a la structure de groupe.

C'est un **groupe commutatif** car le produit de deux translations est commutatif.

Remarque : Sur l'ensemble des translations, l'opération produit est *commutative* et *associative*, on peut donc composer n translations données dans l'ordre que l'on veut.

12. Transformées des figures élémentaires.

1° Transformé d'un ***vecteur*** $\overrightarrow{AB}$.

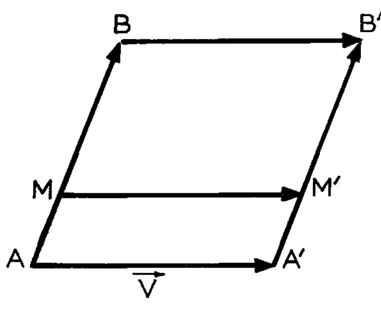


Fig. 12 a.

A′ et B′ étant les homologues de A et B, on a :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}.$$

A un point M du segment AB correspond un point M′ tel que :

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{A'M'}.$$

$\overrightarrow{AM}$ étant porté par $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A'M'}$ est porté par $\overrightarrow{A'B'}$.

L'ensemble des points M′ est donc le vecteur $\overrightarrow{A'B'}$.

Le transformé d'un vecteur est un vecteur équipollent.

2° Transformée d'une ***demi-droite*** A*x*.

Le raisonnement précédent est valable quelle que soit la longueur du vecteur $\overrightarrow{AB}$, donc :

La transformée d'une demi-droite est une demi-droite parallèle et de même sens.

3° Transformée d'une ***droite*** (D).

Si (D) est parallèle au vecteur translation, elle est *conservée dans son ensemble*, c'est-à-dire que tout point de la droite (D) est transformé en un autre point de (D).

Dans le cas contraire, tout vecteur porté par (D) est transformé en un vecteur équipollent, donc (D′) transformée de (D) est *parallèle à* (D).

Réciproquement, deux droites parallèles se correspondent dans une infinité de translations.

4° Transformé d'un ***angle***.

C'est un angle égal dont les côtés sont parallèles et de même sens.

5° Transformé d'un ***plan*** (P).

Si (P) est parallèle au vecteur translation, il est *conservé dans son ensemble.*

Dans le cas contraire, (P) est engendré par une droite (D) pivotant dans (P) autour d'un point O ∈ (P). (D′), transformée de (D), est parallèle à (D) et passe par O′ tel que $\overrightarrow{OO'} = \vec{V}$ (vecteur translation).

Le transformé d'un plan est un plan parallèle (ou confondu avec lui).

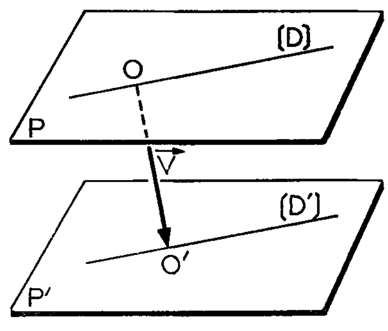


Fig. 12 b.

6° Transformé d'un ***dièdre orienté.***

C'est un dièdre dont l'arête est parallèle à l'arête du dièdre initial et de même sens. Les rectilignes des deux dièdres ont leurs côtés respectivement parallèles et de même sens, ils sont égaux.

Le transformé d'un dièdre orienté est un dièdre égal (ou confondu si le vecteur translation est parallèle à l'arête).

13. Tangentes à deux courbes homologues en deux points homologues.

Soient deux courbes homologues (C) et (C′), A et A′ deux points *fixes* homologues de ces courbes, M un point voisin de A sur (C) et M′ son homologue.

Les droites AM et A′M′ sont parallèles.

Si, quand M tend vers A, *la droite* AM *a*

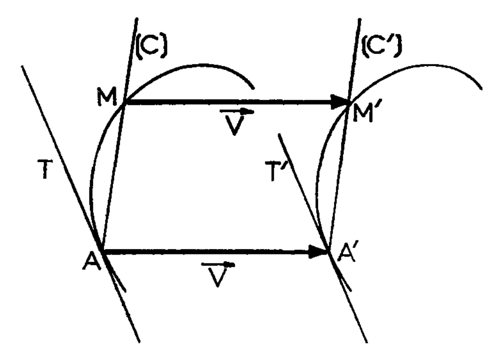


Fig. 13.

une position limite AT, la droite A′M′ aura une position limite A′T′ parallèle à AT.

Par définition, AT et A′T′ sont les tangentes en A et A′ à (C) et (C′) respectivement. Donc :

Si une courbe admet une tangente en un point, la courbe homologue admet une tangente au point homologue et ces tangentes sont parallèles.

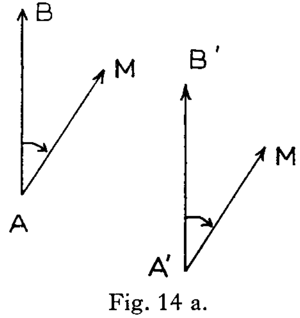


Fig. 14 a.

14. La translation est un déplacement.

1° **Translation plane.** Soient, dans un plan, deux figures (F) et (F′) homologues dans une translation $\vec{V}$ ($\vec{V}$ parallèle au plan), A et B deux points **donnés** de (F), A′ et B′ leurs homologues, M un point quelconque de (F) et M′ son homologue.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} \\ \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{A'M'}\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}AB = A'B',\ AM = A'M' \\ (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'M'})\end{array}\right.$$

Donc les figures (F) et (F′) sont **directement égales** (n° 1).

2° **Translation dans l'espace.** Soient (F) et (F′) deux figures homologues dans une translation $\vec{V}$, A, B, C trois points **donnés** non alignés de (F), A′, B′, C′ leurs homologues, M un point quelconque de (F) et M′ son homologue.

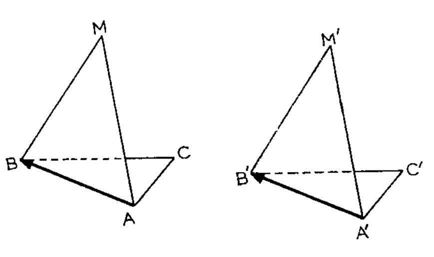


Fig. 14 b.

On a : AB = A′B′, BC = B′C′, CA = C′A′.

D'autre part *les dièdres orientés* (C, $\overrightarrow{AB}$, M) *et* (C′, $\overrightarrow{A'B'}$, M′) *sont égaux,* et AM = A′M′, BM = B′M′.

Les figures (F) et (F′) sont donc égales (n° 3).

EXERCICES

Translation.

272. Deux sommets d'un triangle de grandeur invariable glissent sur deux droites parallèles. Trouver le lieu du troisième sommet.

273. On fait tourner une circonférence de rayon donné autour de l'un de ses points O supposé fixe. Trouver le lieu du point de contact des tangentes à cette circonférence, parallèles à une direction fixe.

274. Une circonférence de rayon donné varie en restant constamment tangente à une circonférence fixe donnée. Trouver le lieu des points de contact de la circonférence variable avec les tangentes parallèles à une direction fixe.

275. Par le point A où deux circonférences se coupent, on mène une sécante variable et on porte sur cette sécante à partir de A deux segments AM et AN dont la longueur égale la demi-somme des cordes interceptées. Lieux des points M et N.

276. Par un point A où se coupent deux circonférences égales on mène une sécante variable qui recoupe les deux cercles en B et C. Par B on mène BX perpendiculaire à BC et par C la parallèle à la ligne des centres qui recoupe BX au point M. Lieu du point M quand BC varie.

277. On donne un cercle (O), une corde AB de ce cercle. M étant un point variable de (O) :

a) trouver le lieu de l'orthocentre H du triangle MAB ;

b) trouver le lieu des points communs aux deux cercles de centre M et de rayon MH et de centre H et de rayon HM.

278. Construire un segment de longueur donnée parallèle à une direction donnée et dont les extrémités sont sur deux droites données.

279. Construire un cercle de rayon donné, passant par un point donné et interceptant sur une droite donnée un segment de longueur donnée.

280. On donne un cercle (O), un diamètre EF et deux points A et B sur ce cercle. Inscrire un angle ACB dans le cercle qui découpe sur EF un segment de longueur donnée.

281. On donne deux circonférences (O) et (O') et une droite XY. Construire une droite parallèle à XY telle que les deux cercles découpent sur cette droite des cordes dont la somme des longueurs ait une valeur donnée.

282. Construire un trapèze connaissant la longueur de ses deux diagonales, leur angle et la longueur d'un côté.

CHAPITRE 21

ROTATION PLANE

1. Définition.

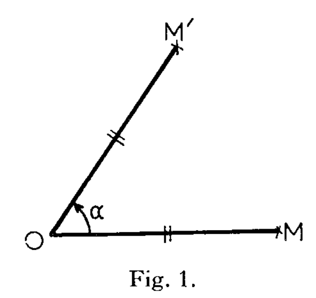


Fig. 1.

Étant donnés un point fixe O et un angle orienté α, si, à tout point M on fait correspondre un point M′ tel que l'on ait

$$\mathbf{OM = OM'}$$

$$(\overrightarrow{\mathbf{OM}}, \overrightarrow{\mathbf{OM'}}) = \alpha + 2k\pi,$$

on définit une transformation ponctuelle appelée rotation.

Le point O est le **centre de rotation**, l'angle α, **l'angle de rotation**.

Cette rotation se note : **rotation (O, α).**

Si M décrit une figure (F), M′ décrit une figure (F′) homologue de (F).

La transformation réciproque est la rotation (O, — α).

La rotation n'est pas une transformation involutive sauf si $\alpha = \pm \pi$ (symétrie par rapport à O).

Le point O est son propre transformé ; c'est **le seul point double de la transformation** si $\alpha \neq 2k\pi$.

Remarque. Si $\alpha = 2k\pi$, (F′) coïncide avec (F) ; la rotation est la transformation identique.

2. Propriétés de la rotation.

Soient A et A′ deux points homologues de deux figures (F) et (F′) se correspondant dans la rotation (O, α), M un point quelconque de (F) et M′ son homologue de (F′).

On a, par définition :

$$OA = OA', \quad OM = OM' ;$$

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \alpha + 2k\pi.$$

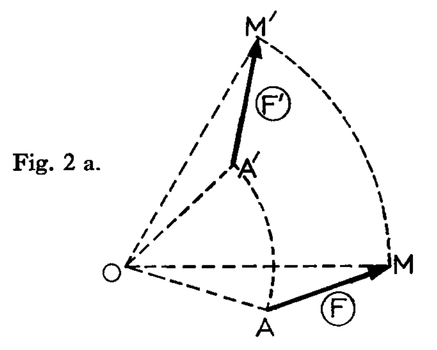


Fig. 2 a.

On peut écrire à $2k\pi$ près :

$$(\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OM'}) = (\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) + (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) ;$$

or,

$$(\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = -(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) + (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = 0.$$

Donc :

$$(\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OM'}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) + 2k'\pi.$$

Cette égalité jointe à $OM = OM'$, montre que les figures (F) et (F') sont directement égales.

Théorème. — ***La rotation plane est un déplacement. Le centre de rotation est un point double.***

Réciproquement, considérons un déplacement plan ayant un point double O.

Soient A un point **donné** et M un point quelconque distinct de A, A' et M' leurs homologues respectifs dans le déplacement. (A et M distincts de O).

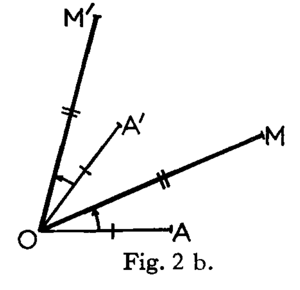


Fig. 2 b.

On a :

$OA = OA'$ et $OM = OM'$

Donc :

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = (\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OM'})$$

$(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) + (\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OM'})$

$(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'})$.

Cette relation, jointe à $OM = OM'$, montre que M' est l'homologue de M dans la rotation $[O, (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'})]$.

Théorème. — ***Pour qu'un déplacement plan soit une rotation, il faut et il suffit qu'il ait un point double.***

Conséquence. — La rotation plane étant un déplacement, elle transforme une droite en une autre droite, un segment en un segment égal, un angle orienté en un angle orienté égal, un cercle en un cercle égal, ...

3. Propriété caractéristique.

Soient $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ deux vecteurs homologues quelconques de deux figures (F) et (F′) se correspondant dans la rotation (O, α).

On a

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OB'}) = \alpha + 2k\pi.$$

On peut écrire, à $2k\pi$ près,

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) + (\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{A'B'}).$$

Les figures (F) et (F′) étant égales (la rotation est un déplacement), on a

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OA}) = -(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AB}) = -(\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{A'B'}),$$

et

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{A'B'}) = 0.$$

Donc, $\quad (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) + 2k'\pi = \alpha + 2k'\pi.$

D'autre part $\qquad AB = A'B'$.

Donc : **deux vecteurs homologues ont même longueur et leur angle est l'angle de rotation.**

Réciproquement : Soient deux figures (F) et (F′), A et A′ deux points **donnés** de (F) et (F′).

Supposons qu'il existe une correspondance biunivoque entre les points B de (F) et les points B′ de (F′) telle que :

$$AB = A'B'$$

et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = \alpha = C^{te}$ $(\alpha \neq 2k\pi)$.

Soit O un point tel que

$$OA = OA'$$

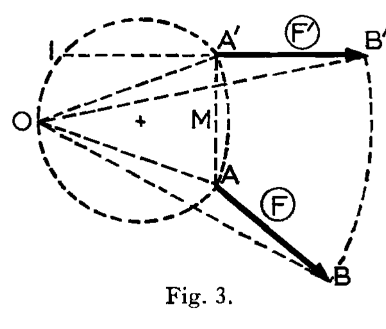


Fig. 3.

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = \alpha + 2k\pi,$$

situé à l'intersection de la médiatrice de AA′ avec l'arc capable de l'angle d'axes α relatifs à A et A′.

Effectuons la rotation (O, α). Elle amène $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{A'B''}$ tel que

$$AB = A'B'',$$

et
$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B''}) = \alpha + 2k\pi.$$

A′B″ se confond avec A′B′. (F) et (F′) se correspondent donc dans la rotation (O, α).

Une condition nécessaire et suffisante pour que deux figures (F) et (F′) se correspondent dans une rotation est que leurs vecteurs homologues soient de même longueur et fassent entre eux un angle constant.

Remarques. — L'angle α des deux vecteurs est l'angle de la rotation.

Si $\alpha = \pi$ (mod. 2π), l'arc capable devient le segment AA′. O est milieu de AA′.

$$\overrightarrow{AB} \underset{\text{rot}(O,\,\alpha)}{\longleftrightarrow} \overrightarrow{A'B'} \Leftrightarrow \begin{cases} AB = A'B' \\ (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = \alpha + 2k\pi. \end{cases}$$

4. Construction du centre de rotation.

a) On connaît *deux couples de points homologues* A *et* A′, B *et* B′.

On a : OA = OA′ et OB = OB′. Donc :

- O est l'intersection des médiatrices de AA′ et BB′ si AA′ et BB′ ne sont pas parallèles.

• Si AA′ et BB′ sont parallèles, les médiatrices sont confondues (elles ont en commun le centre de rotation) et la figure ABB′A′ est un trapèze isocèle. Les supports de AB et A′B′ se coupent en O et la rotation $[O, (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'})]$ transforme B en B′.

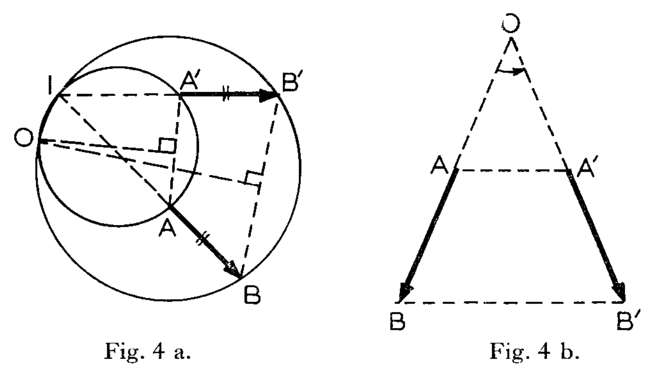


Fig. 4 a. Fig. 4 b.

b) On connaît deux points homologues A *et* A′ *et l'angle de rotation* α. On a :

$$OA = OA' \text{ et } (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = \alpha + 2k\pi.$$

O est donc le point d'intersection de la médiatrice de AA′ et de l'arc capable de l'angle d'axes α relatif à A et A′. O est le milieu de l'arc capable.

Remarque.

Soit I le point d'intersection des supports de AB et A′B′. La relation : (IA, IA′) = (AB, A′B′) = $\alpha + k\pi$ entraîne :

$$(IA, IA') = (OA, OA') \text{ et } (IB, IB') = (OB, OB').$$

Les points I, O, A, A′ et I, O, B, B′ sont donc cocycliques.

Le centre O est donc le point de rencontre, autre que I, des cercles IAA′ et IBB′. O et I sont confondus si AA′ est parallèle à BB′.

DÉPLACEMENT D'UNE FIGURE PLANE DANS SON PLAN

5. Soient (F) et (F′) deux figures coplanaires directement égales, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ deux vecteurs homologues donnés, et $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{A'M'}$ deux vecteurs homologues quelconques.

Les figures (F) et (F′) étant directement égales, on a (à $2k\pi$ près) :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'M'}) ;$$

or $$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) + (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A'M'}) + (\overrightarrow{A'M'}, \overrightarrow{A'B'}),$$

et

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) + (\overrightarrow{A'M'}, \overrightarrow{A'B'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) - (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'M'}) = 0,$$

donc $$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A'M'}).$$

Si deux figures planes sont égales, leurs vecteurs homologues font entre eux un angle constant.

a) **Si $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = 2k\pi$,** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$; les vecteurs homologues sont équipollents ; **(F) et (F′) se correspondent dans une translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$.**

b) **Si $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = \alpha \neq 2k\pi$,** les vecteurs homologues ont même longueur et font entre eux un angle constant, **on peut passer de (F) à (F′) par une rotation d'angle α.**

Les seuls déplacements plans sont la translation et la rotation.

6. Exercices.

1. — **Un point C décrit un demi-cercle de diamètre AB. On construit, à l'extérieur du triangle ABC, un triangle équilatéral BCD. Trouver l'ensemble des points D.**

Supposons que la détermination principale de $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$ soit positive, celle de $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD})$ sera négative. Et on aura : $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}) = -\frac{\pi}{3}$.

Donc :

D se déduit de C dans la rotation $(B, -\frac{\pi}{3})$.

L'ensemble des points D est le demi-cercle (O′) déduit du demi-cercle (O) dans cette rotation.

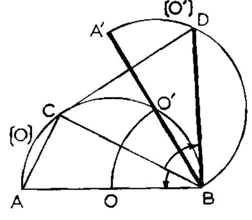


Fig. 6 a.

Le lecteur cherchera l'ensemble des points D lorsque C décrit le cercle de diamètre AB en entier.

2. — **Soient deux droites perpendiculaires (d) et (d') se coupant en O ; A un point quelconque du plan distinct de O. Construire un triangle équilatéral ABC tel que $B \in (d)$ et $C \in (d')$.**

On a : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \pm \frac{\pi}{3}$. Donc B se transforme en C dans l'une ou l'autre des rotations $(A, \pm \frac{\pi}{3})$. C est donc sur (d') et sur la transformée (d_1) de (d) dans l'une ou l'autre de ces rotations.

Sur la figure, on a construit la solution telle que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = + \frac{\pi}{3}$.

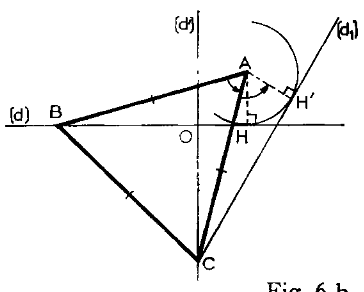


Fig. 6 b.

7. Produit de deux rotations de centres différents.

Soient (F) une figure plane, (F_1) son homologue dans la rotation (O_1, α_1) et (F_2) la figure homologue de (F_1) dans la rotation (O_2, α_2).

Si $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur quelconque de la figure (F), $\overrightarrow{A_1B_1}$ son homologue de la figure (F_1), $\overrightarrow{A_2B_2}$ l'homologue de $\overrightarrow{A_1B_1}$ dans la figure (F_2), on a (n° 3) :

$$AB = A_1B_1 \text{ et } (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A_1B_1}) = \alpha_1 + 2k_1\pi,$$

$$A_1B_1 = A_2B_2 \text{ et } (\overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{A_2B_2}) = \alpha_2 + 2k_2\pi.$$

On en déduit, $AB = A_2B_2$,

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A_2B_2}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A_1B_1}) + (\overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{A_2B_2}) = \alpha_1 + \alpha_2 + 2k\pi.$$

Les deux figures (F_1) et (F_2) se correspondent donc dans une rotation d'angle $\alpha_1 + \alpha_2$ (si $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 2k\pi$).

Soit ω le centre de cette transformation ; ω est le point double de la rotation. Si ω_1 est l'homologue de ω dans la rotation (O_1, α_1), il faut que ω soit l'homologue de ω_1 dans la rotation (O_2, α_2), donc que

$$O_1\omega_1 = O_1\omega \quad \text{et } (\overrightarrow{O_1\omega}, \overrightarrow{O_1\omega_1}) = \alpha_1 + 2k_1\pi$$

$$O_2\omega = O_2\omega_1 \quad \text{et } (\overrightarrow{O_2\omega_1}, \overrightarrow{O_2\omega}) = \alpha_2 + 2k_2\pi.$$

La droite O_1O_2 est donc la médiatrice du segment $\omega\omega_1$ et bissectrice des angles $(\overrightarrow{O_1\omega}, \overrightarrow{O_1\omega_1})$ et $(\overrightarrow{O_2\omega_1}, \overrightarrow{O_2\omega})$.

On obtiendra donc ω en construisant en O_1 l'angle

$$(\overrightarrow{O_1O_2}, \overrightarrow{O_1\omega}) = -\frac{\alpha_1}{2} + 2k_1\pi. \qquad (1)$$

et en O_2, l'angle $(\overrightarrow{O_2O_1}, \overrightarrow{O_2\omega}) = \frac{\alpha_2}{2} + 2k_2\pi.$ (2)

Ces deux droites se coupent au point ω.

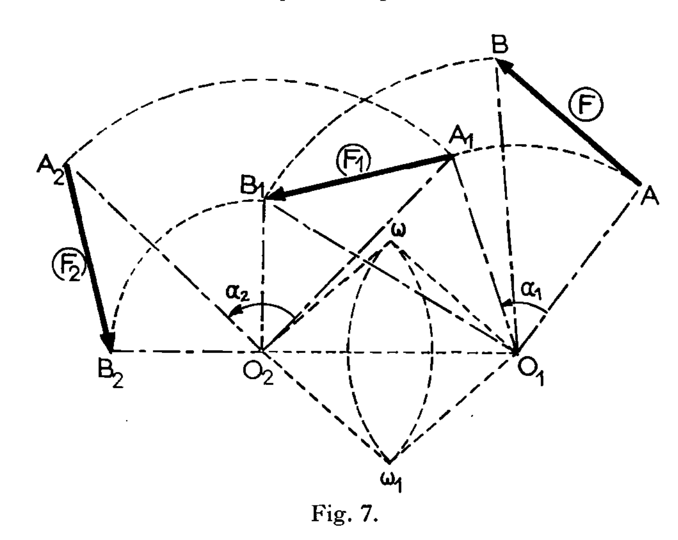


Fig. 7.

Remarques. 1° **Le produit de deux rotations n'est pas commutatif,** le sens de construction des angles en O_1 et O_2 n'étant pas le même.

Si l'on permute l'ordre des rotations, on trouve comme centre, le point ω_1 symétrique de ω par rapport à O_1O_2. Dans (1) et (2) il suffit d'échanger O_1 et O_2, α_1 et α_2.

2° Si $\qquad \alpha_1 + \alpha_2 = 2k\pi \qquad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_2B_2},$

et la transformation est une **translation.**

8. Produit d'une translation et d'une rotation.

Soient (F) une figure plane, (F_1) l'homologue de (F) dans la translation ($\vec{V}$), (F_2) l'homologue de (F_1) dans la rotation (O, α).

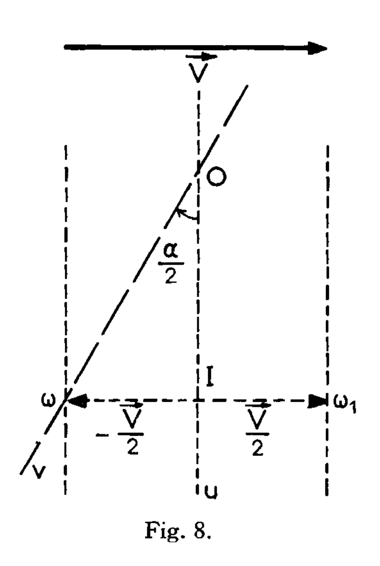


Fig. 8.

Soient $\overrightarrow{AB}$ un vecteur quelconque de (F), $\overrightarrow{A_1B_1}$ son homologue dans (F_1), $\overrightarrow{A_2B_2}$ l'homologue dans (F_2) de $\overrightarrow{A_1B_1}$.

On a $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{AB}$.

et (nº 3) $A_2B_2 = A_1B_1$

$(\overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{A_2B_2}) = \alpha + 2k\pi$;

d'où $AB = A_2B_2$ et

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A_2B_2}) = \alpha + 2k\pi$.

On peut donc (nº 3) passer de (F) à (F_2) par une rotation d'angle α.

Le centre ω de la rotation produit est un point double de la transformation. Si ω_1 est l'homologue de ω dans la translation $(\vec{V})$

$$\overrightarrow{\omega\omega_1} = \vec{V},$$

ω doit être l'homologue de ω_1 dans la rotation (O, α),

et $$O\omega_1 = O\omega \text{ avec } (\overrightarrow{O\omega_1}, \overrightarrow{O\omega}) = \alpha + 2k\pi.$$

On construit la direction Ou perpendiculaire à $\vec{V}$ et l'angle

$$(\overrightarrow{Ou}, \overrightarrow{Ov}) = \frac{\alpha}{2} + 2k\pi.$$

I étant le milieu de $\omega\omega_1$, le point ω est sur Ov de telle sorte que :

$\overrightarrow{I\omega} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\omega_1\omega} = -\frac{\vec{V}}{2}$.

Le produit d'une translation $\vec{V}$ et d'une rotation (O, α) est une rotation d'angle α.

Remarque. Le produit n'est pas commutatif.

Si l'on effectue d'abord la rotation, on trouvera comme centre le point ω_1 symétrique de ω par rapport à Ou.

On étudiera par une autre méthode ces produits de rotations et translations au chapitre des symétries.

9. Groupe des déplacements dans le plan.

Dans le plan, tout déplacement est, soit une translation, soit une rotation.

Considérons l'ensemble (D) des déplacements dans le plan, c'est-à-dire l'ensemble des translations et des rotations du plan.

Cet ensemble est muni d'une opération : le produit de déplacements que nous noterons : $d_1 \times d_2$ ($d_1 \in$ D, $d_2 \in$ D).

Propriétés du produit.

1° $d_1 \times d_2$ est une opération interne. En effet :

- Le produit de deux translations est une translation ;
- le produit de deux rotations est une rotation ou éventuellement une translation;
- le produit d'une translation et d'une rotation (ou inversement) est une rotation de même angle.

2° En considérant la transformation identique I comme un déplacement, I sera l'élément neutre sur l'opération produit.

3° A chaque déplacement plan d correspond un déplacement réciproque (ou inverse) d^{-1}, celui qui, effectué après d, rétablit l'état initial des figures :

$$d \times d^{-1} = d^{-1} \times d = 1.$$

Donc :

L'ensemble des déplacements plans muni de l'opération produit a la structure de groupe.

Remarques. — 1° Ce groupe **n'est pas commutatif** car le produit de deux rotations ou d'une translation et d'une rotation ne sont pas commutatifs.

2° L'ensemble des translations planes est dit sous-groupe du groupe précédent.

EXERCICES

Rotation plane.

283. Un triangle équilatéral a un sommet fixe ; le second sommet décrit une droite fixe ou un cercle fixe. Quel est le lieu du troisième sommet ?

284. On considère un arc de cercle AB et un point C variable sur cet arc de cercle. On porte sur la droite AC, AD = BC. Quel est le lieu du point D ?

285. Sur les côtés d'un angle xOy, on porte deux segments OM et OM′ tels que OM + OM′ = l, l étant une longueur donnée. Trouver le lieu du centre du cercle circonscrit au triangle OMM′.

286. Étant donnés un point P et deux droites parallèles (D) et (D′), construire un triangle isocèle de sommet P, d'angle au sommet donné α et tel que les deux autres sommets soient respectivement sur (D) et (D′).

287. Construire un carré ayant trois sommets sur trois droites parallèles données.

288. Construire un triangle équilatéral ayant ses sommets sur trois cercles concentriques donnés.

289. Soit un triangle ABC, un point M variable sur AB ; on porte sur la droite AC, le segment CN = BM. Montrer que la médiatrice du segment MN passe par un point fixe. (On distinguera deux cas suivant le sens du segment CN.)

290. Lieu des centres des rotations qui font se correspondre deux droites données (D) et (D′) ? Construire le centre de celles de ces rotations qui à un point donné A de (D) font correspondre un point donné A′ de (D′).

291. On donne deux cercles égaux (O) et (O′) tangents extérieurement en un point A. Un point M décrit le cercle (O) et un point M′ le cercle (O′) de telle manière que $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{O'M'}) = +\pi/2$.

Montrer que la médiatrice de MM′ passe par un point fixe E. On fait correspondre au point M le point M_1 dans la rotation $(E_1, -\pi/2)$, E_1 étant le symétrique de E par rapport à OO′. Montrer que $M'M_1$ passe par un point fixe.

292. Quel est le produit des trois déplacements suivants :

1° une translation $\overrightarrow{AB}$,

2° une rotation (O, α),

3° une translation $\overrightarrow{BA}$?

293. 1° On donne un triangle ABC. Déterminer l'angle α d'une rotation de centre A et l'angle β d'une rotation de centre B de telle façon que C soit invariant dans le produit de ces deux rotations, effectuées dans l'ordre indiqué.

Montrer que le produit des trois rotations suivantes :
(A) : de centre A et d'angle 2(AC, AB),
(B) : de centre B et d'angle 2(BA, BC),
(C) : de centre C et d'angle 2(CB, CA),
est la transformation identique.

2° *a)* Soient deux cercles égaux (ω) et (ω') sécants en deux points R et S. Si un cercle variable de centre R les coupe en P, Q et P′, Q′ respectivement, on peut répartir ces points en deux couples P, Q et P′, Q′ tels que :
(RP, RP′) = (RQ, RQ′) = une constante indépendante du cercle de centre R.
b) La droite PP′ (ou QQ′) passe par un point fixe.

3° Soient M un point quelconque, M′ son transformé par la rotation (A) définie au 1° ; M″ le transformé de M′ par la rotation (B). On sait que la rotation (C) transforme M″ en M.
a) Calculer l'angle (M′M, M′M″) en fonction de l'angle (M′A, M′B).
b) Ensemble des points M′ pour que M, M′, M″ soient alignés.

c) Caractériser cet ensemble par rapport au cercle circonscrit au triangle ABC. Ensembles correspondants de M et M″.

d) Démontrer que la droite MM′M″ passe par un point fixe quand M′ varie sur son ensemble.

e) Caractériser ce point fixe par rapport au triangle ABC.

(Bacc. Aix-Marseille).

CHAPITRE 22

ROTATION AUTOUR D'UN AXE

I. DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS

1. Définition.

Soient xy un axe et α un angle orienté (l'espace étant orienté par rapport à l'axe).

Si, à tout point M d'une figure (F), on fait correspondre un point M' tel que

a) ***M et M' soient dans un même plan perpendiculaire à xy.***

b) ***H étant la projection commune de M et M' sur xy, on ait***

$$\mathbf{HM = HM'},$$

et
$$(\overrightarrow{\mathbf{HM}}, \overrightarrow{\mathbf{HM'}}) = \alpha + 2k\pi.$$

on obtient une nouvelle figure (F') qui est dite transformée de (F) par rotation.

L'axe xy est **l'axe de rotation** ; l'angle α est **l'angle de rotation.**

Une rotation d'axe xy et d'angle α s'indique par la notation : **rotation (xy, α).**

Dans le plan MHM', M' est l'homologue de M dans la rotation plane (H, α), H est le seul point double. **L'axe xy est l'ensemble des points doubles de la transformation.**

La transformation réciproque est la rotation d'axe xy et d'angle — α.

2. Propriétés de la rotation autour d'un axe.

Soient (F) et (F') deux figures homologues dans la rotation (xy, α), A et B deux points *donnés* de xy ; C un point *donné* de (F), C' son homologue de (F'), E leur projection commune sur xy, M un

point quelconque de (F), M′ son homologue de (F′), H leur projection commune sur xy. On a :

$$EC = EC', \text{ donc } AC = AC' \text{ et } BC = BC'.$$

Les deux triangles ABC et ABC′ sont donc égaux. D'autre part,

$$(\overrightarrow{EC}, \overrightarrow{EC'}) = (C, \overrightarrow{xy}, C') = \alpha + 2k\pi.$$

On aura de même HM = HM′, donc AM = AM′, BM = BM′,

$$(\overrightarrow{HM}, \overrightarrow{HM'}) = (M, \overrightarrow{xy}, M') = \alpha + 2k\,\pi.$$

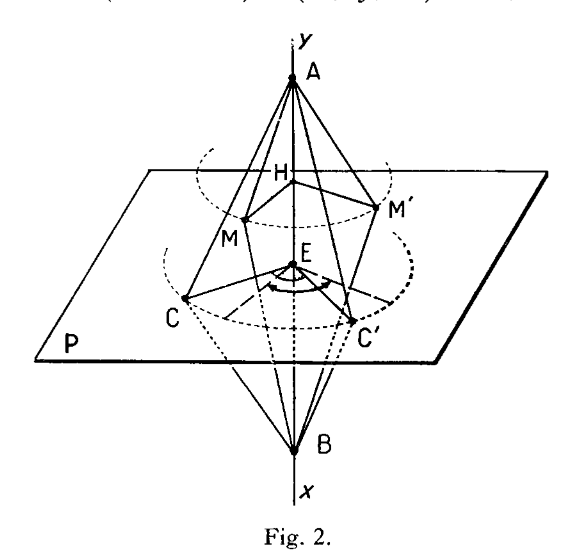


Fig. 2.

On peut donc écrire

$$(C, \overrightarrow{xy}, M) = (C, \overrightarrow{xy}, C') + (C', \overrightarrow{xy}, M') + (M', \overrightarrow{xy}, M) + 2k\pi\ ;$$

or $(C, \overrightarrow{xy}, C') + (M', \overrightarrow{xy}, M) = (C, \overrightarrow{xy}, C') — (M, \overrightarrow{xy}, M') = 2k'\pi,$

par suite : $$(C, \overrightarrow{xy}, M) = (C', \overrightarrow{xy}, M') + 2k'\pi.$$

Les relations : AC = AC′, BC = BC′

$$(C, \overrightarrow{xy}, M) = (C', \overrightarrow{xy}, M')$$
$$AM = AM', \quad BM = BM'$$

prouvent que les figures (F) et (F′) sont égales

Théorème. — ***La rotation autour d'un axe est un déplacement. L'axe est l'ensemble des points doubles.***

Réciproquement : Soit un déplacement de l'espace dans lequel deux points A et B sont invariants.

Tous les points de la droite AB *sont invariants.*

Soient C un point donné non situé sur AB, C′ son homologue dans le déplacement.

Par définition du déplacement, les triangles ABC et ABC′ sont égaux et les hauteurs égales issues de C et C′ rencontrent AB au même point E.

C *et* C′ *sont donc dans un même plan perpendiculaire en* E *à* AB *et tels que* EC = EC′.

Le même raisonnement s'applique à un point quelconque M et à son homologue M′ dans le déplacement. M *et* M′ *sont donc dans un même plan perpendiculaire en* H *à* AB *et tels que* HM = HM′.

Par définition du déplacement, on a :

$$(M, \overrightarrow{AB}, C) = (M', \overrightarrow{AB}, C')$$

Soit :

$$(M, \overrightarrow{AB}, M') + (M', \overrightarrow{AB}, C') + (C', \overrightarrow{AB}, C) = (M', \overrightarrow{AB}, C')$$

D'où : $$(M, \overrightarrow{AB}, M') = (C, \overrightarrow{AB}, C')$$

ou : $$(\overrightarrow{HM}, \overrightarrow{HM'}) = (\overrightarrow{EC}, \overrightarrow{EC'})$$

Le déplacement est donc une rotation d'axe $\overrightarrow{AB}$ et d'angle $\alpha = (C, \overrightarrow{AB}, C')$.

Théorème. — ***Tout déplacement de l'espace qui a deux points invariants est une rotation dont l'axe passe par ces deux points.***

3. Déplacement de l'espace ayant un point double.

Soient D un déplacement de l'espace ayant un point double O, A et A′ deux points homologues dans ce déplacement.

1° *Si* A *et* A′ *sont confondus,* le déplacement D ayant 2 points doubles est une rotation d'axe OA.

2° Sinon, on a OA = OA′.

Considérons un point B situé en A' et soit B' son homologue dans le déplacement D. On a :

$$OA = OA' = OB' \qquad (1)$$

• *Si* B' *et* A *sont distincts*, (1) montre que O est sur l'axe du cercle de centre O' passant par A, A', B'. Les cordes AB et A'B' se correspondent dans le déplacement et sont donc égales. Par suite :

$$(\overrightarrow{O'A}, \overrightarrow{O'A'}) = (\overrightarrow{O'B}, \overrightarrow{O'B'})$$

quelle que soit l'orientation de OO'.

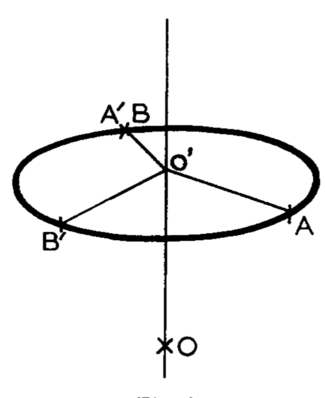


Fig. 3 a.

Considérons alors la rotation d'axe OO' et d'angle $(\overrightarrow{O'A}, \overrightarrow{O'A'})$ qui transforme une figure (F) en une figure égale (F'). Le déplacement D transforme (F) en une figure égale (F'').

O, A, B appartenant à (F), O, A', B' appartiennent à (F') et (F'').

Les deux figures égales (F') et (F''), ayant trois points communs non alignés, coïncident.

La rotation équivaut donc au déplacement D.

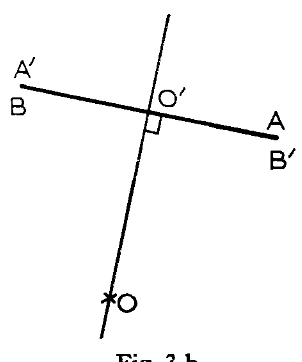


Fig. 3 b.

• *Si* B' *et* A *sont confondus*, la médiatrice de AB passe par O (car OA = OA'). La rotation d'axe OO' et d'angle π transforme O, A, B en O', A', B'. Elle équivaut au déplacement D.

Théorème. — ***Un déplacement de l'espace qui a un point double est une rotation autour d'un axe passant par ce point.***

II. LA ROTATION EN DESCRIPTIVE

4. Dans la méthode **des changements de plans de projection**, la figure de l'espace ne change pas de position, mais elle est projetée sur de nouveaux plans.

Dans la **méthode des rotations**, les plans de projection sont invariables, mais on modifie la position de la figure dans l'espace. Pour cela on applique à la figure une rotation autour d'un **axe vertical** (perpendiculaire au plan H) ou autour d'un **axe de bout** (perpendiculaire au plan F).

5. Rotation du point.

Soient M_1 l'homologue de M dans la rotation d'axe (D) et d'angle α, (P) un plan perpendiculaire à (D) en O, N et N_1 les projections de M et M_1 sur (P). Il est immédiat que N_1 est l'homologue de N dans la rotation plane (O, α).

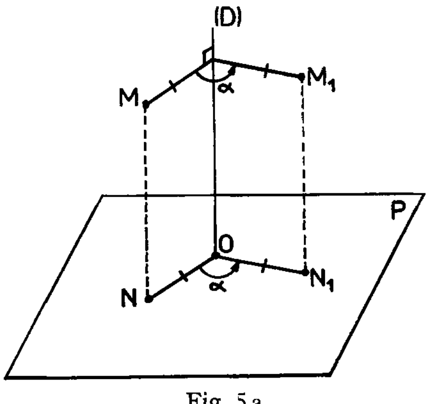


Fig. 5 a.

1° ***Rotation d'un point autour d'un axe vertical (d, d')*** (fig. 5 b).

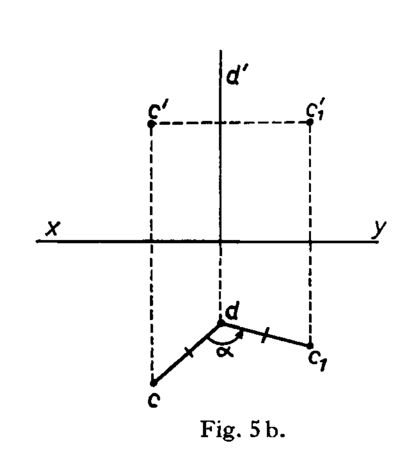


Fig. 5 b.

Soient (c, c') le point donné, (d, d') l'axe de la rotation d'angle α.

La projection horizontale c vient en c_1 déduit de c dans la rotation plane de centre d et d'angle α.

Dans la rotation la cote de C ne change pas.

La projection frontale c′ vient donc en c'_1 sur une parallèle à la ligne de terre menée par c′ et sur la ligne de rappel de c_1.

Dans la rotation l'homologue de (c, c') est (c_1, c'_1).

2° ***Rotation d'un point autour d'un axe de bout*** ***(δ, δ')*** (fig. 5 c).

La projection frontale *c'* subit une rotation plane de centre δ' et d'angle α. L'éloignement du point C ne change pas donc la projection horizontale *c* vient en c_1.

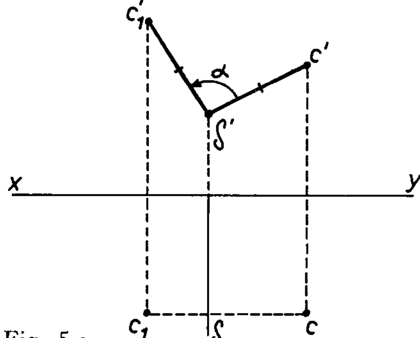


Fig. 5 c.

6. Rotation d'une droite.

La rotation d'une droite s'effectue par la rotation de deux de ses points.

Soit la droite (*cd*, *c'd'*). Appliquons-lui une rotation d'angle α d'axe vertical (*a*, *a'b'*).

1ere méthode, (fig. 6 a). — Du point *a*, décrivons un arc de cercle qui coupe la projection horizontale en *c* et *d* ; les lignes de rappel déterminent *c'* et *d'*. Portons sur le cercle les arcs : $\overset{\frown}{cc_1} = \overset{\frown}{dd_1} = \alpha$ et rappelons les points c_1 et d_1 en c'_1 et d'_1 sur les parallèles menées à *xy* par *c'* et *d'*. L'homologue de (*cd*, *c'd'*) est (c_1d_1, $c'_1\, d'_1$).

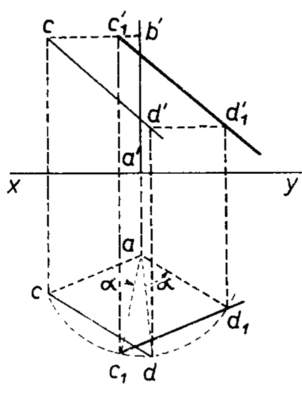


Fig. 6 a.

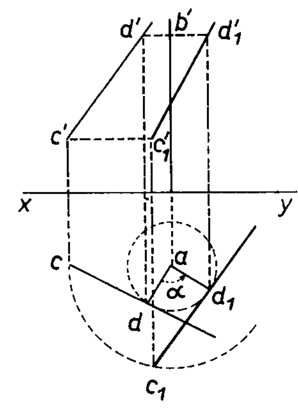


Fig. 6 b.

2[me] méthode, (fig. 6 b). — La projection horizontale de la droite reste tangente au cercle de centre a et de rayon ad, distance de a à cd.

Menons donc la perpendiculaire ad à cd, et construisons $(\overrightarrow{ad}, \overrightarrow{ad_1}) = \alpha$. d fait connaître d' puis d'_1.

Pour déterminer un second point, il suffit de construire deux vecteurs $\overrightarrow{dc}$ et $\overrightarrow{d_1c_1}$ tel que $dc = d_1c_1$ et $(\overrightarrow{dc}, \overrightarrow{d_1c_1}) = \alpha$. c et c_1 déterminent c' et c'_1.

L'homologue de $(cd, c'd')$ est $(c_1d_1, c'_1d'_1)$.

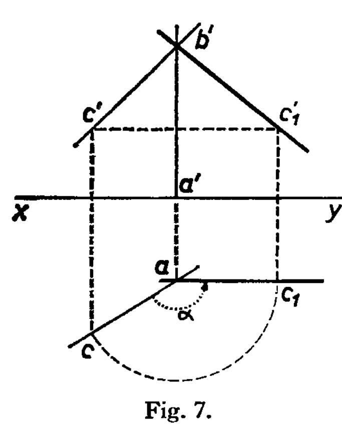


Fig. 7.

7. Remarques.

1° Quand c'est possible, on prend un axe qui rencontre la droite donnée, car alors le point de rencontre reste immobile, et il suffit de faire tourner un seul point de la droite ; ainsi $(ac, c'b')$ devient $(ac_1, b'c'_1)$ (fig. 7).

2° On opère d'une manière analogue lorsque **l'axe est de bout ;** il suffit de transposer les termes relatifs aux deux projections.

8. Rotation du plan.

Un plan est défini par deux droites. On effectuera donc une rotation sur ces deux droites.

Plus simplement : on peut remarquer que le point commun au plan et à l'axe est invariant dans la rotation. Il suffira donc d'effectuer une rotation sur une droite du plan ne passant pas par ce point.

1° ***Rotation du plan PαQ' autour d'une verticale (d, d')*** (fig. 8 a).

Le point invariant (a, a') se projette horizontalement en d.

L'horizontale $(ai, a'i')$ du plan rencontre l'axe (d, d') au point (a, a').

Après rotation, αP devient $\alpha_1 P_1$ trace horizontale du plan homologue de $P\alpha Q'$. Le plan homologue de $P\alpha Q'$ est déterminé par (a, a') et sa trace horizontale $\alpha_1 P_1$.

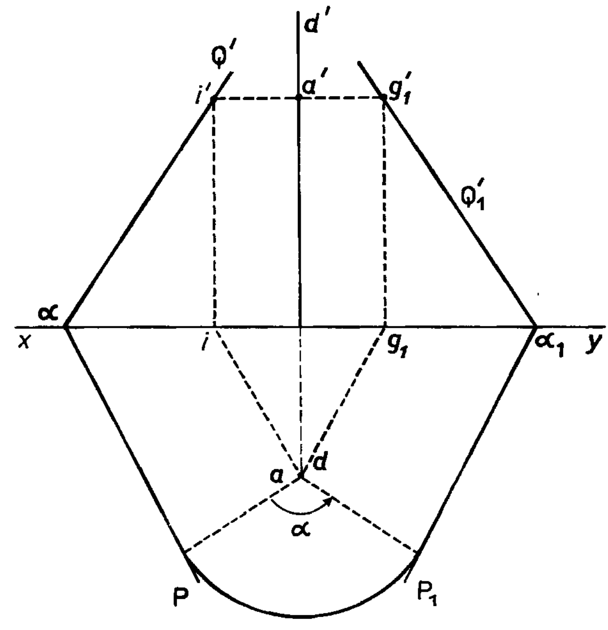


Fig. 8 a.

Pour déterminer la trace frontale de ce plan, remarquons que l'horizontale $(ai, a'i')$ devient l'horizontale $(ag_1, a'g'_1)$. La trace du plan homologue est la droite $\alpha_1 Q'_1$ qui passe par α_1 et g'_1.

2e **Rotation d'un plan défini par deux droites concourantes (ab, a'b'), (ac, a'c') autour d'un axe vertical (d, d'e').**

On peut déterminer le point où l'axe perce le plan et construire l'homologue d'une des deux droites données. Le point invariant et la droite homologue déterminent le plan homologue du plan donné.

Ou encore, chercher les homologues de trois points : (a, a') commun aux deux droites, (b, b') situé sur l'une, (c, c') situé sur l'autre et tels que a, b, c soient sur un même cercle de centre d.

a_1, b_1, c_1 sont déterminés par $\overset{\frown}{aa_1} = \overset{\frown}{bb_1} = \overset{\frown}{cc_1} = \alpha$. On obtient l'épure 8 b.

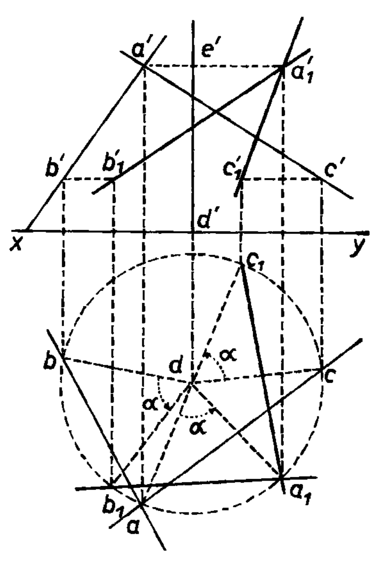


Fig. 8 b.

Applications.

9. Rendre une droite frontale.

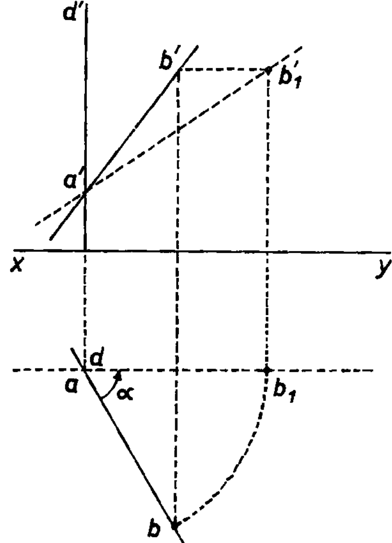


Fig. 9.

Une droite est frontale si sa projection horizontale est parallèle à *xy*. On applique donc à la droite donnée (*ab*, *a'b'*) une rotation autour d'un axe vertical (*d*, *d'*) rencontrant la droite en un point (*a*, *a'*) qui est invariant. L'angle de rotation est l'un des angles de *ab* et *xy*.

L'homologue de (*b*, *b'*) est (b_1, b'_1), la droite (*ab*, *a'b'*) devient (ab_1, $a'b'_1$), (fig. 9).

Conséquences. 1° la distance $a'b'_1$ est la distance des points A et B.

2° On connaît l'angle de la droite et du plan horizontal car cet angle ne change pas dans la rotation.

10. Rendre une droite horizontale.

Une droite est horizontale si sa projection frontale est parallèle à xy. On applique donc à la droite une rotation autour d'un axe de bout (δ, δ') passant par un point (a, a') de la droite. L'angle de rotation est l'un des angles de $a'b'$ et xy.

La droite (ab, $a'b'$) se transforme en (ab_1, $a'b'_1$).

Conséquences : analogues à celles du n° 7.

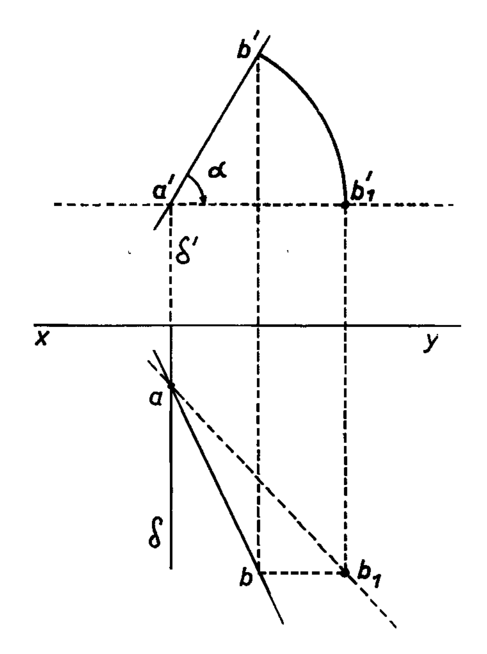


Fig. 10.

11. Rendre un plan quelconque perpendiculaire à un des plans de projection.

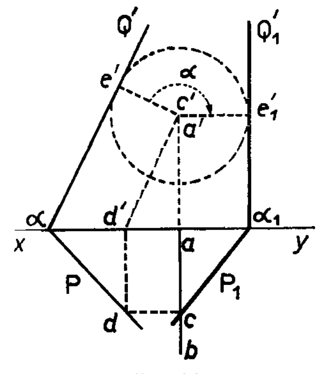


Fig. 11.

Soit à transformer le plan PαQ′ en un plan vertical (fig. 11). Il suffit que la trace fronta le du nouveau plan soit perpendiculaire à xy.

On applique donc au plan une rotation autour d'un axe de bout (ab, a'). L'angle de rotation est $(\overrightarrow{a'e'}, \overrightarrow{a'e'_1})$, $a'e'$ étant perpendiculaire à $\alpha Q'$ et $a'e'_1$ parallèle à xy. L'homologue de $\alpha Q'$ est $\alpha_1 Q'_1$.

Le point invariant (c, c') se projette frontalement en a'. La frontale (cd, $c'd'$) du plan rencontre l'axe de rotation en (c, c').

L'homologue du plan $P\alpha Q'$ étant un plan vertical, c se trouve sur la nouvelle trace horizontale qui est ainsi déterminée.

Le transformé du plan $P\alpha Q'$ est le plan $P_1\alpha_1Q'_1$.

Conséquence. L'angle du plan $P\alpha Q'$ et du plan frontal est l'angle de α_1P_1 et xy.

12. En résumé.

Pour rendre une droite horizontale, on peut faire :

un changement de plan horizontal
ou une rotation autour d'un axe de bout ;
on obtient alors l'angle de la droite et du plan frontal.

Pour rendre une droite frontale, on peut faire :

un changement de plan frontal
ou une rotation autour d'un axe vertical ;
on obtient l'angle de la droite et du plan horizontal.

Pour rendre un plan vertical (respect. de bout) on peut faire :

un changement de plan horizontal (respect. frontal)
ou une rotation autour d'un axe de bout (respect. vertical) ;
on obtient l'angle du plan et du plan frontal (respect. horizontal).

Les deux procédés ont donc résolu les mêmes problèmes. Cependant, dans la méthode du changement de plan, une des projections est conservée, dans la méthode des rotations, les deux projections sont modifiées. La méthode du changement de plan donnera, en général des épures plus simples.

13. Exercice.

Rendre un plan quelconque parallèle à l'un des plans de projection.

Pour amener un plan quelconque à être parallèle au plan horizontal, par exemple, il faut deux rotations :

1° En employant un axe vertical, on peut le rendre perpendiculaire au plan frontal ;

2° En le faisant tourner autour d'un axe de bout, ce plan restera perpendiculaire au plan frontal ; mais on l'amènera à être

parallèle au plan horizontal en rendant sa trace frontale parallèle à xy.

Soit le plan $P\alpha Q'$, qu'il faut rendre horizontal (fig. 13).

Prenons un axe vertical (a, $a'b'$), afin d'amener $P\alpha Q'$ dans la position $P_1\alpha_1Q'_1$, de manière que α_1P_1 soit perpendiculaire à xy. L'horizontale (ac, $b'c'$) fait connaître le point b', où l'axe perce le plan et détermine $\alpha_1Q'_1$. Puis, au moyen d'un axe de bout (ef, e'), amenons le plan $P_1\alpha_1Q'_1$ à être horizontal ; il suffit de tracer la tangente Q'_2 parallèle à xy.

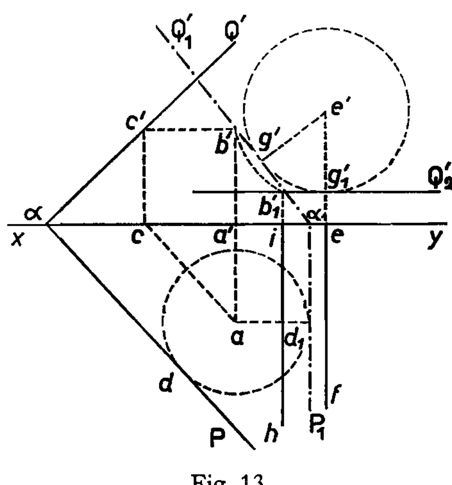


Fig. 13.

EXERCICES

294. Trouver l'axe de la rotation dans l'espace qui fait coïncider deux droites (D) et (D') de telle manière qu'un point donné A de (D) ait pour homologue un point A' donné de (D').

295. Par un point O équidistant de deux droites, mener l'axe de la rotation qui fait coïncider ces deux droites.

296. On donne deux vecteurs de même longueur dans l'espace. Montrer qu'il existe une rotation les transformant l'un en l'autre.

297. On donne dans l'espace deux cercles égaux. Montrer qu'il existe deux rotations, les transformant l'un en l'autre. Cas d'exception.

298. On donne deux plans (P) et (Q). Ensemble des axes des rotations qui font correspondre ces deux plans.

Descriptive.

299. Faire tourner une droite AB autour d'une verticale donnée, jusqu'à ce qu'on réalise l'une des conditions suivantes :

1° La projection horizontale *ab* doit passer par un point donné ;
2° La droite AB doit rencontrer une verticale donnée ;

3° La droite AB doit rencontrer une droite de bout ;
4° La droite doit être à une distance donnée d'une verticale aussi donnée ;
5° La droite doit avoir un point B dans un plan donné ;
6° Le segment compris entre les traces de la droite doit avoir une longueur donnée ;
7° La droite doit être parallèle à un plan donné ;
8° La projection frontale de la droite doit être parallèle à une frontale donnée ;
9° Les deux projections de la droite doivent faire des angles égaux avec *xy*.

300. Faire tourner simultanément deux droites données autour d'un axe vertical aussi donné, jusqu'à ce que les projections frontales des deux premières droites soient parallèles entre elles.

301. Faire tourner une droite donnée, d'un angle donné, autour d'une horizontale prise pour axe.

302. Faire tourner une droite donnée, d'un angle donné, autour d'une autre droite quelconque.

303. Trouver la plus courte distance de deux droites quelconques.

304. Faire tourner un plan donné autour d'un axe vertical, jusqu'à ce qu'on obtienne les résultats suivants :
1° Le plan doit passer par un point donné ;
2° Le plan doit passer à une distance *d* d'un point donné ;
3° Le plan doit être parallèle à une droite donnée.

305. Faire tourner un plan autour d'une verticale jusqu'à ce que ses deux traces rencontrent *xy* sous des angles égaux.

306. On donne la trace horizontale d'un plan, les projections d'un point et la distance de ce point au plan. Déterminer l'autre trace du plan.

307. Faire tourner un plan donné autour de *xy* :
1° Jusqu'à ce qu'il passe par un point donné ;
2° Jusqu'à ce qu'il soit éloigné d'une distance *d* d'un point donné ;
3° Jusqu'à ce qu'il soit parallèle à une droite donnée.

CHAPITRE 23

RETOURNEMENTS

I. DÉFINITION ET PROPRIÉTÉ

1. Définition.

Étant donnée une droite (D), si, à un point M on fait correspondre le point M′ tel que (D) soit médiatrice du segment MM′, on définit une transformation ponctuelle appelée retournement d'axe (D).

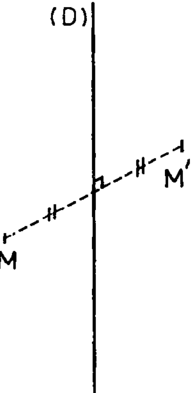


Fig. 1.

Cette transformation s'appelle encore : **demi-tour d'axe (D)** ou **symétrie axiale d'axe (D)** ou **symétrie orthogonale d'axe (D)**.

Elle sera notée : Retournement (D) ou en abrégé : Ret D.

Un retournement d'axe (D) est aussi une **rotation d'angle π** (mod. 2π) **autour de (D)**.

L'ensemble des points doubles est la droite (D).

Cette transformation est **involutive** car le transformé de M′ est le point M.

2. Propriété du retournement.

1° En **Géométrie dans l'espace**, un retournement est une rotation autour d'un axe. Donc :

Théorème. — ***En Géométrie dans l'espace, un retournement est un déplacement.***

2° En **Géométrie plane :**

Soient A et B deux points de l'axe de retournement (D), M un point quelconque du plan et M′ son homologue dans le retournement (fig. 2).

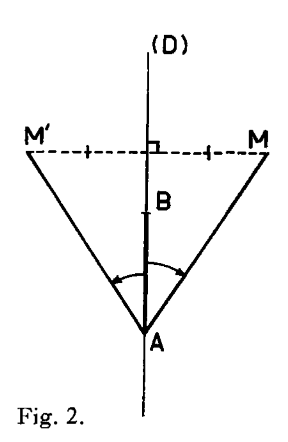


Fig. 2.

La droite (D), médiatrice de MM', est bissectrice de l'angle A du triangle isocèle MAM'. Donc :

$$AM = AM' \text{ et } (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = -(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM'}).$$

Par suite, si M décrit une figure (F), M' décrit une figure (F') **inversement égale** à (F) (ch. 20, n° 2).

Théorème. — ***En Géométrie plane, un retournement est un anti-déplacement.***

II. PRODUIT DE DEUX RETOURNEMENTS

Soient M_1 l'homologue de M dans un premier retournement d'axe Δ_1 et M_2 l'homologue de M_1 dans un second retournement d'axe Δ_2. Étudions le produit :

$$\text{Ret } \Delta_2 \times \text{Ret } \Delta_1.$$

3. Les droites Δ_1 et Δ_2 sont parallèles.

Soient H_1 le milieu de MM_1 (situé sur Δ_1) et H_2 le milieu de M_1M_2. On a :

$$\overrightarrow{MH_1} = \overrightarrow{H_1M_1} \text{ et } \overrightarrow{M_1H_2} = \overrightarrow{H_2M_2},$$

d'où

$$\overrightarrow{MM_2} = \overrightarrow{MH_1} + \overrightarrow{H_1M_1} + \overrightarrow{M_1H_2} + \overrightarrow{H_2M_2}$$

$$= 2\overrightarrow{H_1M_1} + 2\overrightarrow{M_1H_2}, \quad \text{et} \quad \mathbf{\overrightarrow{MM_2} = 2\overrightarrow{H_1H_2}}.$$

Fig. 3.

Théorème. — ***Le produit de deux retournements d'axes parallèles est une translation.***

$\vec{V}$ désignant le vecteur-translation perpendiculaire à Δ_1 et Δ_2 et transformant Δ_1 en Δ_2, la translation produit a pour vecteur directeur $2\vec{V}$.

$$\text{Ret } \Delta_2 \times \text{Ret } \Delta_1 = \text{Tr } (2\vec{V}).$$

Ce produit n'est pas commutatif, car l'application du théorème précédent donne :

$$\text{Ret } \Delta_1 \times \text{Ret } \Delta_2 = \text{Tr } (-2\vec{V}).$$

Réciproquement : soit une translation de vecteur $\vec{V}$.

Considérons une droite Δ_1 arbitraire mais orthogonale à $\vec{V}$ et la droite Δ_2 déduite de Δ_1 dans la translation $\frac{\vec{V}}{2}$. D'après le théorème direct, on a :

$$\text{Ret } \Delta_2 \times \text{Ret } \Delta_1 = \text{Tr } \left(2.\frac{\vec{V}}{2}\right) = \text{Tr } (\vec{V}).$$

Théorème. — ***Une translation de vecteur $\vec{V}$ peut se décomposer d'une infinité de manières en un produit de deux retournements. Les deux axes des retournements sont orthogonaux à $\vec{V}$, le second se déduit du premier dans la translation $\frac{\vec{V}}{2}$.***

4. Les droites Δ_1 et Δ_2 sont concourantes.

Soient (R) le plan des deux droites Δ_1 et Δ_2 concourantes en O, m, m_1, m_2 les projections sur (R) des points M, M_1, M_2.

Δ_1 et Δ_2 sont les médiatrices de mm_1 et m_1m_2 et on a :

$$\overrightarrow{mM} = -\overrightarrow{m_1M_1} \text{ et } (O\Delta_1, Om_1) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{Om}, \overrightarrow{Om_1}) + k_1\pi ;$$

$$\overrightarrow{m_1M_1} = -\overrightarrow{m_2M} \text{ et } (Om_1, O\Delta_2) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{Om_1}, \overrightarrow{Om_2}) + k_2\pi.$$

D'où :
$$\overrightarrow{mM} = \overrightarrow{m_2M_2}$$

et
$$\begin{aligned}(\overrightarrow{Om}, \overrightarrow{Om_2}) &= (\overrightarrow{Om}, \overrightarrow{Om_1}) + (\overrightarrow{Om_1}, \overrightarrow{Om_2}) \\ &= 2[(O\Delta_1, Om_1) - k_1\pi] + 2[(Om_1, O\Delta_2) - k_2\pi] \\ &= 2(\Delta_1, \Delta_2) + 2k\pi.\end{aligned}$$

Donc : M_2 se déduit de M par une rotation d'axe (D) perpendiculaire en O au plan (R) et d'angle $2(\Delta_1, \Delta_2)$.

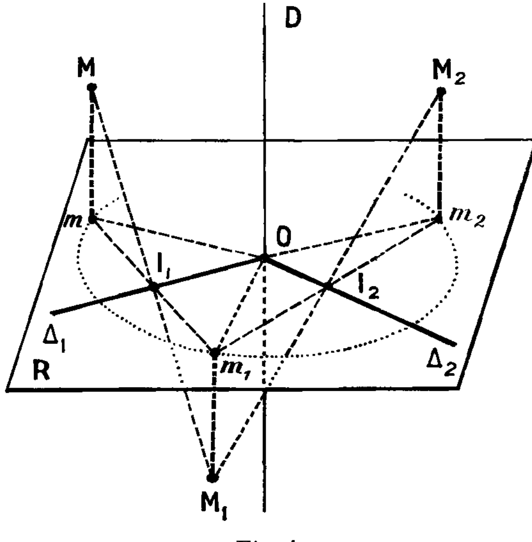


Fig. 4.

$$\text{Ret}\,\Delta_2 \times \text{Ret}\,\Delta_1 = \text{Rot}[D, 2(\Delta_1, \Delta_2)].$$

Théorème. — ***Le produit de deux retournements d'axes concourants est une rotation.***

En général, *ce produit n'est pas commutatif* car :

$$\text{Ret}\,\Delta_1 \times \text{Ret}\,\Delta_2 = \text{Rot}[D, 2(\Delta_2, \Delta_1)]. \qquad \text{(fig. 4).}$$

Il est commutatif si Δ_1 et Δ_2 sont perpendiculaires. Le produit est un retournement.

Réciproquement, soit une rotation (D, α). Dans un plan (R) perpendiculaire à (D), menons en l'un quelconque de ses points, O, deux droites $O\Delta_1$ et $O\Delta_2$ telles que :

$$(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{\alpha}{2} + k\pi.$$

D'après le théorème direct, on a :

$$\begin{aligned}\text{Ret}\,\Delta_2 \times \text{Ret}\,\Delta_1 &= \text{Rot}[D, 2(\Delta_1, \Delta_2)]\\ &= \text{Rot}[D, \alpha].\end{aligned}$$

Théorème. — ***Une rotation (D, α) peut se décomposer d'une infinité de manières en un produit de deux retournements. Les deux axes de retournement rencontrent (D)***

orthogonalement, le second se déduit du premier dans la rotation $(D, \frac{\alpha}{2})$.

Remarque. — Les raisonnements et théorèmes des n° 3 et 4 subsistent en **Géométrie plane.**

Au n° 3, les droites Δ_1 et Δ_2 sont alors dans le plan.

Au n° 4, on pourra remplacer la rotation (D, α) par la rotation (O, α) dans le plan (R). Le point M est alors confondu avec m, M_1 est confondu avec m_1 et M_2 avec m_2.

5. Les droites Δ_1 et Δ_2 sont quelconques.

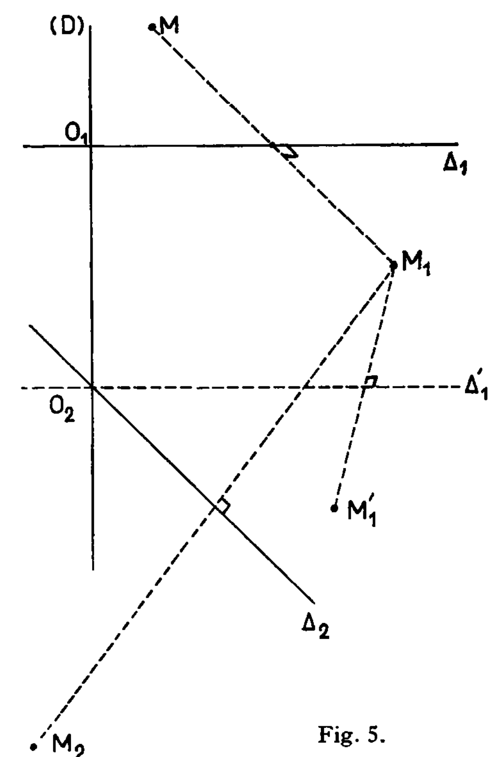


Fig. 5.

Les droites Δ_1 et Δ_2 ne sont pas dans un même plan et on désigne par D leur perpendiculaire commune qui rencontre Δ_1 en O_1 et Δ_2 en O_2.

Menons par O_2 la droite Δ'_1 parallèle à Δ_1 et soit M'_1 l'homologue de M_1 dans le retournement d'axe Δ'_1.

On a :

$$\text{Ret } \Delta_2 \times \text{Ret } \Delta_1 = \text{Ret } \Delta_2 \times \text{Ret } \Delta'_1 \times \text{Ret } \Delta'_1 \times \text{Ret } \Delta_1 \quad (1)$$

car le produit Ret Δ'_1 × Ret Δ'_1 est la transformation identique.

Le produit de transformations étant associatif, (1) peut

s'écrire :

$$\text{Ret } \Delta_2 \times \text{Ret } \Delta_1 = (\text{Ret } \Delta_2 \times \text{Ret } \Delta'_1) \times (\text{Ret } \Delta'_1 \times \text{Ret } \Delta_1).$$

Or : $$\text{Ret } \Delta'_1 \times \text{Ret } \Delta_1 = \text{Tr } (2\,\overrightarrow{O_1O_2})$$
$$\text{Ret } \Delta_2 \times \text{Ret } \Delta'_1 = \text{Rot } [D, 2(\Delta'_1, \Delta_2)].$$

D'où : $\text{Ret } \Delta_2 \times \text{Ret } \Delta_1 = \text{Rot } [D, 2(\Delta_1, \Delta_2)] \times \text{Tr } (2\,\overrightarrow{O_1O_2}.)$

Théorème. — ***Le produit de deux retournements d'axes non coplanaires est le produit d'une translation et d'une rotation dont l'axe porte le vecteur translation.***

Remarque. — Le produit $\text{Ret } \Delta_2 \times \text{Ret } \Delta_1$ *n'est pas commutatif.* En effet :

$$\text{Ret } \Delta_1 \times \text{Ret } \Delta_2 = \text{Rot } [D, 2(\Delta_2, \Delta_1)] \times \text{Tr } (2\,\overrightarrow{O_2O_1}).$$

Le vecteur translation et l'angle de rotation dépendent donc de l'ordre des retournements.

III. DÉPLACEMENT HÉLICOIDAL

6. Définition.

Le produit d'une translation et d'une rotation dont l'axe est parallèle au vecteur translation est un déplacement appelé déplacement hélicoïdla.

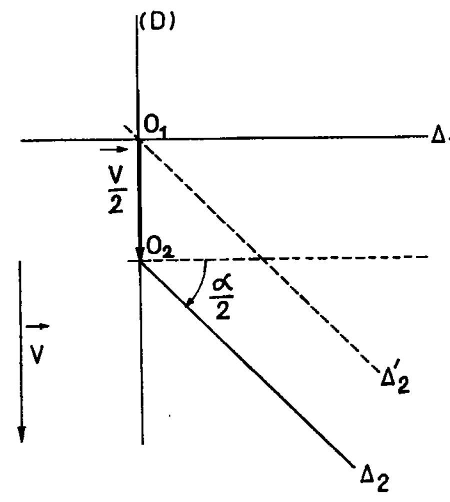


Fig. 7.

7. Décomposition du déplacement hélicoïdal en retournements.

Soit le déplacement hélicoïdal défini par le vecteur translation $\vec{V}$ et la rotation d'axe (D) parallèle à $\vec{V}$ et d'angle α.

En un point quelconque O_1 de (D), menons une droite Δ_1 arbitraire mais perpendiculaire à (D) et soit Δ_2 la droite déduite de Δ_1 dans le déplacement hélicoïdal

de vecteur $\frac{\vec{V}}{2}$, d'axe (D), d'angle de rotation $\frac{\alpha}{2}$.

Δ_2 rencontre (D) en O_2 et on a :

$$\overrightarrow{O_1O_2} = \frac{\vec{V}}{2} \text{ et } (\Delta_1, \Delta_2) = \frac{\alpha}{2}.$$

D'après le n° 5, on a :

$$\text{Ret } \Delta_2 \times \text{Ret } \Delta_1 = \text{Rot}[D, 2(\Delta_1, \Delta_2)] \times \text{Tr}(2\,\overrightarrow{O_1O_2})$$

soit : $\text{Ret } \Delta_2 \times \text{Ret } \Delta_1 = \text{Rot}[D, \alpha] \times \text{Tr}(\vec{V})$.

Le produit Ret Δ_2 × Ret Δ_1 est donc le déplacement hélicoïdal donné.

Théorème. — ***Un déplacement hélicoïdal se décompose d'une infinité de manières en le produit de deux retournements.***

8. Commutativité de la translation et de la rotation.

Le déplacement hélicoïdal précédent est donc équivalent au produit : Ret Δ_2 × Ret Δ_1. Soit Δ'_2 la parallèle à Δ_2 menée par O_1. On a :

$$\begin{aligned}\text{Ret } \Delta_2 \times \text{Ret } \Delta_1 &= (\text{Ret } \Delta_2 \times \text{Ret } \Delta'_2) \times (\text{Ret } \Delta'_2 \times \text{Ret } \Delta_1)\\ &= \text{Tr}(2\,\overrightarrow{O_1O_2}) \times \text{Rot}[D, 2(\Delta_1, \Delta'_2)]\\ &= \text{Tr}(\vec{V}) \times \text{Rot}[D, \alpha].\end{aligned}$$

Le déplacement hélicoïdal donné est donc aussi le produit de la rotation d'axe (D), d'angle α, et de la translation $\vec{V}$.

Théorème. — ***Dans un déplacement hélicoïdal la translation et la rotation sont commutatives.***

9. Déplacement réciproque.

Soit I la transformation identique. On a :

$$\begin{aligned}\text{Ret } \Delta_1 \times \text{Ret } \Delta_2 \times \text{Ret } \Delta_2 \times \text{Ret } \Delta_1 &= \text{Ret } \Delta_1 \times \text{I} \times \text{Ret } \Delta_1\\ &= \text{Ret } \Delta_1 \times \text{Ret } \Delta_1 = \text{I}.\end{aligned}$$

Le déplacement réciproque du produit : Ret Δ_2 × Ret Δ_1 est donc le déplacement Ret Δ_1 × Ret Δ_2.

Or le premier est le déplacement hélicoïdal de vecteur $\vec{V}$, d'axe (D), d'angle α ; (fig. 6).

le second est le déplacement hélicoidal de vecteur $-\vec{V}$, d'axe (D), d'angle $-\alpha$, qui est le **déplacement réciproque du** premier.

Théorème. — ***Le déplacement réciproque du déplacement hélicoïdal de vecteur $\vec{V}$, d'axe (D), d'angle α est le déplacement hélicoïdal de vecteur $-\vec{V}$, d'axe (D), d'angle $-\alpha$.***

10. Groupe des déplacements dans l'espace.

On démontre le théorème suivant et nous l'admettrons :

Tout déplacement dans l'espace est équivalent soit à une translation, soit à une rotation, soit à un déplacement hélicoïdal.

Considérons l'ensemble des déplacements de l'espace muni de l'opération produit de déplacements.

Propriétés du produit.

1° **C'est une opération interne, car le produit de deux déplacements est un déplacement.** En effet, par le premier déplacement, la figure (F) est transformée en une figure égale (F_1) et par le second, (F_1), est transformée en une figure (F_2) égale à (F_1). Or deux figures de l'espace égales à une troisième sont égales entre elles. Donc : $F = F_2$ et on peut transformer F en F_2 par un déplacement.

2° La transformation identique I est l'**élément neutre.**

3° A chaque déplacement d correspond un **déplacement réciproque d^{-1}**, celui qui rétablit l'état initial : $d \times d^{-1} = I$.

L'ensemble des déplacements de l'espace muni de l'opération produit a la structure de groupe.

Remarques.

Un déplacement hélicoïdal tel que $\vec{V} = \vec{O}$ se réduit à la rotation (D, α).

Un déplacement hélicoïdal tel que $\alpha = 2k\pi$ se réduit à la translation $\vec{V}$.

IV. APPLICATION : PRODUIT DE DEUX DÉPLACEMENTS PLANS

Le produit de deux déplacements plans a été étudié au chapitre des rotations planes. Cette étude est reprise ici en appliquant les propriétés des retournements.

11. Produit d'une translation et d'une rotation dans le plan.

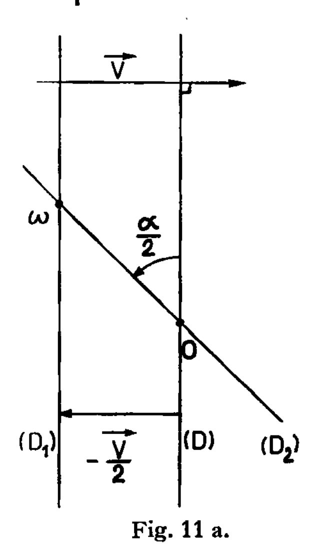


Fig. 11 a.

Soit à étudier le déplacement plan :

$\text{Rot}(O, \alpha) \times \text{Tr}(\vec{V})$. $(\alpha \neq 2k\pi)$.

Menons par O la droite (D) perpendiculaire à $\vec{V}$ et soit (D_1) l'homologue de (D) dans la translation $-\frac{\vec{V}}{2}$ (fig. 11 a).

On a : $\text{Tr}(\vec{V}) = \text{Ret } D \times \text{Ret } D_1$.

Soit (D_2) l'homologue de (D) dans la rotation $\left(O, \frac{\alpha}{2}\right)$. On a :

$\text{Rot}(O, \alpha) = \text{Ret } D_2 \times \text{Ret } D$

Donc, en désignant par ω le point commun à (D_1) et (D_2) :

$$\begin{aligned}\text{Rot}(O, \alpha) \times \text{Tr}(\vec{V}) &= \text{Ret } D_2 \times \text{Ret } D \times \text{Ret } D \times \text{Ret } D_1 \\ &= \text{Ret } D_2 \times \text{Ret } D_1 \\ &= \text{Rot}[\omega, 2(D_1, D_2)] \\ &= \text{Rot } (\omega, \alpha).\end{aligned}$$

Théorème. — **Le produit d'une translation et d'une rotation dans le plan est donc une rotation de même angle.**

Le centre ω de la rotation produit est le point ω commun aux droites D_1 et D_2 définies ci-dessus.

Ce produit n'est pas commutatif.

Soit à étudier : $\text{Tr}(\vec{V}) \times \text{Rot}(O, \alpha)$ (fig. 11 b)

Soit (D_1) l'homologue de (D) dans la translation $\frac{\vec{V}}{2}$ et (D_2) l'homologue de (D) dans la rotation $\left(O, -\frac{\alpha}{2}\right)$. On a :

$$\text{Tr}(\vec{V}) \times \text{Rot}(O, \alpha) = (\text{Ret } D_1 \times \text{Ret } D) \times (\text{Ret } D \times \text{Ret } D_2)$$
$$= \text{Ret } D_1 \times \text{Ret } D_2$$
$$= \text{Rot}[\omega_1, 2(D_2, D_1)]$$
$$= \text{Rot}(\omega_1, \alpha).$$

où ω_1 est le point commun à (D_1) et (D_2). Il est symétrique de ω par rapport à (D).

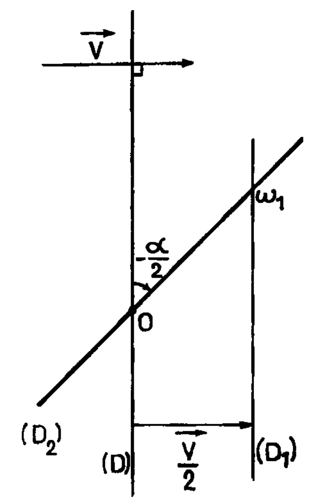


Fig. 11 b.

12. Produit de deux rotations dans le plan.

Soit à étudier le déplacement :

$\text{Rot}(O_2, \alpha_2) \times \text{Rot}(O_1, \alpha_1)$.

Désignons par Δ la droite O_1O_2 et soit O_1D_1 la droite d'angle polaire $-\frac{\alpha_1}{2}$ repérée par rapport à Δ :

$$(\Delta, D_1) = -\frac{\alpha_1}{2} + k\pi.$$

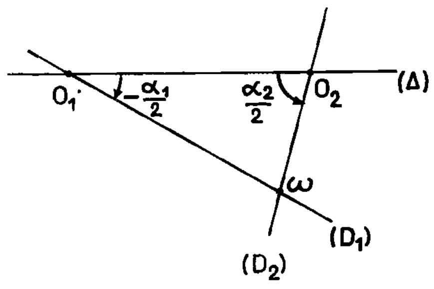


Fig. 12 a.

On a : $\text{Rot}(O_1, \alpha_1) = \text{Ret } \Delta \times \text{Ret } D_1$.

Soit O_2D_2 la droite d'angle polaire $\frac{\alpha_2}{2}$:

$$(\Delta, D_2) = \frac{\alpha_2}{2} + k\pi.$$

On a : $\text{Rot}(O_2, \alpha_2) = \text{Ret } D_2 \times \text{Ret } \Delta$.

Donc :

$$\text{Rot}(O_2, \alpha_2) \times \text{Rot}(O_1, \alpha_1) = \text{Ret } D_2 \times \text{Ret } \Delta \times \text{Ret } \Delta \times \text{Ret } D_1$$
$$= \text{Ret } D_2 \times \text{Ret } D_1.$$

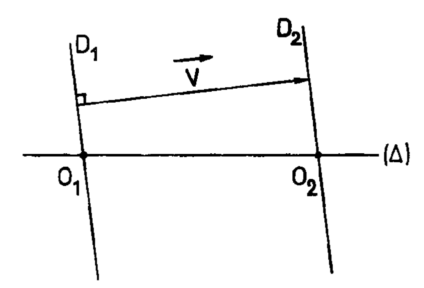


Fig. 12 b.

Or : $(D_1, D_2) = (D_1, \Delta) + (\Delta, D_2) = \dfrac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} + k\pi$.

• Si $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 2k\pi$, les droites D_1 et D_2 n'ont pas même direction et se rencontrent en un point ω. **Le produit est une rotation de centre ω et d'angle $2(D_1, D_2) = \alpha_1 + \alpha_2$** (n° 4).

• Si $\alpha_1 + \alpha_2 = 2k\pi$, D_1 et D_2 ont même direction. **Le produit est une translation de vecteur $2\vec{V}$,** le vecteur $\vec{V}$ étant le vecteur translation perpendiculaire aux deux droites et transformant D_1 en D_2 (n° 3).

Théorème. — ***Le produit de deux rotations planes de centres distincts et d'angles α_1 et α_2 est :***

• ***une rotation plane d'angle $\alpha_1 + \alpha_2$ si $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 2k\pi$;***

• ***une translation si $\alpha_1 + \alpha_2 = 2k\pi$.***

Remarque. *Ce produit n'est pas commutif.* Si l'on permute les deux rotations du produit, le centre de la rotation produit ($\alpha_1 + \alpha_2 \neq 2k\pi$) est le symétrique de ω par rapport à O_1O_2 ; si α_1 et $\alpha_2 = 2k\pi$, le vecteur de la translation produit est $-2\vec{V}$.

EXERCICES

308. Quel est le produit de deux rotations dans l'espace (D, α) et (D', α') ? Cas où les deux axes sont parallèles.

309. Un déplacement transforme un point donné A en un point B et le point B en A. Montrer que ce déplacement est un retournement et que le milieu O de AB est un point double de la transformation.

310. Soient M_1 l'homologue de M dans un retournement d'axe (D_1) et M_2 l'homologue de M dans un retournement d'axe (D_2). Ensemble des points M tels que M_1M_2 ait une longueur donnée l.

311. Soient M_1 et M_2 les homologues d'un point M dans deux retournements d'axes concourants (D_1) et (D_2). Ensemble des points M tels que M_1 et M_2 soient alignés avec un point donné A.

312. En décomposant les transformations en produits de retournements étudier le produit des trois déplacements suivants (géométrie plane) :

1° une translation $\overrightarrow{AB}$,

2° une rotation (O, α),

3° une translation $\overrightarrow{BA}$.

313. On donne un triangle ABC. Déterminer l'angle α d'une rotation de centre A et l'angle β d'une rotation de centre B de telle façon que C soit invariant dans le produit de ces deux rotations effectuées dans l'ordre indiqué.

Décomposer les trois rotations suivantes en produits de retournements : (A) de centre A, d'angle 2(AC, AB) ; (B) de centre B, d'angle 2(BA, BC) ; (C) de centre C, d'angle 2(CB, CA). Montrer que le produit de ces trois rotations est la transformation identique.

314. On considère deux droites D_1 et D_2 et leur perpendiculaire commune O_1O_2, O_1 étant sur D_1 et O_2 sur D_2. Par le milieu I de O_1O_2 on mène D'_1 parallèle à D_1 et D'_2 parallèle à D_2. Soient $u'u$ et $v'v$ les bissectrices de l'angle (D'_1, D'_2).

1° On oriente les droites D_1 et D_2. Quels sont les transformés de l'axe $\overrightarrow{D_1}$ dans les retournements d'axes $u'u$ et $v'v$?

2° Soit A un point donné sur D_2 distinct de O_2. Trouver deux produits de deux retournements qui transforment chacun D_1 en D_2 de façon que O_1 se transforme en A. [On fera intervenir les médiatrices de O_2A qui rencontrent $u'u$ et $v'v$].

Pour chacun de ces 2 produits de deux retournements, préciser la position des axes Δ_1 et Δ_2 des rotations-produits.

315. Montrer que :

1° L'ensemble des rotations planes de même centre est un groupe commutatif.

2° L'ensemble des rotations dans le plan n'est pas un groupe.

3° L'ensemble des rotations d'axe donné est un groupe commutatif.

4° L'ensemble des rotations dont les axes sont issus d'un même point est un groupe.

CHAPITRE 24

SYMÉTRIES

I. SYMÉTRIE PAR RAPPORT A UN POINT

1. Définition.

Étant donné un point fixe O, si, à un point M on fait correspondre le point M′ tel que O soit le milieu de MM′, on définit une transformation ponctuelle appelée symétrie de centre O.

Elle sera notée : symétrie (O) ou S_O.

Le centre O est le seul point double de la transformation. Cette transformation est **involutive** car le transformé de M′ est M.

Si M décrit une figure (F), M′ décrit une figure (F′) dite symétrique de (F) par rapport à O.

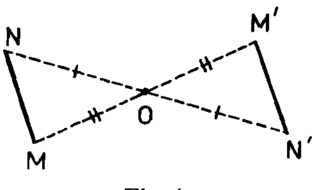


Fig. 1.

2. Propriétés.

1° En **Géométrie plane**, une symétrie de centre O est une rotation de centre O et d'angle π. C'est donc un **déplacement.**

2° En **Géométrie dans l'espace, une symétrie de centre O n'est pas un déplacement**. Sinon, cette transformation ayant un point double O, serait une rotation autour d'un axe passant par O (ch. 22, n° 3). Il existerait alors une infinité de points doubles. Ce qui n'est pas. Il est immédiat que MN = M′N′. C'est donc une isométrie.

Dans l'espace, une symétrie par rapport à un point est un antidéplacement.

3. Produit de deux symétries par rapport à deux points.

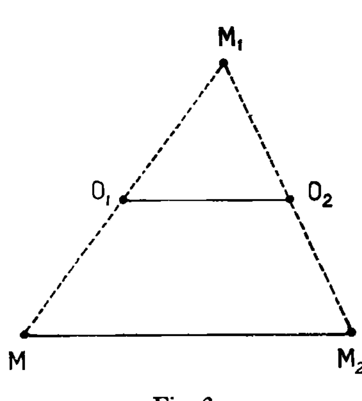


Fig. 3.

Soient O_1 et O_2 deux points fixes distincts. M_1 le symétrique de M par rapport à O_1 et M_2 le symétrique de M_1 par rapport à O_2. On a :

$$\overrightarrow{MM_1} = 2\,\overrightarrow{O_1M_1}$$

et $$\overrightarrow{M_1M_2} = 2\overrightarrow{M_1O_2}\,;$$

d'où $$\overrightarrow{MM_2} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M_2} = 2(\overrightarrow{O_1M_1} + \overrightarrow{M_1O_2})$$

$$\mathbf{\overrightarrow{MM_2} = 2\,\overrightarrow{O_1O_2}.}$$

M se transforme en M_2 dans la translation de vecteur $2.\overrightarrow{O_1O_2}$.

Théorème. — ***Le produit de deux symétries par rapport à deux points distincts est une translation.***

$$S_{O_2} \times S_{O_1} = \mathrm{Tr}(2\,\overrightarrow{O_1O_2}).$$

Remarques. Si O_1 et O_2 sont confondus, le produit des deux symétries est la transformation identique.

Ce produit *n'est pas commutatif* : $S_{O_1} \times S_{O_2} = \mathrm{Tr}(2\,\overrightarrow{O_2O_1})$.

Réciproquement, soit une translation de vecteur $\vec{V}$ et deux points O_1 et O_2 tels que : $\overrightarrow{O_1O_2} = \frac{\vec{V}}{2}$.

Le théorème direct donne :

$$S_{O_2} \times S_{O_1} = \mathrm{Tr}(2\,\overrightarrow{O_1O_2}) = \mathrm{Tr}(\vec{V}).$$

Théorème. — ***Une translation de vecteur $\vec{V}$ se décompose d'une infinité de manières en un produit de deux symétries de centres O_1 et O_2 tels que $\overrightarrow{O_1O_2} = \frac{\vec{V}}{2}$.***

II. SYMÉTRIE PAR RAPPORT A UN PLAN

4. Définition.

Étant donné un plan fixe (P), si, à un point M on fait correspondre le point M′ tel que le plan (P) soit médiateur du segment MM′, on définit une transformation ponctuelle appelée symétrie par rapport au plan (P).

Elle sera notée : Symétrie (P) ou S_P.

Le plan (P) est dit plan de symétrie.

L'ensemble des points doubles est le plan (P).

Cette transformation est **involutive**.

Si M décrit une figure (F), M′ décrit une figure (F′) symétrique de (F) par rapport au plan (P).

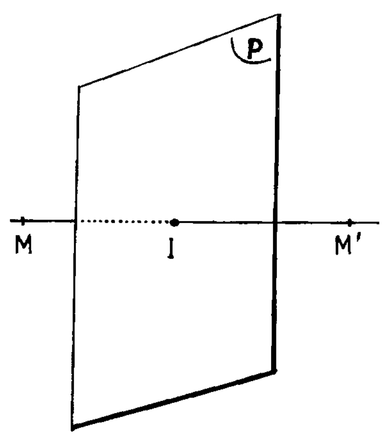
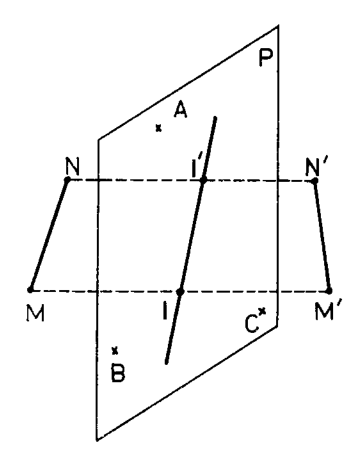


Fig. 4.

5. ***Une symétrie par rapport à un plan n'est pas un déplacement.***

En effet : trois points A, B, C non alignés de (P) sont confondus avec leurs homologues A′, B′, C′. Or, le seul déplacement ayant trois points doubles non alignés est la transformation identique. Deux points homologues M et M′ étant distincts [si M n'est pas dans le plan (P)], la symétrie par rapport à un plan n'est pas un déplacement. Soient alors deux autres points homologues N et N′, I et I′ les points d'intersection de MM′ et NN′ avec le plan (P).

Dans le plan MM′N′N, MN et M′N′ se correspondent dans le retournement d'axe II′. La distance de deux points M et N est égale à la distance de leurs homologues M′ et N′. La symétrie par rapport à un plan est donc une **isométrie.**



Une symétrie par rapport à un plan est un antidéplacement.

Remarque. Dans un plan donné, un retournement d'axe (D) est aussi une symétrie par rapport à un plan passant par (D) et perpendiculaire au plan donné. Ce retournement plan est un antidéplacement (ch. 23, n° 2).

Fig. 5.

6. Produit de deux symétries par rapport à deux plans parallèles (P_1) et (P_2).

Soient M_1 le symétrique de M par rapport à (P_1), M_2 le symétrique de M_1 par rapport à (P_2), I_1 le milieu de MM_1 et I_2 le milieu de M_1M_2. On a :

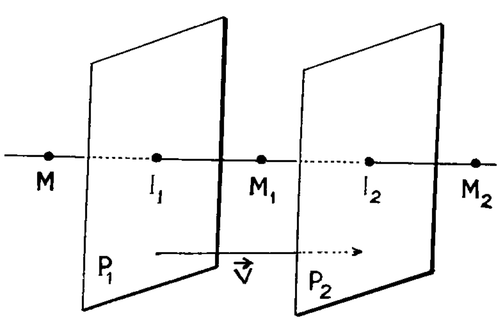


Fig. 6.

$$\overrightarrow{MM_1} = 2\overrightarrow{I_1M_1}, \qquad \overrightarrow{M_1M_2} = 2\overrightarrow{M_1I_2}\,;$$

d'où
$$\overrightarrow{MM_2} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M_2} = 2(\overrightarrow{I_1M_1} + \overrightarrow{M_1I_2}),$$

$$\mathbf{\overrightarrow{MM_2} = 2\overrightarrow{I_1I_2}}.$$

M se transforme en M_2 dans la translation de vecteur $2.\overrightarrow{I_1I_2}$.

Théorème. — ***Le produit de deux symétries par rapport à deux plans parallèles est une translation.***

$\vec{V}$ désignant le vecteur-translation perpendiculaire à (P_1) et (P_2) et transformant (P_1) en (P_2), la translation-produit a pour vecteur directeur : $2\vec{V}$.

$$S_{P_2} \times S_{P_1} = Tr(2\vec{V}).$$

Ce produit n'est pas commutatif, car l'application du théorème précédent donne :

$$S_{P_1} \times S_{P_2} = Tr\,(-2\vec{V}).$$

Réciproquement, soit une translation de vecteur $\vec{V}$. Considérons un plan (P_1) arbitraire mais orthogonal à $\vec{V}$ et le plan (P_2) déduit de (P_1) dans la translation $\frac{\vec{V}}{2}$. D'après le théorème direct, on a :

$$S_{P_2} \times S_{P_1} = Tr\left(2.\frac{\vec{V}}{2}\right) = Tr(\vec{V}).$$

Théorème. — ***Une translation de vecteur $\vec{V}$ peut se décomposer d'une infinité de manières en un produit de deux symétries par rapport à deux plans. Les deux plans de symétrie sont perpendiculaires à $\vec{V}$, le second se déduit du premier dans la translation $\frac{\vec{V}}{2}$.***

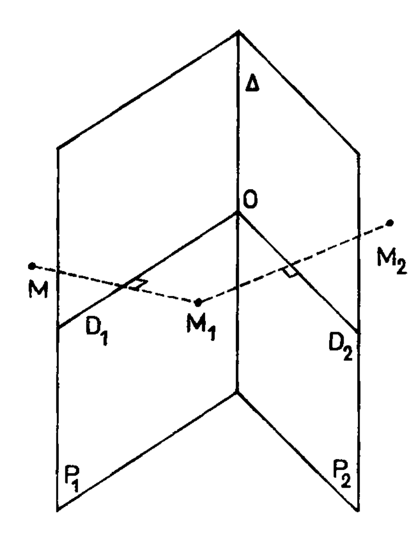
7. Produit de deux symétries par rapport à deux plans sécants (P_1) et (P_2).

Les droites MM_1 et M_1M_2 sont perpendiculaires aux plans (P_1) et (P_2) respectivement et, par suite, à (Δ) arête du dièdre (P_1, P_2). (Δ) est donc perpendiculaire au plan (R) des droites MM_1 et M_1M_2. Soient (D_1) et (D_2) les intersections du plan (R) et des plans (P_1) et (P_2).

Dans le plan (R), M_2 est le transformé de M dans le produit :

$$Ret\ D_2 \times Ret\ D_1.$$

Donc M_2 est l'homologue de M dans la rotation d'axe (Δ) et d'angle $2(D_1, D_2) = 2(P_1, \vec{\Delta}, P_2)$.



L'angle (D_1, D_2) est l'angle de la rotation d'axe (Δ) transformant (P_1) en (P_2).

Théorème. — ***Le produit de deux symétries par rapport à deux plans sécants est une rotation autour de leur intersection.***

$$S_{P_2} \times S_{P_1} = \text{Rot}[\Delta, 2(P_1, \vec{\Delta}, P_2)].$$

Remarques. 1° Si (P_1) et (P_2) sont perpendiculaires, le produit : $S_{P_2} \times S_{P_1}$ est un retournement d'axe (Δ).

Fig. 7.

2° En général, *ce produit n'est pas commutatif* :

$$S_{P_1} \times S_{P_2} = \text{Rot}[\Delta, 2(P_2, \vec{\Delta}, P_1)].$$

Il est commutatif si (P_1) et (P_2) sont perpendiculaires.

Réciproquement, soit une rotation d'axe Δ, d'angle α, (P_1) un plan arbitraire passant par Δ, et (P_2) le plan tel que : $(P_1, \vec{\Delta}, P_2) = \frac{\alpha}{2}$. On a :

$$S_{P_2} \times S_{P_1} = \text{Rot}[\Delta, 2(P_1, \vec{\Delta}, P_2)] = \text{Rot}[\Delta, \alpha].$$

Théorème. — ***Une rotation (Δ, α) peut se décomposer d'une infinité de manières en un produit de deux symétries par rapport à deux plans passant par l'axe de rotation. Le second plan de symétrie se déduit du premier dans la rotation $\left(\Delta, \frac{\alpha}{2}\right)$.***

8. Produit de deux symétries par rapport à un plan et un point.

Soient (P) et O un plan et un point donnés ; M un point quelconque, M_1 son homologue dans la symétrie par rapport à (P), M_2 l'homologue de M_1 dans la symétrie par rapport à O.

1° **Le point O appartient au plan (P)** (fig 7).

Le plan MM_1M_2 passant par MM_1 est perpendiculaire à (P) et contient la normale OX au plan (P) menée par O. OX est une **droite fixe**.

MM_2 est parallèle à OI du plan (P) car O et I sont les milieux de M_1M_2 et M_1M.

OX est donc médiatrice de MM_2.

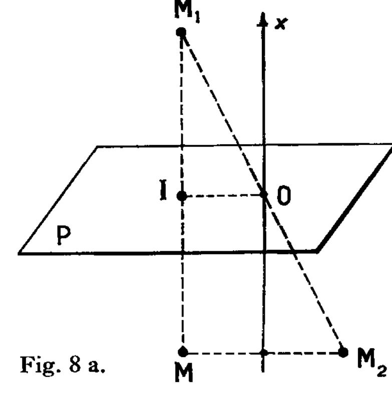
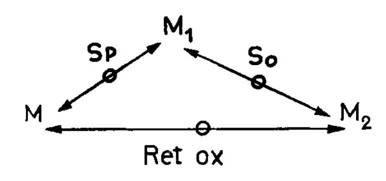


Fig. 8 a.

M_2 est donc l'homologue de M dans le retournement d'axe OX.

$$S_O \times S_P = \text{Ret}(OX).$$

Théorème. — ***Le produit de deux symétries par rapport à un plan et un point de ce plan est un retournement dont l'axe est perpendiculaire à ce plan en ce point.***



Remarque. Les transformations : S_O, S_P, Ret(OX) sont involutives. On peut faire le schéma ci-contre qui montre que :

$$S_0 \times S_P = S_P \times S_0 = \text{Ret}(OX).$$

Le produit des deux symétries est *commutatif.*

2° **Le point O est hors du plan P.**

Soit O′ un point du plan P et O′X la perpendiculaire en O′ à ce plan (fig. 8 b).

On a :

$$S_0 \times S_P$$
$$= S_0 \times S_{O'} \times S_{O'} \times S_P$$
$$= \text{Tr}(2\overrightarrow{O'O}) \times \text{Ret}(O'X).$$

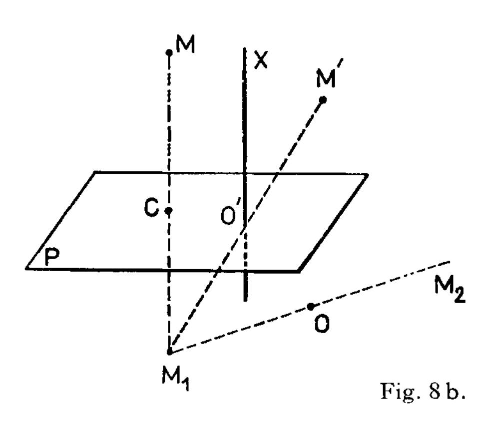


Fig. 8 b.

Théorème. — ***Le produit de deux symétries par rapport à un plan et un point est un déplacement.***

Ce produit *n'est pas commutatif*, car :

$$S_P \times S_0 = S_P \times S_0' \times S_0' \times S_0 = \text{Ret}(O'X) \times \text{Tr}(2.\overrightarrow{OO'}).$$

9. Comparaison des figures symétriques d'une figure donnée.

Dans les produits de symétries étudiés dans ce chapitre, si M décrit une figure (F), M_1 et M_2 décrivent des figures (F_1) et (F_2).

1° L'étude du n° 3 montre que deux figures (F) et (F_2) symétriques d'une figure (F_1) par rapport à **deux centres distincts** sont égales, car (F) et (F_2) sont homologues dans une translation.

2° Les n°s 6 et 7 montrent que deux figures (F) et (F_2) symétriques d'une figure (F_1) par rapport à **deux plans distincts** sont égales car (F) et (F_2) sont homologues dans une translation ou une rotation.

3° Le n° 8 montre que deux figures (F) et (F_2) symétriques d'une figure (F) par rapport **à un plan** et par rapport à **un point** se correspondent dans un déplacement.

Théorème. — ***Toutes les figures symétriques d'une même figure par rapport à des plans ou à des points sont égales entre elles.***

On peut donc dire, à un déplacement près, ***la*** figure symétrique d'une figure donnée sans préciser s'il s'agit d'une symétrie par rapport à un plan ou un point.

III. ÉLÉMENTS DE SYMÉTRIE D'UNE FIGURE

10. Définition.

Une figure admet un centre, un plan ou un axe de symétrie, si elle est invariante dans son ensemble dans une symétrie par rapport à ce centre, ce plan ou dans un retournement par rapport à l'axe.

Des théorèmes précédents, il résulte que :

• Si une figure a deux plans de symétrie perpendiculaires, elle admet leur intersection comme axe de symétrie (n° 7).

• Si une figure a deux axes de symétrie concourants et perpendiculaires elle en admet un troisième qui forme avec les deux autres un trièdre trirectangle (ch. 23, n° 4).

• Si une figure a trois plans de symétrie formant un trièdre trirectangle, elle admet les arêtes de ce trièdre comme axes de symétrie et le sommet du trièdre pour centre de symétrie.

11. Couple de droites D et D′.

a) **D et D′ sont parallèles** (fig. 11 a).

Plans de symétrie : le plan P des deux droites ; tout plan perpendiculaire à D et D′ ; le plan perpendiculaire à P le long de $x'x$ équidistante de D et D′ dans le plan P.

Fig. 11 a.

Axes de symétrie : la droite $x'x$; toute droite de P perpendiculaire à D ; les perpendiculaires à P en un point quelconque de $x'x$.

Centres de symétrie : tous les points de $x'x$.

b) **D et D′ sont concourantes en O** (fig. 11 b).

Plans de symétrie : le plan P des deux droites ; les plans perpendiculaires à P le long des bissectrices $x'x$ et $y'y$ de l'angle (D, D′).

Axes de symétrie : $x'x$, $y'y$; la perpendiculaire en O à P.

Centre de symétrie : le point O.

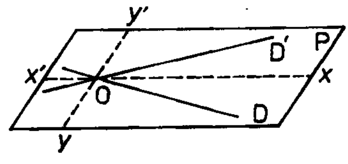
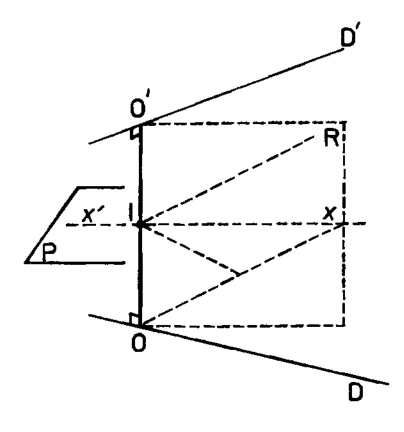


Fig. 11 b.

c) **D et D′ sont quelconques** (fig. 11 c).

Soit OO′ leur perpendiculaire commune.

Appliquons à D′ une symétrie par rapport au plan P médiateur de OO′, suivie d'une symétrie par rapport à l'un des plans bissecteurs du dièdre (D, OO′, D′) (le plan R par exemple). La droite D′ se transforme en D. L'intersection $x'x$



des plans P et R est donc un axe de symétrie pour D et D'.

Axes de symétrie :

- les bissectrices $x'x$ et $y'y$ de l'angle des parallèles à D et D' menées par le milieu I de OO' ;
- la perpendiculaire commune OO'.

Fig. 11 c.

12. Couple de plans P et P'.

a) P et P' sont parallèles.

Plans de symétrie : le plan R équidistant de P et P' ; tout plan perpendiculaire à P et P'.

Axes de symétrie : toute droite du plan R ; toute perpendiculaire à P.

Centres de symétrie : tout point du plan R.

b) P et P' se coupent suivant une droite D.

Plans de symétrie : tout plan R perpendiculaire à D ; les plans bissecteurs du dièdre (P, D, P').

Axes de symétrie : la droite D ; les droites des deux bissecteurs perpendiculaires à D.

Centres de symétrie : tous les points de D.

13. Triangle équilatéral.

Plans de symétrie : le plan du triangle ; les trois plans médiateurs des côtés.

Axes de symétrie : les trois hauteurs.

14. Cube.

Plans de symétrie :

les trois plans médiateurs des arêtes parallèles ;

les six plans contenant deux arêtes parallèles non dans une même face du cube.

Axes de symétrie :

En associant deux à deux ces plans de symétrie nous obtenons :

les trois droites joignant les centres des faces opposées ;

les six droites joignant les milieux des arêtes parallèles non dans une même face ;

Centre de symétrie : le point d'intersection des diagonales.

15. Tétraèdre régulier.

Rappelons les propriétés classiques suivantes :

les arêtes opposées sont orthogonales ;

les droites joignant les milieux des arêtes opposées leur sont perpendioulaires.

Plans de symétrie :

les six plans médiateurs des arêtes.

Axes de symétrie :

les trois perpendiculaires communes aux couples d'arêtes opposées.

EXERCICES

Symétrie.

316. Étant donné un triangle ABC, on effectue successivement une rotation de centre A et d'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, puis une rotation de centre B et d'angle $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$ et enfin une rotation de centre C et d'angle $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$. Démontrer que le produit de ces trois rotations est une symétrie par rapport à un point.

317. Démontrer que si une figure admet deux plans de symétrie rectangulaires, elle admet un axe de symétrie ; si une figure admet trois plans de symétrie rectangulaires deux à deux, elle admet trois axes de symétrie et un centre de symétrie.

318. Si une figure admet un plan de symétrie et un axe de symétrie, elle admet un second axe de symétrie.

319. Quel est le produit d'une symétrie par rapport à un point et d'une translation ?

320. Démontrer que les perpendiculaires abaissées des centres des cercles exinscrits sur les trois côtés d'un triangle sont concourantes.

321. Inscrire dans un quadrilatère un parallélogramme dont on donne le centre.

322. Construire un triangle connaissant les trois médiatrices et un point de l'un des côtés.

323. Construire un polygone connaissant les milieux des côtés. (On distinguera deux cas suivant que le nombre des côtés du polygone est pair ou impair.)

324. Sur une droite donnée dans un plan, trouver un point tel que les tangentes menées de ce point à deux circonférences données soient également inclinées sur la droite.

325. On donne deux points A et B d'une même côté d'une droite xy. Trouver sur cette droite un point M tel que $\widehat{AMx} = 2\widehat{BMy}$.

326. Étant donné un plan (P), un point O de ce plan et la perpendiculaire (D) en O au plan (P), montrer que le produit de deux quelconques des transformations suivantes : S_O, S_P, Ret(D) est la troisième et que le produit est commutatif.

327. On désigne par S_O une symétrie par rapport à un point O, par S_P une symétrie par rapport à un plan P, par Ret D un retournement autour d'une droite D.

Le problème a pour objet l'étude du produit de deux de ces transformations ; dans chacun des cas proposés, on indiquera si le produit est ou n'est pas commutatif.

A. Étude du produit : Ret D $\times$ S_O.

Démontrer que :

1° si le point O est sur D, ce produit est une symétrie par rapport à un plan ;

2° si le point O n'est pas sur D, ce produit peut être considéré comme le produit d'une symétrie par rapport à un plan et d'une translation.

B. Étude du produit S_P $\times$ Ret D.

Démontrer que :

1° Si la droite D est perpendiculaire au plan P, ce produit est une symétrie par rapport au point O où D rencontre P ;

2° Si la droite D est dans le plan P, ce produit est une symétrie par rapport à un plan ;

3° Si la droite D est parallèle au plan P, ce produit peut être considéré comme le produit d'une symétrie par rapport à un plan et d'une translation ;

4° Si la droite D est oblique par rapport à P, ce produit peut être considéré comme le produit d'une symétrie par rapport à un plan et d'une rotation.

328. Démontrer que :

1° L'ensemble des symétries par rapport à un point quelconque n'est pas un groupe.

2° L'ensemble des symétries par rapport à un plan quelconque n'est pas un groupe.

329. Déterminer les transformations géométriques qui font coïncider un rectangle avec lui-même. Montrer qu'elles forment un groupe commutatif de quatre éléments.

Pour étudier le produit de deux de ces transformations, qu'on désignera par I, S_O, S_D, S_Δ, on dressera le tableau suivant (table de multiplication) :

	I	S_O	S_D	S_Δ
I				
S_O				
S_D				
S_Δ				

et on écrira le résultat des produits S_iS_j à l'intersection de la ligne S_i et de la colonne S_j.

330. Déterminer les transformations géométriques qui font coïncider un triangle équilatéral avec lui-même. Montrer qu'elles forment un groupe.

Comme dans l'exercice précédent on dressera la table de multiplication.

Ce groupe est-il commutatif ?

331. Même exercice que ci-dessus en remplaçant le triangle équilatéral par un carré.

CHAPITRE 25

HOMOTHÉTIE

I. HOMOTHÉTIE

1. Définition.

Étant donnés un point fixe O et un nombre réel k non nul, l'homothétie est la transformation ponctuelle qui, à un point M quelconque, associe le point M′ tel que :

$$\boldsymbol{\overrightarrow{OM'} = k.\overrightarrow{OM}}.$$

Si M décrit une figure (F), M′ décrit une figure (F′) homothétique de M.

Cette définition entraîne

a) *l'alignement des points* O, M, M′ (vecteurs $\overrightarrow{\text{OM}}$ et $\overrightarrow{\text{OM}'}$ colinéaires) ;

b) *le rapport constant des longueurs* OM *et* OM′.

Le point O est **le centre d'homothétie** ; le nombre *k*, **le rapport d'homothétie.**

Une homothétie de centre O et de rapport *k* se note : **homothétie (O, k)** ou $\mathscr{H}$(O, *k*).

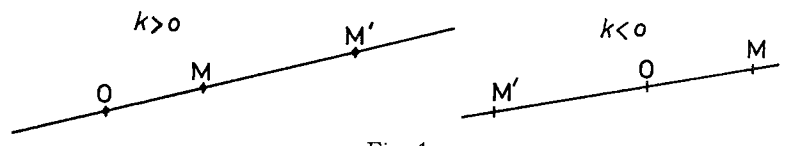


Fig. 1.

côté du centre O.

Si k > 0, l'homothétie est **positive** ; M et M′ sont du même côté du centre O.

Si k < 0, l'homothétie est **négative** ; M et M′ sont de part et d'autre du centre O.

Si k = 1, l'homothétie est la transformation identique.

Si k = — 1, l'homothétie est une symétrie de centre O.

La transformation **réciproque** de l'homothétie (O, k) est l'homothétie $\left(O, \frac{1}{k}\right)$.

L'homothétie est **involutive** si : $k = \frac{1}{k}$ ou $k = \pm 1$.

Un point U sera un **point double** dans l'homothétie si : $\overrightarrow{OU} = k.\overrightarrow{OU}$ ou $(1 - k)\overrightarrow{OU} = \overrightarrow{0}$. Donc :

- **Si k = 1,** cette relation est vérifiée quel que soit U : tous les points sont conservés ;
- si **k** $\neq$ **1**, cette relation est vérifiée pour $\overrightarrow{OU} = 0$. Le centre O est le seul point double.

2. Propriété caractéristique des figures homothétiques.

Soient (F) et (F') deux figures homothétiques dans l'homothétie (O, k), $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{A'M'}$, deux vecteurs homologues quelconques.

On a
$$\overrightarrow{OA'} = k.\overrightarrow{OA}$$
$$\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}\ ;$$
d'où
$$\overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OA'} = k(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA})$$
et
$$\overrightarrow{\mathbf{A'M'}} = \mathbf{k}\overrightarrow{\mathbf{AM}}.$$

Les deux vecteurs $\overrightarrow{A'M'}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont donc parallèles et dans le rapport d'homothétie k.

Réciproquement :

Soient deux figures (F) et (F'), A et A' des points **donnés** de (F) et (F'). Supposons qu'il existe une correspondance biunivoque entre les points M de (F) et les points M' de (F') telle que :

$$\overrightarrow{A'M'} = k\overrightarrow{AM},$$

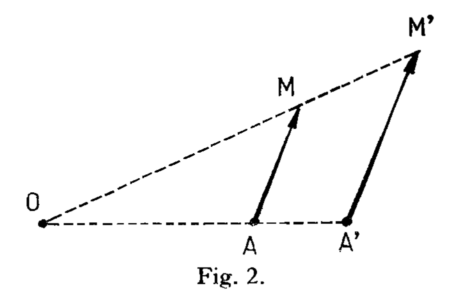


Fig. 2.

k étant un nombre réel constant différent de 1.

(Si $k = 1$, les deux figures se déduisent l'une de l'autre par translation). Sur la droite AA′, il existe un point unique O, tel que

$$\overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA}.$$

On peut donc écrire :

$$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{A'M'} = k\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{AM} = k(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM});$$

$$\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}.$$

Les points M et M′ se correspondent donc dans l'homothétie (O, k).

Donc, schématiquement ($k \neq 1$) :

$$\boxed{(F) \underset{\mathscr{H}(O,\, k)}{\leftrightarrow} (F') \Leftrightarrow \overrightarrow{A'M'} = k.\overrightarrow{AM}}$$

Théorème. — ***Une condition nécessaire et suffisante pour que deux figures (F) et (F′) soient homothétiques, est que les vecteurs homologues soient parallèles et dans un rapport constant.***

3. Tangentes à deux courbes homothétiques.

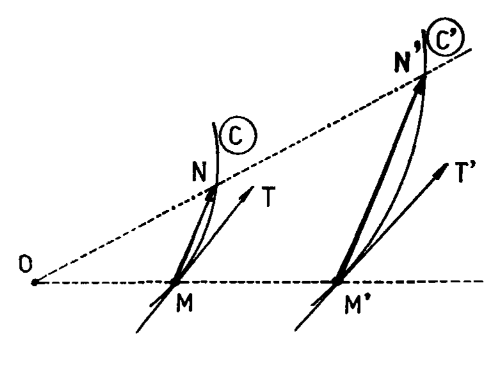


Fig. 3.

Soient (C) et (C′) deux courbes homologues dans l'homothétie (O, k), M et N deux points de (C), M′ et N′ les points correspondants de (C′). Les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{M'N'}$ sont parallèles (n° 2).

Lorsque N tend vers M en se déplaçant sur la courbe (C), N′ tend vers M′ en se déplaçant sur la courbe (C′).

Si MN admet une position limite MT tangente à la courbe (C) au point M, M'N' constamment parallèle à MN, admettra une position limite M'T' parallèle à MT qui sera la tangente à la courbe (C') en M'.

Si deux courbes (C) et (C') sont homothétiques, et si l'une d'elles admet une tangente en un point M, la courbe (C') admet une tangente en M', parallèle à la tangente en M.

4. Angle de deux courbes.

Si deux courbes (C_1) et (C_2) se coupent en un point M où elles admettent chacune une tangente, **l'angle des deux courbes est par définition, l'angle de leurs tangentes en ce point.**

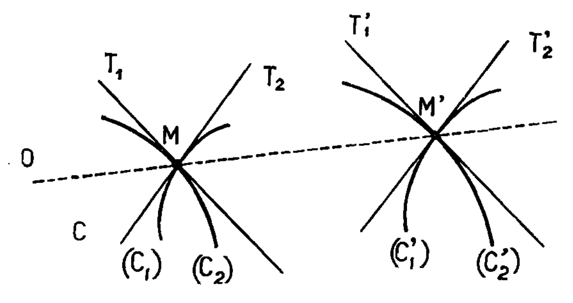


Fig. 4.

Soient (C'_1) et (C'_2) les courbes déduites de (C_1) et (C_2) dans l'homothétie (O, k). Si les courbes (C_1) et (C_2) se coupent en un point M où elles admettent des tangentes MT_1 et MT_2, (C'_1) et (C'_2) se coupent en un point M' et y admettent des tangentes $M'T'_1$ et $M'T'_2$ parallèles à MT_1 et MT_2.

Les courbes (C_1) et (C_2), (C'_1) et (C'_2) se coupent respectivement sous le même angle.

L'homothétie conserve les angles.

Exercice. En utilisant la dérivée vectorielle de $\overrightarrow{OM}$, démontrer les théorèmes des n° 3 et 4.

Conséquence. Si deux courbes sont tangentes en M, une homothétie les transforme en deux courbes tangentes en M' homologue de M.

5. Produit de deux homothéties.

Soient (F) une figure donnée, (F_1) son homologue dans l'homothétie (O_1, k_1), (F_2) l'homologue de (F_1) dans l'homothétie (O_2, k_2), $\overrightarrow{AM}$ un vecteur quelconque de (F), $\overrightarrow{A_1M_1}$ et $\overrightarrow{A_2M_2}$ les vecteurs correspondants de (F_1) et (F_2).

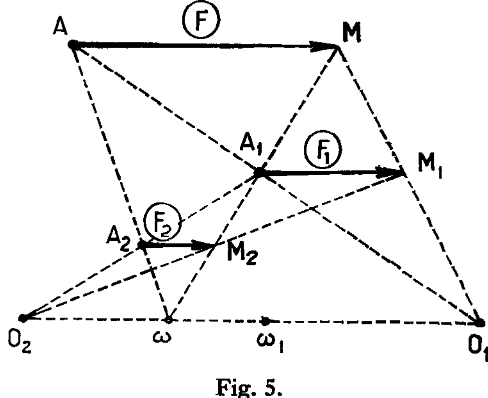


Fig. 5.

On a (n° 2)

$$\overrightarrow{A_1M_1} = k_1\overrightarrow{AM}$$

$$\overrightarrow{A_2M_2} = k_2\overrightarrow{A_1M_1} ;$$

d'où

$$\overrightarrow{A_2M_2} = k_1k_2\overrightarrow{AM}.$$

Si $k_1k_2 = 1$, les deux figures (F) et (F_2) se déduisent par translation.

Si $k_1k_2 \neq 1$, les deux figures (F) et (F_2) sont homothétiques dans le rapport k_1k_2 (n° 2).

Soit ω le centre de cette homothétie ; c'est le point double de la transformation. Si ω_1 est l'homologue de ω dans l'homothétie (O_1, k_1) ω doit être l'homologue de ω_1 dans l'homothétie (O_2, k_2). On doit donc avoir

$$\overrightarrow{O_1\omega_1} = k_1\,\overrightarrow{O_1\omega}, \tag{1}$$

et

$$\overrightarrow{O_2\omega} = k_2\,\overrightarrow{O_2\omega_1}. \tag{2}$$

Or,

$$\overrightarrow{O_2\omega} = \overrightarrow{O_2O_1} + \overrightarrow{O_1\omega},$$

$$\overrightarrow{O_2\omega_1} = \overrightarrow{O_2O_1} + \overrightarrow{O_1\omega_1} = \overrightarrow{O_2O_1} + k_1\overrightarrow{O_1\omega} ;$$

(2) s'écrit donc :

$$\overrightarrow{O_2O_1} + \overrightarrow{O_1\omega} = k_2(\overrightarrow{O_2O_1} + k_1\overrightarrow{O_1\omega}),$$

et

$$(1 - k_1k_2)\overrightarrow{O_1\omega} = (k_2 - 1)\overrightarrow{O_2O_1} = (1 - k_2)\overrightarrow{O_1O_2}.$$

$$\overrightarrow{O_1\omega} = \frac{1 - k_2}{1 - k_1k_2}\overrightarrow{O_1O_2}. \qquad (3)$$

Les vecteurs $\overrightarrow{O_1\omega}$ et $\overrightarrow{O_1O_2}$ sont colinéaires : *les trois centres d'homothétie sont alignés.*

Le produit de deux homothéties de rapport k_1 et k_2 est une homothétie de rapport k_1k_2 et les centres d'homothétie sont alignés.

Remarques.

1° La relation (1) donne : $\overrightarrow{O_1\omega_1} = \dfrac{k_1(1 - k_2)}{1 - k_1k_2}\overrightarrow{O_1O_2}$.

2° Supposons que l'on permute l'ordre des homothéties. Soient $\overrightarrow{A'_2M'_2}$ l'homologue de $\overrightarrow{AM}$ dans l'homothétie (O_2, k_2) et $\overrightarrow{A'_1M'_1}$ l'homologue de $\overrightarrow{A'_2M'_2}$ dans l'homothétie (O_1, k_1).

On aura :

$$\overrightarrow{A'_2M'_2} = k_2\overrightarrow{AM} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{A'_1M'_1} = k_1\overrightarrow{A'_2M'_2}\,;$$

d'où
$$\overrightarrow{A'_1M'_1} = k_1k_2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{A_2M_2}.$$

Les figures (F_2) *et* (F'_1) *sont égales et l'on passe de l'une à l'autre par une translation.*

Soit ω' le centre de l'homothétie produit ; on aura, en échangeant O_1 et O_2, k_1 et k_2 dans (3) :

$$\overrightarrow{O_2\omega'} = \frac{1 - k_1}{1 - k_1k_2}\overrightarrow{O_2O_1},$$

et

$$\overrightarrow{O_1\omega'} = \overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2\omega'} = \overrightarrow{O_1O_2} - \frac{1 - k_1}{1 - k_1k_2}\overrightarrow{O_1O_2}$$

$$\overrightarrow{O_1\omega'} = \frac{k_1(1 - k_2)}{1 - k_1k_2}\overrightarrow{O_1O_2} = \overrightarrow{O_1\omega_1}$$

ω' est donc confondu avec ω_1.

Le produit de deux homothéties n'est pas commutatif.

Les centres ne seront confondus que si k_1 ou k_2 égalent 1, l'une des homothéties est alors la transformation identique.

3° Si $k_1k_2 = 1$, $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{A_2M_2}$, le centre d'homothétie est rejeté à l'infini. **Le produit de deux homothéties de rapports inverses est une translation de vecteur $\overrightarrow{AA_2}$.**

Pour déterminer ce vecteur-translation, supposons que le point A se trouve en O_1 et posons $k_2 = \dfrac{1}{k_1}$.

Dans la première homothétie (O_1, k_1), O_1 est un point double donc A_1 homologue de A est en O_1 et le vecteur translation est : $\overrightarrow{O_1A_2}$. On a :

$$\overrightarrow{O_1A_2} = \overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2A_2} \qquad (3)$$

et

$$\overrightarrow{O_2A_2} = k_2.\overrightarrow{O_2A_1} = \frac{1}{k_1}\overrightarrow{O_2O_1}$$

(3) s'écrit donc :

$$\overrightarrow{O_1A_2} = \left(1 - \frac{1}{k_1}\right)\overrightarrow{O_1O_2}.$$

C'est le vecteur translation cherché.

6. Produit d'une homothétie et d'une translation.

Soient (F) une figure plane, (F′) son homologue dans l'homothétie (O, k) et (F″) l'homologue de (F′) dans la translation $(\vec{V})$.

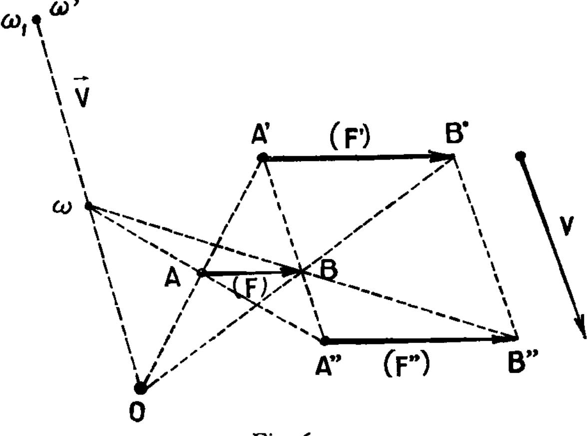


Fig. 6.

Si $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur quelconque de (F), $\overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{A''B''}$ les vecteurs correspondants de (F′) et de (F″), on a :

$$\overrightarrow{A'B'} = k.\overrightarrow{AB}$$

et

$$\overrightarrow{A''B''} = \overrightarrow{A'B'} ;$$

d'où

$$\overrightarrow{A''B''} = k\overrightarrow{AB}.$$

Les deux figures (F) *et* (F″) *sont donc homothétiques, puisque leurs vecteurs homologues sont parallèles et dans un rapport constant.*

Le centre d'homothétie est point double de la transformation ; soit ω ce point. Si ω' est l'homologue de ω dans l'homothétie (O, k)

$$\overrightarrow{O\omega'} = k.\overrightarrow{O\omega},$$

ω doit être l'homologue de ω' dans la translation $(\vec{V})$

$$\overrightarrow{\omega'\omega} = \vec{V}\,;$$

d'où $$\overrightarrow{O\omega'} = k\,\overrightarrow{O\omega} = \overrightarrow{O\omega} + \overrightarrow{\omega\omega'} = \overrightarrow{O\omega} - \vec{V},$$

et $$\overrightarrow{O\omega} = \frac{\vec{V}}{1-k}$$

relation qui fournit la position de ω *sur la parallèle à* $\vec{V}$ *menée par* O.

Remarque. Si l'on permute l'ordre des transformations, on aura

$$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{A''B''} = k\,\overrightarrow{A'B'},$$

ce qui entraîne encore

$$\overrightarrow{A''B''} = k.\overrightarrow{AB}.$$

Le produit est encore une homothétie de rapport k, son centre ω_1 est tel que

$$\overrightarrow{\omega_1\omega'_1} = \vec{V} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{O\omega_1} = k\,\overrightarrow{O\omega'_1}$$

$$\overrightarrow{O\omega_1} = k\left[\overrightarrow{O\omega_1} + \overrightarrow{\omega_1\omega'_1}\right] = k\left[\overrightarrow{O\omega_1} + \vec{V}\right],$$

et $$\overrightarrow{O\omega_1} = \frac{k\vec{V}}{1-k}$$

ω et ω_1 sont donc distincts (ω_1 n'est autre que le point ω' du raisonnement précédent).

Le produit d'une homothétie et d'une translation n'est pas commutatif.

Le produit d'une homothétie positive et d'une translation est une homothétie.

7. Groupe des homothéties-translations.

Considérons l'ensemble des homothéties et des translations muni de l'opération produit.

Propriétés du produit.

1° C'est une opération interne car :

- le produit de deux homothéties est une homothétie ou une translation

- le produit de deux translations est une translation ;
- le produit d'une homothétie et d'une translation (ou inversement) est une homothétie

2° La transformation identique I est l'élément neutre.

3° A chaque transformation T de l'ensemble correspond une transformation réciproque T^{-1} : $T \times T^{-1} = I$.

L'ensemble des homothéties-translations muni de l'opération produit a la structure de groupe.

Remarque. — Ce groupe n'est pas commutatif.

8. Homothétie de centres distincts et de rapport donné.

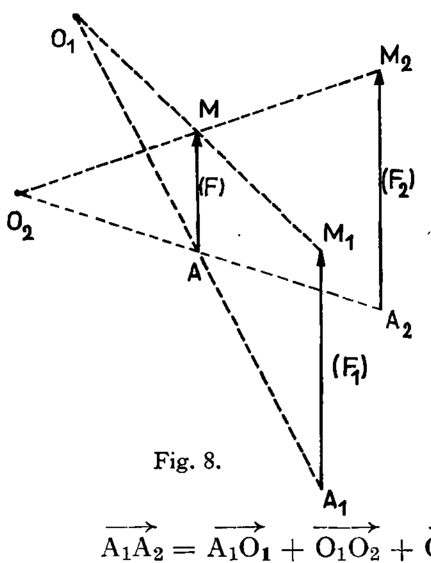


Fig. 8.

Appliquons à une **même** figure (F) deux homothéties (O_1, k) et (O_2, k) de centres distincts et de *même rapport*.

Soient A et M deux points de (F), A_1 et M_1 leurs homologues sur (F_1), A_2 et M_2 leurs homologues sur (F_2) (fig. 8). On a :

$\overrightarrow{A_1M_1} = k.\overrightarrow{AM}$

et $\overrightarrow{A_2M_2} = k.\overrightarrow{AM}$.

(F_1) et (F_2) se correspondent donc dans une translation de vecteur $\overrightarrow{A_1A_2}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A_1A_2} &= \overrightarrow{A_1O_1} + \overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2A_2}\\ &= k.\overrightarrow{AO_1} + \overrightarrow{O_1O_2} + k.\overrightarrow{O_2A}\\ &= \overrightarrow{O_1O_2} + k.\overrightarrow{O_2O_1} = (1 - k)\overrightarrow{O_1O_2}.\end{aligned}$$

Théorème. — ***Deux figures homothétiques d'une même figure dans des homothéties de même rapport sont égales.***

Conséquence. — Pour trouver la figure homothétique d'une figure donnée, on peut choisir arbitrairement le centre d'homo thétie puis effectuer une translation.

9. Figures homothétiques des principales figures.

a) ***La figure homothétique d'une droite qui passe par le centre d'homothétie est la droite elle-même.***

Tout point M de (D) a, en effet, pour homologue un autre point M′ de (D).

Réciproquement, *si une droite est à elle-même son homothétique, elle passe par le centre d'homothétie.*

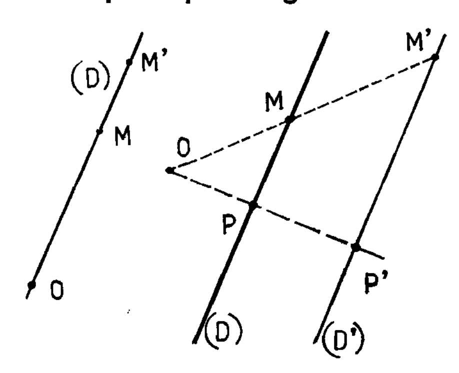


Fig. 9.

b) ***La figure homothétique d'une droite (D) qui ne passe pas par le centre d'homothétie O est une droite parallèle.***

Soit P la projection de O sur (D). Dans l'homothétie (P, k) la droite (D) est conservée dans son ensemble. Dans l'homothétie (O, k) la droite (D) se transforme en (D′) déduite de (D) dans la translation de vecteur : $(1 - k)\overrightarrow{PO}$ (n° 8).

c) ***La figure homothétique d'un plan (P) qui passe par le centre d'homothétie est le plan lui-même.***

Tout point M du plan a son homothétique sur OM, donc dans (P).

Réciproquement, *tout plan conservé dans une homothétie passe par le centre d'homothétie.*

d) ***La figure homothétique d'un plan (P) qui ne passe pas par le centre d'homothétie est un plan parallèle au plan (P).***

Il se déduit en effet du plan (P) dans une translation de vecteur II′, (I étant la projection de O sur (P)) tel que

$$\overrightarrow{II'} = (1 - k)\,\overrightarrow{IO} \quad (\text{n}^\circ\ 8)$$

e) ***L'homothétique d'un angle est un angle égal.***

[Choisir le centre d'homothétie au sommet de l'angle, puis effectuer la translation].

f) ***L'homothétique d'un dièdre est un dièdre égal.*** [Choisir le centre d'homothétie sur l'arête du dièdre puis effectuer la translation].

10. Figure homothétique d'un cercle (C).

a) Le centre d'homothétie est le centre C du cercle.

A tout point M du cercle (C) correspond un point M_1 tel que

$$CM_1 = kCM = kR = C^{te}.$$

L'ensemble des points M_1 est donc un cercle (C_1) concentrique à (C) de rayon $|k|R$.

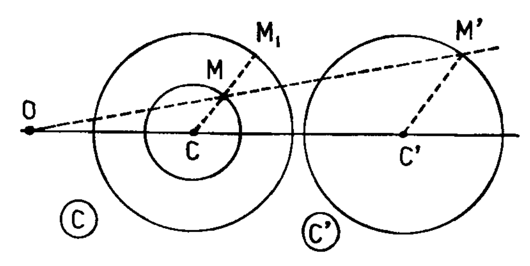


Fig. 10 a.

b) Le centre d'homothétie est un point quelconque O.

Si l'on prend comme centre d'homothétie le centre C du cercle, on obtient le cercle (C_1) concentrique au cercle (C) et de rayon $|k|$ R.

Si l'on prend un point O quelconque comme centre d'homothétie, l'homothétique de (C) sera le cercle (C′) déduit de (C_1) dans la translation

$$\overrightarrow{CC'} = (1 - k)\,\overrightarrow{CO}$$

C'est donc un cercle de centre C′ tel que

$$\overrightarrow{OC'} = k\overrightarrow{OC}$$

et de rayon $|k|R$. Les centres C et C′ sont des points homologues.

Si O *est dans le plan du cercle* (C), *la translation s'effectue dans ce plan, et* (C′) *s'y trouvera également.*

Si O n'est pas dans le plan du cercle (C), le cercle (C′) se trouve dans un plan parallèle à celui de (C).

Réciproquement, soient (C) et (C′) deux cercles de centres C et C′ de rayons R et R′, situés dans un même plan ou dans des plans parallèles.

A tout rayon CM de (C), on peut faire correspondre un rayon C′M′ parallèle et de même sens entre lesquels existe la relation.

$$\overrightarrow{C'M'} = \frac{R'}{R}\overrightarrow{CM}.$$

Les deux cercles (C′) et (C) sont donc homothétiques (nº 2), dans le rapport $\frac{R'}{R}$, le centre est un point O tel que

$$\overrightarrow{OC'} = \frac{R'}{R}\overrightarrow{OC}.$$

(Ce point existe si R′ ≠ R.)

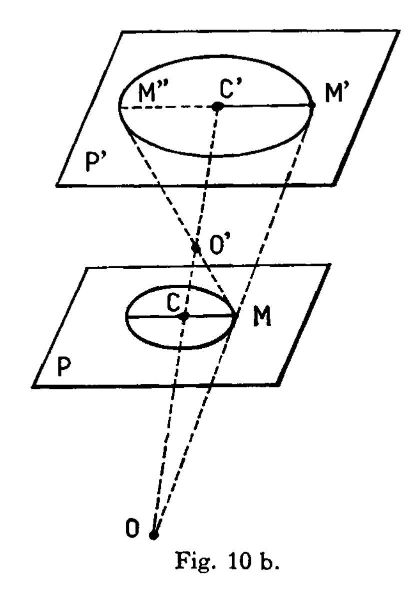


Fig. 10 b.

On peut de même au rayon $\overrightarrow{CM}$ faire correspondre le rayon $\overrightarrow{C'M''}$ parallèle et de sens contraire, entre lesquels existe la relation

$$\overrightarrow{C'M''} = -\frac{R'}{R}\overrightarrow{CM}.$$

Les deux cercles (C) et (C′) sont homothétiques dans le rapport $-\frac{R'}{R}$, le centre est un point O′ tel que

$$\overrightarrow{O'C'} = -\frac{R'}{R}\overrightarrow{O'C}.$$

Deux cercles situés dans un même plan ou dans des plans parallèles, se correspondent dans deux homothéties l'une positive, l'autre négative (R ≠ R′).

Remarques. *a)* **Si R = R′**, les deux cercles se correspondent:

1) *dans une translation*, le centre O est rejeté à l'infini ;

2) *dans une symétrie*, le centre O′ est au milieu de CC′.

b) On a
$$\frac{\overline{OC'}}{\overline{OC}} = -\frac{\overline{O'C'}}{\overline{O'C}} = \frac{R'}{R}.$$

O et O′ sont conjugués harmoniques de C et C′ dans le rapport $\frac{R'}{R}$.

11. Construction des centres d'homothétie de deux cercles coplanaires.

Soient deux cercles (C) et (C′) coplanaires et inégaux de centres C et C′. A un rayon CM de (C) l'homothétie associe un rayon C′M′ de (C′). Le point d'intersection de MM′ et de la ligne des centres est un des centres d'homothétie. Si $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{C'M'}$ sont de même sens, on obtiendra le centre d'homothétie positive. Si $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{C'M'}$ sont de sens contraires, on obtiendra le centre d'homothétie négative.

Si d'un centre d'homothétie, on peut mener une tangente à l'un des cercles, elle est tangente à l'autre car cette droite est invariante dans l'homothétie (nº 4). Donc, **si un centre d'homothétie est extérieur à l'un des cercles, il est extérieur à l'autre.**

Si un centre d'homothétie est intérieur à un des cercles (C), il est intérieur à l'autre. Sinon, de ce centre d'homothétie, on pourrait mener une tangente à (C′) qui serait tangente à (C).

La figure 11 indique la construction des centres d'homothétie dans les différents cas, ainsi que leurs positions par rapport aux cercles.

On remarquera que si deux cercles sont tangents, **le point de contact est centre d'homothétie** positive ou négative suivant que le contact est intérieur ou extérieur.

12. Figure homothétique d'une sphère.

La figure homothétique d'une sphère est :

a) ***une sphère concentrique de rayon*** $|k|R$, si le centre d'homothétie est le centre de la sphère ;

b) ***une sphère déduite de la précédente par translation,*** si le centre d'homothétie n'est pas le centre de la sphère.

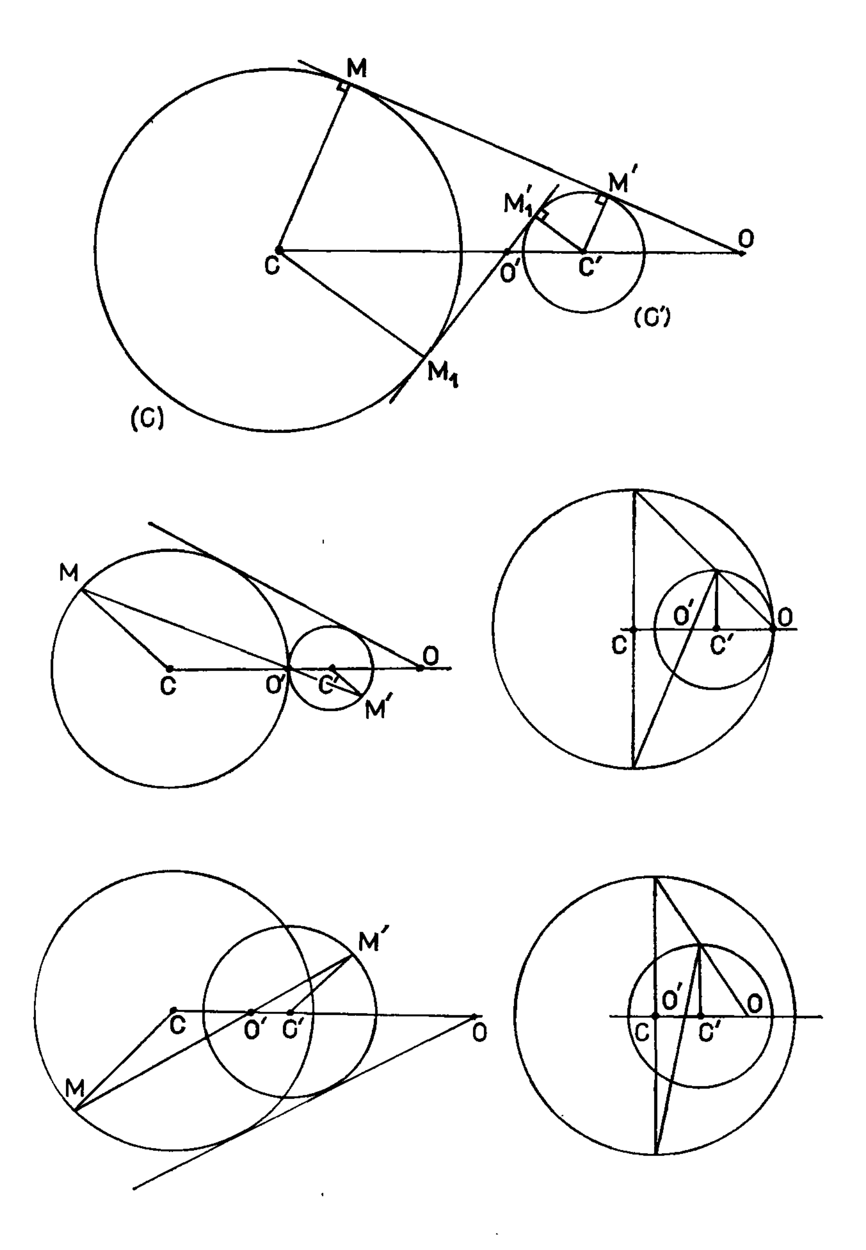


Fig. 11

Réciproquement deux sphères (S) et (S′) de centres C et C′ et de rayons R et R′ peuvent être considérées comme homothétiques :

a) ***dans une homothétie positive de rapport $\frac{R'}{R}$ et de centre O, tel que***

$$\overrightarrow{OC'} = \frac{R'}{R}\overrightarrow{OC}\,;$$

b) ***dans une homothétie négative, de rapport $-\frac{R'}{R}$ et de centre O′, tel que***

$$\overrightarrow{O'C'} = -\frac{R'}{R}\overrightarrow{O'C}.$$

A tout rayon CM de (S) on peut, en effet, faire correspondre :

a) un rayon C′M′ de (S′) tel que $\overrightarrow{C'M'} = \frac{R'}{R}\overrightarrow{CM}$;

b) un rayon C′M″ de (S′) tel que $\overrightarrow{C'M''} = -\frac{R'}{R}\overrightarrow{CM}$.

Remarques. Si les deux sphères sont *égales*, l'un des centres est rejeté à l'infini, l'autre est au milieu de CC′.

La première homothétie devient une translation ($\overrightarrow{CC'}$), *la seconde une symétrie* (O′).

Si les deux sphères sont *concentriques*, *les centres d'homothétie sont confondus avec le centre commun.*

Si les centres d'homothétie sont *extérieurs* aux sphères, ce sont les sommets de deux cônes circonscrits aux deux sphères.

13. Homothéties de trois cercles ou de trois sphères.

Soient trois cercles (C_1), (C_2), (C_3) situés dans un même plan ou dans des plans parallèles. Il y a six centres d'homothéties des cercles associés deux à deux.

Soit O_i l'un quelconque de ces six centres d'homothéties.

Le cercle (C_2) est déduit de (C_1) dans une homothétie (O_1, k_1) $\left[|k_1| = \frac{R_2}{R_1}.\right]$ (C_3) est déduit de (C_2) dans une homothétie (O_2, k_2).

Dans le produit de ces deux homothéties (C_3) est déduit de (C_1) dans une homothétie (O_3, k_1k_2), O_3 étant aligné avec O_1 et O_2 (n° 5). O_3 est nécessairement l'un des centres des homothéties transformant (C_1) en (C_3).

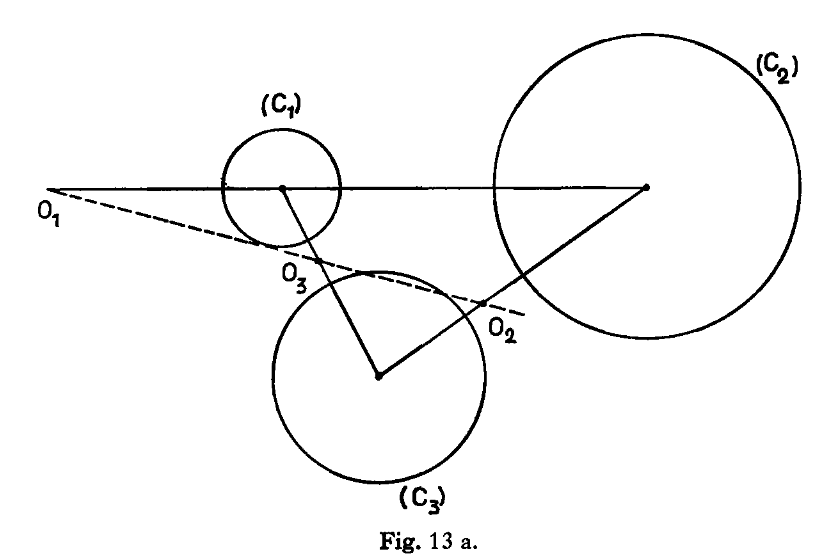


Fig. 13 a.

Si k_1 et k_2 sont de même signe, l'homothétie produit est positive et si k_1 et k_2 sont de signes contraires, l'homothétie produit est négative.

Fig. 13 b.

Théorème. — ***Les six centres d'homothéties de trois cercles pris deux à deux, situés dans un même plan ou dans des plans parallèles, sont trois à trois sur une droite appelée axe d'homothétie. Sur chaque axe d'homothétie il y a zéro ou deux centres d'homothéties négatives.***

Il existe quatre axes d'homothétie.

Le raisonnement est valable pour **trois sphères**. Les quatre axes d'homothétie appartiennent au plan des centres des sphères.

Cas particulier.

Si (C_3) est tangent à (C_1) et à (C_2), les points de contact sont alignés avec l'un ou l'autre des centres des homothéties de (C_1) et (C_2).

14. Aires de deux polygones homothétiques.

Soient (T) et (T′) deux triangles homothétiques.

Les bases BC $= a$ et B′C′ $= a'$, les hauteurs AH $= h$ et A′H′ $= h'$ sont homologues et telles que

$$\frac{a}{a'} = \frac{h}{h'} = |k| ;$$

d'où

$$\frac{\text{aire T}'}{\text{aire T}} = \frac{\frac{a'h'}{2}}{\frac{ah}{2}} = \frac{a'}{a} \cdot \frac{h'}{h} = k^2.$$

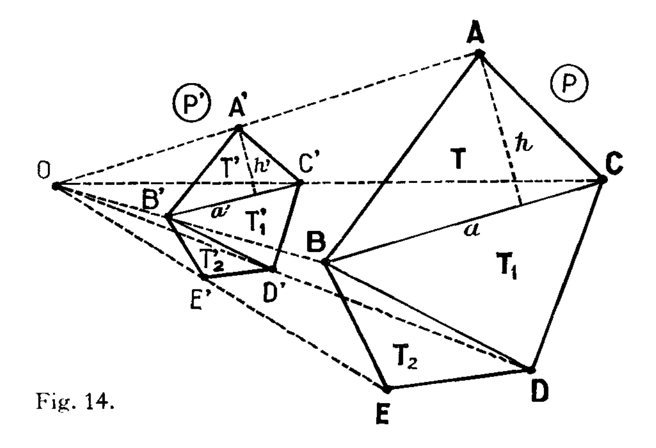


Fig. 14.

Soient (P) et (P′) deux polygones homothétiques, ils peuvent être décomposés en triangles homothétiques (T) et (T′), (T_1) et (T'_1), (T_2) et (T'_2).

On aura

$$\frac{\text{aire } (T')}{\text{aire } (T)} = \frac{\text{aire } (T'_1)}{\text{aire } (T_1)} = \frac{\text{aire } (T'_2)}{\text{aire } (T_2)} = k^2,$$

d'où
$$\frac{\text{aire } (P')}{\text{aire } (P)} = \frac{\text{aire } (T') + \text{aire } (T'_1) + \text{aire } (T'_2)}{\text{aire } (T) + \text{aire } (T_1) + \text{aire } (T_2)} = k^2.$$

Le rapport des aires de deux polygones homothétiques est égal au carré du rapport d'homothétie.

15. Volumes de deux polyèdres homothétiques.

La figure homothétique d'un polyèdre est un polyèdre.

Les dièdres homologues et les angles homologues sont égaux ; les faces des polyèdres sont des polygones homothétiques situés dans des plans parallèles; le rapport de leurs côtés égale le module du rapport d'homothétie, et le rapport des aires égale le carré du rapport d'homothétie.

Soient (T) et (T′) deux tétraèdres homothétiques.

On aura :

$$\frac{\text{volume } (T')}{\text{volume } (T)} = \frac{\dfrac{\text{aire } B' \times h'}{3}}{\dfrac{\text{aire } B \times h}{3}} = \frac{\text{aire } B'}{\text{aire } B} \times \frac{h'}{h}$$
$$= k^2 \times |k| = |k^3|.$$

Deux polyèdres homothétiques (P) et (P′) peuvent être décomposés en tétraèdres homothétiques, (T) et (T′), (T_1) et (T'_1), (T_2) et (T'_2) ... .

On aura

$$\frac{\text{volume } (T')}{\text{volume } (T)} = \frac{\text{volume } (T'_1)}{\text{volume } (T_1)} = \frac{\text{volume } (T'_2)}{\text{volume } (T_2)} = |k^3|$$

$$\frac{\text{volume } (T') + \text{volume } (T'_1) + \text{volume } (T'_2)}{\text{volume } (T) + \text{volume } (T_1) + \text{volume } (T_2)} = \frac{\text{volume } (P')}{\text{volume } (P)} = |k^3|.$$

Le rapport des volumes de deux polyèdres homothétiques est égal à la valeur absolue du cube du rapport d'homothétie.

II. APPLICATIONS DE L'HOMOTHÉTIE

16. Construction de cercles.

Construire un cercle passant par un point A donné et homothétique d'un cercle (C) donné dans une homothétie de centre donné O.

Le centre ω du cercle cherché devra se trouver sur la droite OC qui joint le centre d'homothétie au centre du cercle donné.

D'autre part, le point *a* de (C) homothétique de A sera à l'intersection de OA et du cercle (C), et les rayons aboutissant aux points homologues devront être parallèles.

D'où la construction :

On mène la droite OA qui coupe (C) en *a*. On mène *a*C puis Aω parallèle à *a*C qui coupe OA au point ω, centre du cercle cherché.

Il y a deux solutions, une ou zéro suivant que la droite OA *coupe le cercle* (C), *lui est tangente ou ne le coupe pas.*

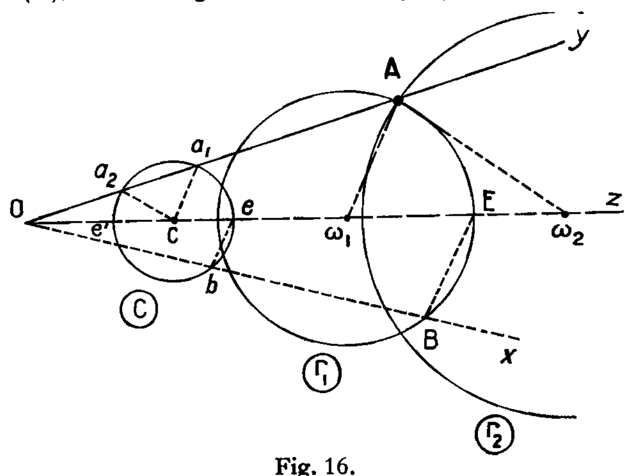


Fig. 16.

La construction est en défaut si le point donné est sur OC, en E par exemple. Le point homologue de E est *e* (ou *e'*). On prend un point *b* quelconque sur (C) et on mène par E la parallèle à *eb* qui recoupe O*b* en B, homologue de *b*. On est ramené au cas précédent.

Il y a alors deux solutions.

17. ***Construire un cercle passant par un point donné A et tangent à deux droites concourantes données.***

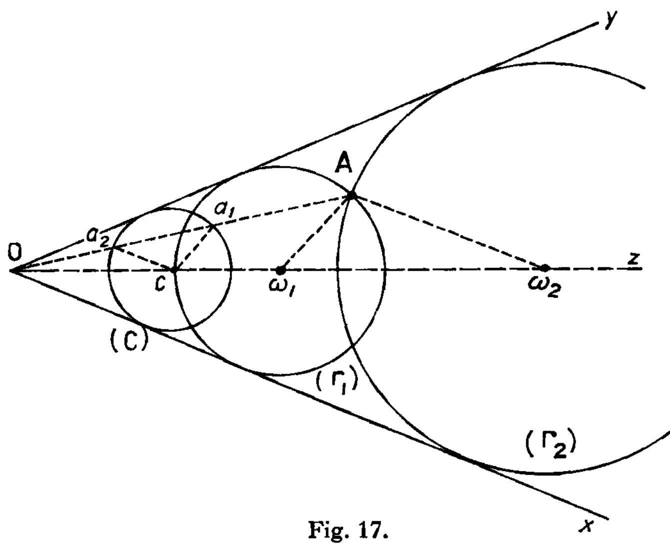


Fig. 17.

Tous les cercles tangents à deux droites concourantes Ox et Oy admettent, deux à deux, le point de concours comme centre d'homothétie. On construira l'un quelconque de ces cercles (C) et l'on est ramené au cas précédent : on trace la sécante OA qui coupe (C) en a homologue de A. Le centre ω du cercle cherché est à l'intersection de la bissectrice Oz et de la parallèle à Ca menée par A.

Il y a deux solutions si A *est intérieur à l'angle* xOy, *une seule si* A *est sur* Ox *ou sur* Oy.

18. Cercle d'Euler.

Considérons un triangle ABC, de hauteurs AA′, BB′, CC′ de médianes AA″, BB″, CC″ et soient H et G l'orthocentre et le point de concours des médianes de ce triangle, O le centre du cercle circonscrit.

Les triangles A″B″C″ et ABC donnent

$$\frac{\overrightarrow{A''B''}}{\overrightarrow{AB}} = \frac{\overrightarrow{B''C''}}{\overrightarrow{BC}} = \frac{\overrightarrow{C''A''}}{\overrightarrow{CA}} = -\frac{1}{2}.$$

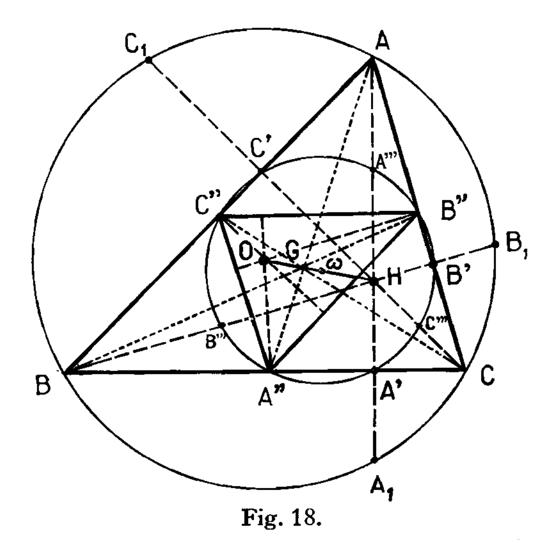


Fig. 18.

Ils sont donc homothétiques dans le rapport $-\frac{1}{2}$ et comme

$$\frac{\overrightarrow{GA''}}{\overrightarrow{GA}} = \frac{\overrightarrow{GB''}}{\overrightarrow{GB}} = \frac{\overrightarrow{GC''}}{\overrightarrow{GC}} = -\frac{1}{2}.$$

le centre d'homothétie est le point G.

Les cercles (O) circonscrit à ABC, et (Γ) circonscrit à $A''B''C''$ sont donc homothétiques dans l'homothétie $\left(G, -\frac{1}{2}\right)$.

Le point O est l'orthocentre du triangle $A''B''C''$; il est l'homologue de H, orthocentre de ABC et

$$\overrightarrow{GO} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GH} = \frac{\overrightarrow{HG}}{2} ;$$

d'autre part ω centre de (Γ) et O sont liés par la relation

$$\overrightarrow{G\omega} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GO}$$

d'où $$\overrightarrow{H\omega} = \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{G\omega} = 2\,\overrightarrow{GO} - \frac{1}{2}\overrightarrow{GO} = \frac{3}{2}\overrightarrow{GO},$$

$$\overrightarrow{HO} = \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GO} = 2\,\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{GO} = 3\,\overrightarrow{GO},$$

d'où $$\overrightarrow{H\omega} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HO}.$$

Les points ω, O, H, G forment une division harmonique; H est le second centre d'homothétie de (O) et (Γ).

Comme le symétrique de l'orthocentre par rapport au côté est sur le cercle circonscrit,

$$\frac{\overrightarrow{HA'}}{\overrightarrow{HA_1}} = \frac{\overrightarrow{HB'}}{\overrightarrow{HB_1}} = \frac{\overrightarrow{HC'}}{\overrightarrow{HC_1}} = \frac{1}{2}$$

et les points A′, B′, C′ sont sur (Γ).

Il en est de même des points A‴, B‴, C‴, milieux de HA, HB, HC, car

$$\frac{\overrightarrow{HA'''}}{\overrightarrow{HA}} = \frac{\overrightarrow{HB'''}}{\overrightarrow{HB}} = \frac{\overrightarrow{HC'''}}{\overrightarrow{HC}} = \frac{1}{2}.$$

Théorème. — ***Le cercle circonscrit au triangle médian d'un triangle donné passe par les pieds des hauteurs de ce triangle et par les milieux des segments limités à l'orthocentre et aux sommets. On l'appelle cercle d'Euler ou cercle des neuf points.***

La droite OGωH porte le nom **de droite d'Euler**.

19. Théorème de Ménélaüs.

Soient ABC un triangle donné, (Δ) une sécante qui coupe les trois côtés (ou leurs prolongements) en M, N et P.

Les points A et B se correspondent dans l'homothétie $\left(M, \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}\right)$;

les points B et C se correspondent dans l'homothétie $\left(N, \frac{\overline{NB}}{\overline{NC}}\right)$;

les points A et C se correspondent donc dans l'homothétie, produit des deux précédentes, de rapport

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{NB}}{\overline{NC}}.$$

Le centre de cette homothétie doit être aligné sur M et N (nº 5) et, d'autre part, doit se trouver sur AC.

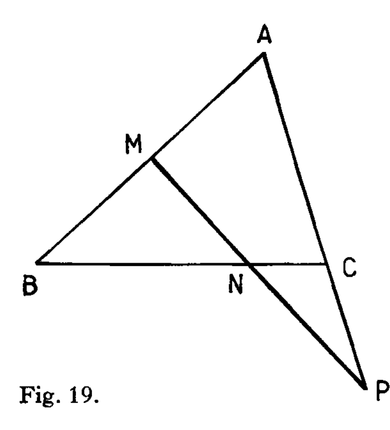


Fig. 19.

Il sera donc situé en P et le rapport sera $\frac{\overline{PA}}{\overline{PC}}$.

On a donc

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{NB}}{\overline{NC}} = \frac{\overline{PA}}{\overline{PC}}$$

ou

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{NB}}{\overline{NC}} \cdot \frac{\overline{PC}}{\overline{PA}} = 1. \quad (1)$$

Réciproquement, soient trois points M, N, P situés respectivement sur les trois côtés AB, BC et CA d'un triangle ABC et tels que

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{NB}}{\overline{NC}} \cdot \frac{\overline{PC}}{\overline{PA}} = 1. \quad (1)$$

Les points A et B se correspondent dans l'homothétie $\left(M, \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}\right)$;

les points B et C sont homologues dans l'homothétie $\left(N, \frac{\overline{NB}}{\overline{NC}}\right)$;

A et C sont donc homologues dans l'homothétie de rapport

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{NB}}{\overline{NC}}.$$

Or, d'après (1) $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{NB}}{\overline{NC}} = \frac{\overline{PA}}{\overline{PC}}$.

Cette homothétie produit est donc identique à l'homothétie $\left(P, \frac{\overline{PA}}{\overline{PC}}\right)$ et les trois centres M, N, P sont alignés.

Théorème. — ***Une condition nécessaire et suffisante pour que trois points M, N et P situés respectivement sur les***

côtés AB, BC et CA d'un triangle ABC soient alignés est :

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{NB}}{\overline{NC}} \cdot \frac{\overline{PC}}{\overline{PA}} = 1.$$

20. Théorème de Ceva.

Soit un triangle ABC et un point O de son plan. Les droites AO, BO, CO coupent généralement les côtés BC, CA, et AB respectivement aux points **M**, N, P.

NP recoupe BC en M′ et le théorème de Ménélaüs donne

$$\frac{\overline{M'B}}{\overline{M'C}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \cdot \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1.$$

Mais le quadrilatère BCNPM′A est un quadrilatère complet, la droite AO est la polaire de M′ par rapport à AB et AC, la division (BCMM′) est harmonique et

$$\frac{\overline{M'B}}{\overline{M'C}} = -\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}},$$

Fig. 20.

d'où $$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \cdot \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = -1.$$

Réciproquement, soient trois points **M**, N, P situés respectivement sur les trois côtés BC, CA, **AB** d'un triangle ABC et tels que

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \cdot \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = -1,$$

Menons PN qui coupe BC en M′ ; le théorème de Ménélaüs donne

$$\frac{\overline{M'B}}{\overline{M'C}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \cdot \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1 ;$$

donc
$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = -\frac{\overline{M'B}}{\overline{M'C}}$$

AM est la polaire de M′ par rapport à AB et AC et les droites BN et CP se coupent sur cette polaire. Les trois droites AM, BN et CP sont concourantes.

Théorème. — ***Une condition nécessaire et suffisante pour que trois droites AM, BN et CP d'un triangle ABC concourent en un même point est :***

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \cdot \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = -1.$$

EXERCICES

Homothétie.

332. Deux triangles ont leurs côtés parallèles. Sont-ils homothétiques ? Même question pour deux carrés à côtés parallèles.

333. Démontrer que dans tout triangle ABC, l'orthocentre H le centre de gravité G, le centre O du cercle circonscrit et le centre ω du cercle d'Euler sont alignés et forment une division harmonique.

Les symétriques d'un point du cercle circonscrit par rapport aux trois côtés sont alignés sur l'orthocentre.

334. Lorsque trois cercles sont tangents deux à deux, les droites qui joignent l'un des points de contact aux deux autres interceptent dans l'un des cercles un diamètre parallèle à la ligne des centres des deux autres.

335. Ensemble des centres de gravité des triangles isocèles dont l'un des côtés égaux est fixe.

336. Deux cercles sont tangents en A. La tangente à l'un d'eux en un point M rencontre l'autre en B et C. Montrer que la droite AM est l'une des bissectrices de l'angle $\widehat{BAC}$.

337. Dans le plan d'un angle xOy, on donne deux points fixes A et B. Une droite variable passant par A coupe Ox en M et Oy en N. La parallèle à AB menée par N coupe MB en P. Lieu du point P.

338. On considère tous les cercles qui passent par deux points fixes A et B, Soit M le point de contact de l'un de ces cercles avec une tangente perpendiculaire à AB. Ensemble des centres du cercle d'Euler du triangle AMB.

339. On donne deux cercles de diamètres AB et AC tangents en A. Par A on mène une sécante qui recoupe les deux cercles en B′ et C′. Ensemble du point P de rencontre de B′C et BC′.

340. Un triangle ABC a une base BC fixe et reste inscrit dans un cercle fixe. Montrer que le cercle d'Euler de ce triangle reste tangent à un cercle fixe.

341. On donne deux droites fixes (D) et (D'). Une droite variable parallèle à une direction fixe les rencontre en deux points B et C. A étant un point fixe, trouver l'ensemble des centres de gravité du triangle ABC.

342. On considère deux cercles (O) et (O') sécants en A et B. Par un point M variable sur le cercle (O) on mène AM et BM qui recoupent le cercle (O') en P et Q. Trouver l'ensemble des centres de gravité du triangle APQ.

343. On joint un point A à un point M variable sur un cercle donné (O). Ensemble des points de rencontre de la droite AM avec les bissectrices de l'angle AOM.

344. On donne deux cercles tangents en un point A. D'un point B fixe, on mène une sécante BMN à l'un des cercles. Les droites AM et AN recoupent le second cercle en M' et N'. Montrer que la droite M'N' passe par un point fixe.

345. On donne deux cercles concentriques. Par un point fixe P de l'un des cercles on mène la corde PA de l'un des cercles et la corde PBC perpendiculaire à PA de l'autre cercle.

Montrer que le centre de gravité du triangle ABC est fixe.

346. On donne quatre points fixes A, B, C, D alignés et répartis dans cet ordre. On considère le cercle (O) lieu des points M tels que (MA, MB) = α et le cercle (O') lieu des points P tels que (PC, PD) = $-\alpha$.

Montrer que la droite OO' passe par un point fixe quand α varie.

Trouver l'ensemble des centres d'homothétie directe de ces deux cercles.

347. On considère tous les cercles homothétiques d'un cercle donné par rapport à un point donné O.

Ensemble des points de contact de ces cercles avec les tangentes parallèles à une direction donnée.

Construire ceux de ces cercles qui sont tangents à une droite donnée ou à un cercle donné.

348. Dans un triangle ABC, la bissectrice intérieure de l'angle A rencontre en I le côté opposé et en D le cercle circonscrit. Trouver le lieu du centre de gravité de ces triangles quand ils varient de manière que A, I et D restent fixes.

349. On donne un cercle (O) et un point A fixe de ce cercle. Trouver le lieu du centre de gravité des triangles ABC inscrits dans ce cercle et dont la base BC a une longueur fixe.

350. On donne un cercle (O) et deux points A et B situés sur un même diamètre. On considère un diamètre variable PQ. Les droites AP et BQ se coupent en un point M. Lieu du point M.

351. Inscrire un carré dans un triangle ou dans un demi-cercle, un côté du carré étant dirigé suivant la base du triangle ou le diamètre du demi-cercle.

352. Construire un triangle connaissant l'angle A et les longueurs des médianes relatives aux côtés de l'angle A de ce triangle.

353. Construire une circonférence passant par deux points donnés et tangente à une droite donnée.

354. Étant donnés un point O et un cercle fixe (C) ne passant pas par O, mener une sécante OAB telle que

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = k\ ;$$

k étant un nombre relatif donné.

355. On considère toutes les sphères inscrites dans un cône de révolution donné et les plans tangents à ces sphères parallèles à un plan donné. Trouver le lieu des points de contact.

356. A toutes les sphères tangentes à un plan donné en un point donné, on mène les tangentes parallèles à une droite donnée. Ensemble des points de contact.

357. Ensemble des centres des homothéties de rapport donné k, qui à une droite donnée (D) font correspondre une droite rencontrant une autre droite donnée (D').

358. Ensemble des centres des homothéties qui à trois points donnés A, B et C font correspondre trois points situés dans trois plans donnés.

359. Démontrer que :

L'ensemble des homothéties n'est pas un groupe.
L'ensemble des homothéties de centre donné est un groupe commutatif.

360. L'objet du problème est l'étude de quelques propriétés d'une transformation ponctuelle T définie en Géométrie plane par les éléments suivants :

une droite fixe (D) et deux points fixes distincts a et b ; on suppose que b n'est pas sur (D) et que la droite ab n'est pas parallèle à (D). Le point M transformé de m par la transformation T est l'homothétique de a dans l'homothétie de centre variable m qui transforme b en un point variable P de (D).

1° Construire M connaissant m non situé sur la droite (u) menée par b parallèlement à (D). Construire m connaissant M non situé sur la droite (V) déduite de (D) par la translation de vecteur $\overrightarrow{ba}$.

2° Soient M et M' les transformés respectifs de m et m', P et P' les points où les droites mb et $m'b$ rencontrent (D).

Le vecteur $\overrightarrow{P'M'}$ correspond au vecteur $\overrightarrow{PM}$ dans une homothétie (ou une translation) variable avec m et m' ; préciser cette homothétie (ou cette translation). En déduire que les droites mm' et MM' concourent sur (D) ou sont parallèles à (D).

3° Démontrer que l'ensemble des points M est une droite (L) quand m décrit une droite (l) distincte de (u).

4° Montrer que (L) est parallèle à la droite qui joint le point a au point I d'intersection des droites (l) et (u).

(Bacc. Poitiers. Extraits).

361. Soient, sur un axe orienté $x'Ox$, deux points A et B tels que l'on ait : $\overline{OA} = a$, $\overline{OB} = -b$ (a et b positifs). Un point C du plan est défini de la manière suivante : la droite OE parallèle à CB rencontrant CA en E, et la droite OF parallèle à CA rencontrant CB en F, on a la relation : $\overline{AC}.\overline{EC} + \overline{BC}.\overline{FC} = k^2$ (k : constante donnée).

1° Ensemble des points C.

2° Ensembles des points E et F et du point de concours des diagonales du quadrilatère OECF.

3° La droite EF rencontre $x'Ox$ en P. Que peut-on dire du point P ? Montrer que les ensembles décrits par E et F se déduisent l'un de l'autre par une homothétie.

4° Soit S l'aire du triangle ABC, S_1 l'aire du triangle EFC, S_2 l'aire du triangle PAE. Montrer que les rapports $\frac{S_1}{S_2}$ et $\frac{S_1}{S}$ sont constants.

5° b restant fixe et égal à 2, on suppose que a varie de 0 à $+\infty$. Étudier la variation du rapport : $y = \frac{S_1}{S}$. Graphe. (Bacc.)

362. Soient deux axes rectangulaires Ox et Oy, un point fixe A sur la demi-droite Ox, un point fixe B sur la demi-droite Oy ($OA > OB$). On désigne par (α) un cercle quelconque tangent en A à Ox et par (β) un cercle quelconque tangent en B à Oy.

1° Un cercle (α) étant donné, construire les cercles (β) tangents à ce cercle (α). Nombre de solutions.

2° M désignant le point de contact de deux cercles (α) et (β) tangents entre eux, on appellera B' le point où la droite AM recoupe (β) et A' le point où la droite BM recoupe (α). Montrer que les ensembles des points B' et A' quand les cercles (α) et (β) varient en restant tangents se composent respectivement de quatre droites parallèles deux à deux : b_1 et b_2, a_1 et a_2.

3° On suppose que les cercles (α) et (β) varient en restant tangents, A' étant sur a_1 et B' sur b_1. Montrer que l'ensemble des points M est un cercle (Γ) et que la tangente commune aux cercles (α) et (β) coupe (Γ) sous un angle constant.

(Bacc. Paris. Extraits).

363. On donne un cercle (C) de centre O et de rayon R. Soit $x'Ox$ un axe situé dans le plan du cercle. Soit A un point fixe du cercle défini par $(\vec{Ox}, \vec{OA}) = \alpha$. On supposera $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Un point variable S décrit $x'x$ et on pose $\overline{OS} = x$. La droite SA recoupe le cercle (C) en un point variable M.

1° Un nombre réel k étant donné, soit A' le point de la droite SA défini par $\vec{SA'} = k.\vec{SA}$. Trouver l'ensemble des points A' quand S varie. Déterminer géométriquement le point S de façon que $\vec{SM} = k.\vec{SA}$. Discuter. Sous des réserves à préciser on trouve deux points S_1 et S_2 qui peuvent se confondre en un point s ou s'. Placer les points s et s' ; montrer qu'ils sont conjugués par rapport au cercle (C) et que S_1 et S_2 sont conjugués harmoniques par rapport à s et s'. Déterminer S_1 et S_2 de façon que le segment S_1S_2 ait pour milieu un point donné ou pour qu'il soit égal à un segment donné. Soit Σ le cercle variable de diamètre S_1S_2. Quel est l'axe radical de deux cercles Σ ?

2° Calculer en fonction de R, α, x, le rapport $y = \frac{\overline{SM}}{\overline{SA}}$. Étudier sa variation quand x varie et tracer son graphe. On dessinera sur ce graphe le cercle (C) de centre O et rayon R et on placera A sur ce cercle. On supposera que l'unité de longueur est l'ordonnée du point A.

3° Calculer x de façon que $\frac{\overline{SM}}{\overline{SA}} = k$; discuter. Sous des réserves à préciser on trouve deux valeurs x_1 et x_2. Donner une relation indépendante de k entre x_1 et x_2. Étudier le cas : $x_1 = x_2$. Montrer que x_1 et x_2 et les deux nombres avec lesquels x_1 et x_2 peuvent se confondre vérifient la relation harmonique. (Bacc. Paris.)

364. Dans un plan, deux cercles fixes, non égaux (O) et (O'), de centres respectifs O et O', sont tangents extérieurement en A. Leur axe radical est (D). Un cercle variable, (C), de centre C, est tangent à (O) en M et tangent à (O') en M'.

1° Montrer que MM' passe par un point fixe, P, et que le pôle K, de (D) par rapport à (C) est sur la droite MM'.

2° Soit H la projection orthogonale de C sur (D). HM et HM' coupent la droite OO' respectivement en I et I'. Montrer que I et I' sont fixes quand (C) varie.

3° (D') est une droite quelconque passant par P. Soient B et B' les pôles de (D') par rapport à (O) et (O') respectivement. Montrer que le milieu du segment BB' se trouve sur (D).

(Bacc. Liban 1962 — Partiel.)

CHAPITRE 26

SIMILITUDE

I. SIMILITUDE DIRECTE DANS LE PLAN

1. Définition.

Une similitude plane directe est le produit d'une homothétie positive et d'une rotation.

L'homothétie positive et la rotation s'effectuent dans le même plan. Elles n'ont pas nécessairement même centre. **Le rapport de l'homothétie est dit rapport de similitude, l'angle de rotation est dit angle de similitude.**

La figure (F) et son homologue (F′) dans cette transformation sont dites **figures semblables.**

De cette définition on déduit immédiatement que les transformées par similitude d'un vecteur, d'une droite, d'un cercle, etc... sont respectivement un vecteur, une droite, un cercle, etc... La similitude plane directe *conserve les angles* tout comme l'homothétie et la rotation.

2. Propriété caractéristique.

1° Soient (F) une figure plane, (F′) l'homologue de (F) dans l'homothétie (O, k) et (F″) l'homologue de (F′) dans la rotation (O_1, α).

Si $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur quelconque de (F), $\overrightarrow{A'B'}$ son homologue de (F′), $\overrightarrow{A''B''}$ l'homologue de $\overrightarrow{A'B'}$ dans (F″),

$$\overrightarrow{A'B'} = k.\overrightarrow{AB}$$

et

$A'B' = A''B''$ et $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A''B''}) = \alpha + 2k\pi$

Il en résulte que $\qquad A''B'' = k.AB, \qquad (k > 0)$

et

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A''B''}) = \alpha + 2k\pi.$$

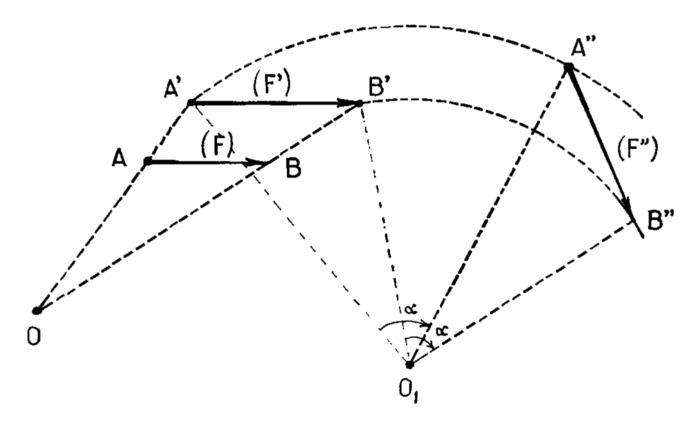


Fig. 2.

Théorème. — **Si deux figures sont homologues dans une similitude plane directe :**

- **le rapport des** **modules** **de deux vecteurs homologues est constant et égal au rapport d'homothétie ;**
- **l'angle de deux vecteurs homologues est constant est égal à l'angle de rotation.**

2° **Réciproquement :** soient deux figures coplanaires (F) et (F'), A et A' deux points **donnés** de (F) et (F'). Supposons qu'il existe une correspondance biunivoque entre les points M de (F) et les points M' de (F') telle que :

$$A'B' = k.AB \qquad (1)$$

et

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = \alpha \pmod{2\pi} \qquad (2)$$

où k est un nombre positif constant et α un angle constant.

Appliquons à (F) une homothétie (O, k) de centre quelconque situé dans le plan des figures (F) et (F'), (F) se transforme en (F") et $\overrightarrow{AB}$ en un vecteur $\overrightarrow{A''B''}$ tels que :

$$\overrightarrow{A''B''} = k.\overrightarrow{AB}.$$

k étant positif, on a aussi : $A''B'' = k.AB = A'B'$.

D'autre part $\overrightarrow{A''B''}$ est un vecteur parallèle à $\overrightarrow{AB}$ et de même sens ($k > 0$). La relation (2) donne :

$$(\overrightarrow{A''B''}, \overrightarrow{A'B'}) \equiv \alpha \pmod{2\pi}.$$

Cette dernière relation, jointe à $A''B'' = A'B'$, montre que (F″) se transforme en (F′) dans une rotation d'angle α.

On a donc transformé (F) en (F′) par le produit d'une homothétie positive et d'une rotation. (F) et (F′) se correspondent donc dans une similitude plane directe.

La proposition directe et sa réciproque peuvent s'énoncer :

Théorème. — ***Une condition nécessaire et suffisante pour que deux figures coplanaires (F) et (F′) se correspondent dans une similitude plane directe est, qu'à tout couple de points (A, B) de (F) on puisse associer un couple de points (A′, B′) de (F′) tels que :***

$$A'B' = k.AB \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = \alpha$$

k étant un nombre positif constant et α un angle constant

$$\overrightarrow{AB} \underset{\text{sim}(k,\,\alpha)}{\longleftrightarrow} \overrightarrow{A'B'} \Leftrightarrow \begin{cases} A'B' = k.AB \\ (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = \alpha \end{cases}$$

Remarque.

Les relations nécessaires et suffisantes montrent que :

Si $k = 1$ et $\alpha = 0$, on a une translation (ou une coïncidence) ;
Si $k = 1$ et $\alpha = \pi$, on a une symétrie par rapport à un point ;
Si $k = 1$ et $\alpha \neq 0$ et π, on a une rotation d'angle α.
Si $k \neq 1$ et $\alpha = 0$, on a une homothétie positive ;
Si $k \neq 1$ et $\alpha = \pi$, on a une homothétie négative.

Ce sont des cas particuliers de similitude.

3. Centre de similitude.

Pour démontrer la réciproque du n° 2, le centre d'homothétie O est choisi arbitraire dans le plan. Donc une similitude peut se décomposer d'une infinité de manières en le produit d'une homothétie positive de rapport donné k et d'une rotation d'angle α donné.

Cherchons s'il est possible de choisir O de manière qu'il soit centre commun à l'homothétie et à la rotation.

L'homothétie (O, k) transformant A en A″, on a :

$$\overrightarrow{OA''} = k.\overrightarrow{OA}.$$

La rotation (O, α) transformant A″ en A′, on aura :

$$OA' = OA'' \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{OA''}, \overrightarrow{OA'}) = \alpha = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}).$$

D'où : $$\frac{OA'}{OA} = k \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = \alpha.$$

Si le point A et son homologue A′ dans la similitude sont des points donnés, le point O appartient donc :

a) au cercle d'Apollonius du segment AA′ dans le rapport k ; c'est le cercle de diamètre IJ qui divise AA′ dans le rapport k ;

b) à l'arc capable de l'angle d'axes α relatif aux points A et A′ (fig. 3).

Ces deux ensembles ont un seul point commun qui est le point O cherché. Il est appelé **centre de similitude**.

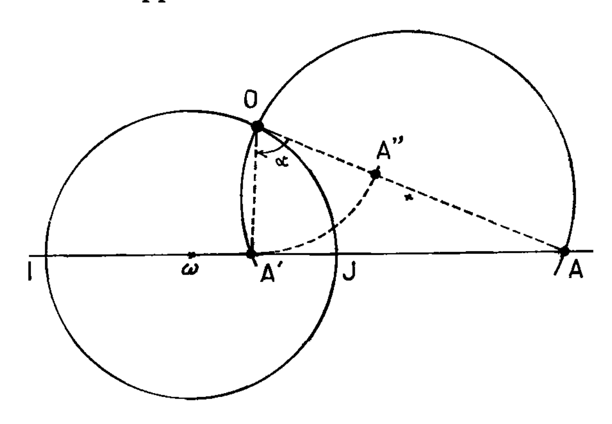


Fig. 3.

Une similitude de centre O, de rapport k et d'angle α se désigne par : **similitude (O, k, α)**.

Le centre O de la similitude est le seul point double dans l'homothétie (O, k) et la rotation (O, α). C'est donc le seul **point double** de la similitude.

Remarque : *Si* $k = 1$ *et* $\alpha = 0$ (mod. 2π), le cercle d'Apollonius devient la médiatrice de AA′, l'arc capable est remplacé

par les portions de la droite AA′ extérieures au segment AA′. Le point O n'existe pas. C'est le cas où la similitude est réduite à une translation (ou une coïncidence).

On vérifiera aisément, que dans les autres cas particuliers envisagés au nº 2, le centre O existe.

Théorème. — ***Toute similitude plane directe qui ne se réduit pas à une translation est le produit d'une homothétie positive et d'une rotation de même centre qui est le point double de la similitude.***

4. Construction du centre de similitude.

a) Si on connaît *deux points homologues* A et A′, le centre de la similitude est le point commun au cercle d'Apollonius et à l'arc capable de l'angle d'axes du nº 3.

b) Si on connaît *deux vecteurs homologues* $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$, le centre de similitude se trouve sur deux arcs capables de l'angle d'axes α relatifs, l'un à A et A′, l'autre à B et B′.

Il se trouve aussi sur les deux cercles d'Apollonius divisant les segments AA′ et BB′ dans le rapport k.

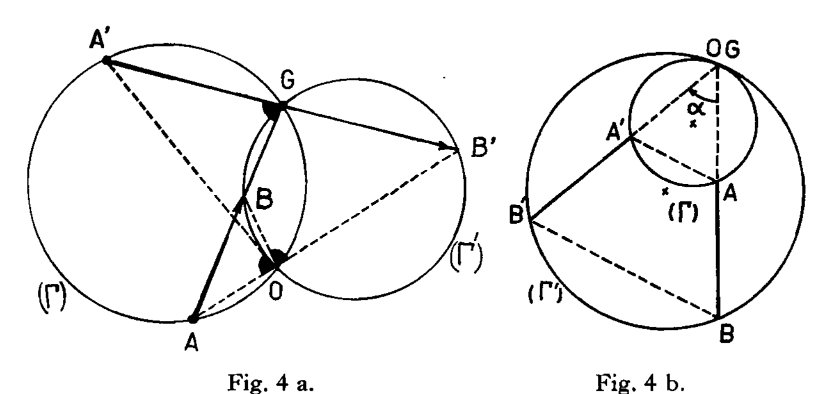


Fig. 4 a. Fig. 4 b.

Si on désigne par G le point d'intersection des *supports* des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$, les relations :

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OB'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) \equiv \alpha \qquad (\text{mod. } 2\pi)$$

entraînent :

$(OA, OA') = (GA, GA')$ et $(OB, OB') = (GB, GB')$ (mod. π).

Ces relations signifient que O, A, A′, G sont cocycliques, ainsi que O, B, B′, G.

Le centre O *de la similitude est donc un point commun aux cercles* (Γ) *et* (Γ′) *circonscrits aux triangles* GAA′ *et* GBB′ (fig. 4 a).

- Si (Γ) et (Γ′) sont tangents (fig. 4 b) : G et O sont confondus.
- Si (Γ) et (Γ′) ne sont pas tangents, *O est distinct de G*, sinon les trois points alignés G, A, B seraient transformés dans la similitude en trois points alignés G, A′, B′ et on aurait : $\dfrac{\overline{GA}}{\overline{GB}} = \dfrac{\overline{GA'}}{\overline{GB'}}$ [car le rapport $\dfrac{\overline{GA}}{\overline{GB}}$ est invariant dans la similitude]. Les cercles GAA′ et GBB′ seraient homothétiques dans une homothétie de centre G et par suite tangents en G.

5. Commutativité du produit de l'homothétie et de la rotation concentriques.

Soit A′ l'homologue de A dans la similitude (O, k, α).

On a : Similitude $(O, k, \alpha) = \text{Rot}(O, \alpha) \times \mathscr{H}(O, k)$.

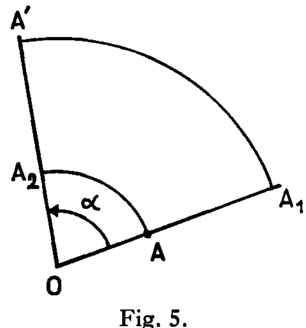


Fig. 5.

Dans l'homothétie (O, k) : A devient A_1 tel que : $\overrightarrow{OA_1} = k.\overrightarrow{OA}$; dans la rotation (O, α) : A_1 devient A′ tel que :

$OA_1 = OA'$ et $(\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA'}) = \alpha$.

A se transforme aussi en A′ en lui appliquant d'abord la rotation, on obtient A_2 puis A_2 devient A′ dans l'homothétie (O, k). Donc

$$\begin{aligned}\text{Similitude } (O, k, \alpha) &= \text{Rot}(O, \alpha) \times \mathscr{H}(O, k)\\ &= \mathscr{H}(O, k) \times \text{Rot}(O, \alpha).\end{aligned}$$

Théorème. — ***Le produit d'une homothétie et d'une rotation*** **concentriques** ***est commutatif.***

6. Transformation réciproque d'une similitude.

Soit la similitude (O, k, α) transformant A en A′ (fig. 5).

Dans la rotation (O, $-\alpha$), A′ se transforme en A_1 et A_1 se transforme en A dans l'homothétie $\left(O, \frac{1}{k}\right)$.

Théorème. — ***La transformation réciproque de la similitude (O, k, α) est une similitude :***

$$S^{-1}\left(O, \frac{1}{k}, -\alpha\right).$$

7. Généralisation.

Le produit d'une homothétie négative (O, $-k$) et d'une rotation (O_1, α) du plan, peut se décomposer en :

a) une homothétie positive (O, k),

b) une rotation (O, π) ou symétrie de centre O,

c) une rotation (O_1, α) :

$$\begin{aligned}\mathrm{Rot}(O_1, \alpha) \times \mathscr{H}(O, -k) &\\ &= \mathrm{Rot}(O_1, \alpha) \times \mathrm{Rot}(O, \pi) \times \mathscr{H}(O, k)\\ &= \mathrm{Rot}(O'', \alpha + \pi) \times \mathscr{H}(O, k).\end{aligned}$$

On est donc ramené au produit d'une homothétie positive et d'une rotation. **En similitude plane directe, il n'est pas nécessaire de distinguer entre homothétie positive et homothétie négative.**

II. SIMILITUDE DANS L'ESPACE

8. Définition.

Une similitude dans l'espace est le produit d'une homothétie positive et d'un déplacement.

La figure (F′) ainsi transformée d'une figure (F) est dite **semblable** à la figure (F).

Le rapport d'homothétie étant positif, on a immédiatement les énoncés suivants :

a) ***les segments homologues de deux figures semblables sont dans un rapport constant qui est le rapport de similitude ;***

b) ***le rapport des aires de deux figures semblables égale le carré du rapport de similitude ;***

c) ***le rapport des volumes de deux figures semblables égale le cube de rapport de similitude.***

9. Exercices.

Un point C décrit un demi-cercle de diamètre AB. On construit à l'extérieur du triangle ABC, un triangle équilatéral BCD, de hauteur BH. Ensemble des points H.

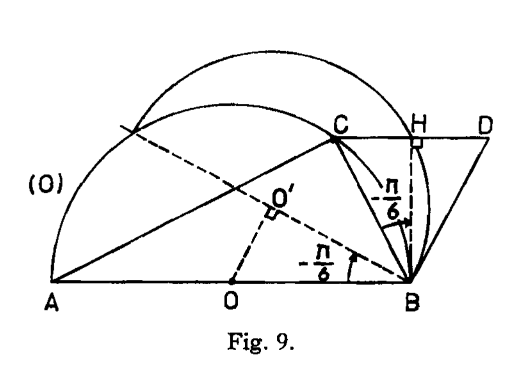


Fig. 9.

Si la détermination principale de $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$ est positive, on aura : $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BH}) = -\frac{\pi}{6}$.

D'autre part : $BH = BC.\frac{\sqrt{3}}{2}$. Donc : H est déduit de C dans la similitude $\left(B, -\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. L'ensemble des points H est le demi-cercle déduit du demi-cercle (O) dans cette similitude. Son centre O′ est tel que $(\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BO'}) = -\frac{\pi}{6}$ et $BO' = BO.\frac{\sqrt{3}}{2}$; son rayon est O′B.

10. Soient deux droites perpendiculaires (d) et (d') se rencontrant en O; A un point quelconque du plan distinct de O. Construire un demi-triangle équilatéral ABC tel que B soit sur (d) et C sur (d'), l'angle C étant droit et $\widehat{BAC}$ égal à 30°.

On a : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \pm\frac{\pi}{6}$ et $AC = AB.\frac{\sqrt{3}}{2}$. Donc B se transforme en C dans l'une ou l'autre des similitudes $\left(A, \frac{\sqrt{3}}{2}, \pm\frac{\pi}{6}\right)$. C est donc sur (d') et sur la transformée (d_1) de (d) dans l'une ou l'autre de ces similitudes.

Dans la similitude $\left(A, \frac{\sqrt{3}}{2}, +\frac{\pi}{6}\right)$, AH perpendiculaire à (d) se transforme en AH′, tel que $(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AH'}) = \frac{\pi}{6}$ et $AH' = \frac{\sqrt{3}}{2}.AH$. (d_1) est la per-

pendiculaire en H′ à AH′, elle passe par H. C étant déterminé, B est l'intersection de (d) et de la perpendiculaire en C à AC. L'autre similitude donne une deuxième solution.

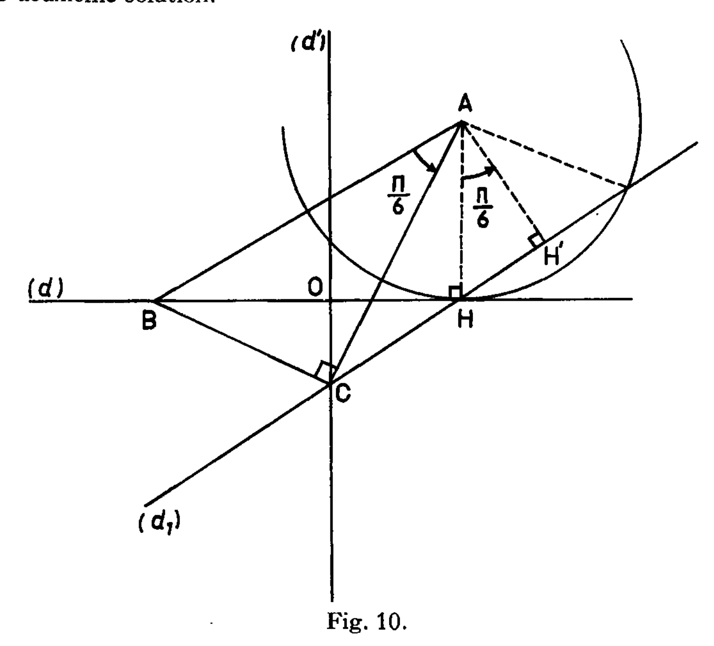


Fig. 10.

11. Similitude de deux cercles.

Soient, dans un plan orienté, deux cercles inégaux (O, R) et (O′, R′). α étant un angle *quelconque*, à tout rayon OM du cercle (O) on peut associer un rayon O′M′ de (O′) tel que : $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{O'M'}) = \alpha$ et $O'M' = \dfrac{R'}{R}\,OM$.

Le vecteur $\overrightarrow{O'M'}$ se déduit donc du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans une similitude de rapport $\dfrac{R'}{R}$ et d'angle variable α. Les centres ω de ces similitudes vérifient la relation $\dfrac{\omega O'}{\omega O} = \dfrac{R'}{R}$, ils appartiennent donc au cercle de diamètre SS′, S et S′ étant les centres d'homothétie des cercles (O) et (O′). Le cercle (SS′) est dit cercle de similitude.

Le choix de ω sur le cercle SS′ détermine l'angle de similitude : $(\overrightarrow{SO}, \overrightarrow{SO'}) = \alpha$.

Les tangentes au cercle (O) passant par ω (si elles existent) ont pour homologues les tangentes au cercle (O′) passant par ω (la similitude conserve les angles). On dit que les cercles (O) et (O′) sont vus du point ω sous le même angle.

Si les cercles (O) et (O′) sont sécants en A et B, le cercle (SS′) passe par A et B, car $\frac{BO'}{BO} = \frac{AO'}{AO} = \frac{R'}{R}$. A et B sont donc des centres de similitude pour les deux cercles.

Dans la similitude de centre A, transformant O en O′, les angles homologues $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$ et $(\overrightarrow{O'A}, \overrightarrow{O'M'})$ sont égaux, ce qui entraîne l'égalité des angles (BA, BM) et (BA, BM′). Deux points homologues M et M′ sont donc alignés avec B.

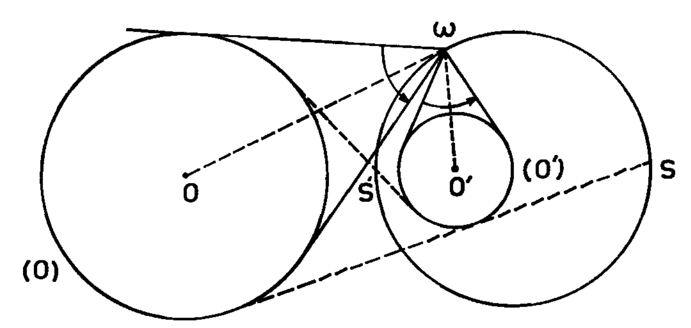


Fig. 11 a.

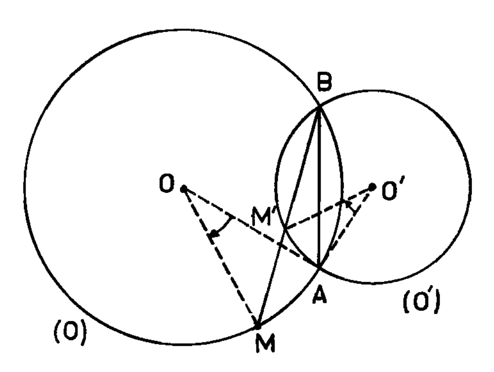


Fig. 11 b.

EXERCICES

Similitude plane.

365. Deux triangles semblables ABC, A′B′C′ sont disposés dans un même plan d'une manière quelconque ; on trace à partir d'un point O, les segments OA″, OB″, OC″ respectivement équipollents aux segments AA′, BB′, CC′ ; montrer que le triangle A″B″C″ est semblable aux triangles ABC, A′B′C′.

366. Deux cercles d'un même plan sont semblables d'une infinité de manières ; lieu de leurs centres de similitude.

367. Sur deux cercles (O) et (O'), à partir de deux points fixes A et A', on porte des arcs variables AM et A'M' directement semblables ; construire ceux des segments MM' qui sont parallèles à une direction donnée ou qui ont une longueur donnée.

368. On donne deux cercles (O) et (O') ; sur l'un d'eux, un point A, sur l'autre un point A'. Tracer un cercle passant par A et A' et recoupant les deux cercles en deux points M et M' tels que les arcs $\overset{\frown}{AM}$ et $\overset{\frown}{A'M'}$ soient directement semblables.

369. On donne un triangle ABC tel que B $=$ 30°. Déterminer le centre de la similitude qui fait correspondre le vecteur $\overrightarrow{CA}$ au vecteur $\overrightarrow{AB}$.

370. Un point A se déplace sur un demi-cercle de diamètre donné BC, AH étant la hauteur du triangle ABC, O et O' les centres des cercles inscrits dans les triangles AHB et AHC ; montrer que la perpendiculaire menée de A sur OO' passe par un point fixe.

371. Un triangle ABC a une base BC fixe et un angle au sommet A constant. Lieu de la projection du milieu de AB sur AC.

372. Trouver le lieu des centres des similitudes de rapport donné k, transformant une droite donnée (D) un une droite donnée (D').

373. Étant donnés une droite (D) et un point O qui se projette en H sur (D), on considère toutes les similitudes de centre O qui font correspondre au point H, un point H' de (D).

1° Déterminer l'angle de similitude connaissant le rapport k de similitude.

2° Quel est le lieu géométrique des homologues d'un point M du plan dans ces similitudes ?

3° Quel est le lieu des points M qui admettent pour homologues un même point N du plan ?

Montrer que toutes les droites (Δ) du plan qui ont pour homologues une même droite (Δ') passent par un point fixe.

4° Soit (C) un cercle donné du plan, (C') son homologue dans l'une de ces similitudes.

Construire le cercle (C') qui passe par un point donné ou qui a un rayon de longueur donné ou qui est tangent à une droite donnée.

374. On donne deux cercles égaux tangents en un point A, on mène deux rayons variables OM et O'M' tels que

$$(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{O'M'}) = +\frac{\pi}{2}.$$

Trouver le lieu du milieu H de MM'.

375. On donne un point O et deux droites parallèles (D) et (D') ; par le point O on mène une sécante variable qui coupe (D) et (D') en A et B, puis sur la perpendiculaire en O à cette sécante on porte OM $=$ OM' $=$ AB. Lieux des points M et M' quand la sécante varie.

376. Un triangle ABC isocèle (AB = AC) varie en restant directement semblable à lui-même ; B et C restent sur un cercle fixe (O) et la droite AB passe constamment par un point fixe I ; montrer que la droite AC passe aussi par un point fixe J ; lieu du point A. Lieux des projections des points I et J sur le côté BC.

377. On donne deux cercles (O) et (O′) qui se coupent en deux points A et B ; par B, on mène une sécante quelconque qui recoupe les deux cercles en M et M′ ; montrer que le triangle AMM′ reste semblable à un triangle fixe. Lieu du milieu H de MM′.

378. On donne deux cercles égaux (O) et (O′) qui se coupent en A et B. Soit P un point quelconque de la corde commune AB ; on prolonge alors PO et PO′ jusqu'en C et C′ où elles rencontrent respectivement les deux cercles ; de C et C′ partent en même temps, dans le même sens et avec la même vitesse deux mobiles M et M′ qui décrivent respectivement (O) et (O′). Montrer que le triangle PMM′ reste semblable à lui-même.

379. Soit A le point d'intersection de deux cercles (C) et (C′). Un angle α défini en grandeur et sens pivote autour du point A et ses côtés recoupent les deux cercles en M et M′ respectivement; P étant le point d'intersection de OM et O′M′, montrer que le cercle circonscrit au triangle PMM′ passe par un point fixe G ; lieu du point G quand α varie.

380. Montrer que le produit de deux similitudes dans le plan est une similitude, ou une rotation, ou une homothétie, ou une translation, ou la transformation identique.

En admettant que, rotations, homothéties, translations sont des cas particuliers de similitudes (à préciser), montrer que l'ensemble des similitudes dans le plan est un groupe.

381. Soient deux droites perpendiculaires D et D′, sécantes en O, un point A fixe sur D, une droite Δ fixe passant par A. On désigne par α l'angle orienté des droites (D, Δ). Si $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, Δ coupe D′ en B′ ; la perpendiculaire en B′ à Δ coupe D en A′. Soit B le symétrique de B′ par rapport à O.

Un point M décrit Δ. Soit P sa projection sur D.

1° Montrer que les triangles AA′M et ABP sont semblables. Préciser le centre, l'angle et le rapport de la similitude qui les fait correspondre.

2° Q étant l'intersection de MA′ et BP, quel est le lieu de Q ?

3° La droite B′P coupe MA′ en Q′. Montrer que la division A′MQQ′ est harmonique.

4° Soient (C) et (C′) les cercles de centres C et C′ respectivement circonscrits aux triangles AA′M et ABP. Quel est l'angle de leurs tangentes en A ? Montrer que le triangle ACC′ reste semblable à lui-même. Quel est le lieu du deuxième point commun aux deux cercles ?

(Maroc — Extraits).

382. Soient, dans un plan orienté, un axe $x'Ox$ et deux vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{AB}$ de même longueur, a, tels que :

$$(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OA}) + \pi/2.$$

1° La longueur a étant supposée variable (ainsi que la direction du vecteur $\overrightarrow{OA}$), déterminer graphiquement la position du point A de telle façon que A et B

soient situés respectivement sur deux droites données, Δ et Δ_1, perpendiculaires à $x'x$.

2° A partir d'un point C situé sur le demi-axe positif Ox, à une distance donnée b du point O, on construit le vecteur $\overrightarrow{CD}$ équipollent à $\overrightarrow{AB}$. Déterminer le centre, I, de la rotation dans laquelle $\overrightarrow{OA}$ a pour transformé $\overrightarrow{CD}$ et démontrer que ce point reste fixe quand la longueur a et l'angle $\theta = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OA})$ varient.

3° On suppose a constant et θ variable. Trouver le lieu du milieu M de AD et le lieu du milieu N de BD.

4° On adjoint à l'axe $x'Ox$ l'axe $y'Oy$ défini par $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy}) = \pi/2$. Évaluer en fonction de a, b et θ les coordonnées (x, y) du point M et les coordonnées (x', y') du point N. En déduire l'équation du lieu géométrique de chacun de ces points lorsque, a restant constant, θ varie. Contrôler par cette voie, les conclusions du 3°.

383. 1° On considère un carré OABC dont le côté a pour longueur l'unité. M étant un point de OA, d'abscisse $\overline{OM} = x$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$, on envisage le carré MNPQ inscrit dans OABC (c'est-à-dire dont les sommets sont situés respectivement sur les côtés de OABC). Quels sont, lorsque M décrit OA, les ensembles des milieux des côtés du carré MNPQ ?

2° Quel est la puissance de O par rapport au cercle circonscrit à ce dernier carré ? En déduire la distance du point O à sa polaire par rapport au cercle, ainsi que le périmètre p du carré formé par les polaires, par rapport au même cercle, des quatre points O, A, B, C. En désignant par s l'aire du carré MNPQ, montrer que le rapport $\frac{p}{s}$ reste constant lorsque M décrit OA.

3° Étant donné un angle droit xOy, on considère tous les carrés MNPQ dont les deux sommets consécutifs M et N sont situés respectivement sur Ox et Oy, les carrés étant tout entiers à l'intérieur de l'angle xOy. Préciser les régions du plan constituées respectivement par les ensembles des points P ou Q et trouver l'ensemble des centres des différents carrés MNPQ. Construire le carré MNPQ lorsqu'on fixe le point P.

4° On envisage plus particulièrement, les carrés MNPQ pour lesquels le côté MN passe par le point fixe I de la bissectrice de l'angle xOy tel que $OI = \sqrt{2}$.
La position de MN étant définie par l'angle :

$$(\overrightarrow{NO}, \overrightarrow{NM}) = \varphi \quad (0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}),$$

exprimer, en fonction de φ, les coordonnées des points P et Q relativement aux axes Ox, Oy. Que peut-on dire *a priori* des positions relatives des ensembles des points P et Q lorsque MN tourne autour de I. Former les relations liant les coordonnées x et y de P et construire l'ensemble des points P.

5° A quelles conditions un cercle (C) donné, dans l'angle xOy, par son centre C et son rayon R peut-il être le cercle inscrit :

a) dans l'un des carrés généraux définis au 3° ;
b) dans l'un des carrés particuliers définis au 4° ?

(Bacc. 1960).

384. On considère sur un demi-cercle de centre O et de diamètre AB = 2R, un point variable M, la bissectrice intérieure de l'angle droit AMB coupe AB en un point P. Soient (S) et (S′) les cercles circonscrits aux triangles AMP et BMP : leurs centres sont désignés par S et S′.

1° Montrer que les points S, S′, O, P, M sont sur un même cercle (C). Montrer que (C) passe aussi par le point D intersection du demi-cercle de centre O avec la médiatrice de AB. Ensemble des centres de (C).

2° Ensembles des points S et S′.

3° Ensembles des points A′ et B′ où les droites AM et BM rencontrent respectivement les cercles (S′) et (S).

4° Ensembles des points de rencontre des droites AM, BM et A′B′ avec le cercle (C).

5° La bissectrice MP passe par un point fixe I. Chercher les ensembles des points de rencontre des droites SI et AS′ et du point de rencontre de S′I et BS. Comparer ces ensembles aux ensembles des points communs au cercle (S) et à la droite IB′ ou au cercle (S′) et à la droite IA′.

N. B. Dans la recherche des ensembles on démontrera les réciproques.

(Concours de l'enseignement libre, 1958 — Extraits).

385. On donne, dans un plan orienté, deux cercles fixes, (C) et (C′), de centres respectifs C et C′ et de rayons respectifs R et R′ ($R > R'$). Ces cercles se coupent en deux points, A et B, et l'on a : $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC'}) = +\frac{\pi}{2}$.

1° Quel est l'ensemble des centres ω des similitudes qui transforment le cercle (C) en le cercle (C′) ?

2° Soit (S) celle de ces similitudes qui a pour centre le point A. Quelle est la valeur de l'angle de cette similitude ?

Une droite passant par B coupe (C) en M et (C′) en M′. Quel est, dans la similitude (S), le transformé du point M ?

3° On considère un diamètre variable (Δ') du cercle (C) assujetti à couper le cercle (C′) en deux points, P′ et Q′ ; on désigne par P et Q les points où les droites BP′ et BQ′ recoupent respectivement le cercle (C) et par (Δ) la droite PQ. Évaluer l'angle (Δ, Δ'). Démontrer que, lorsque (Δ') varie, (Δ) pivote autour d'un point fixe.

Quels sont les ensembles décrits par le pôle I′ de (Δ') par rapport à (C′) et par le pôle I de (Δ) par rapport à (C) ? Que peut-on dire de la direction de la droite II′ ?

4° On construit les cercles (I) et (I′) ayant pour centres respectifs I et I′ et orthogonaux respectivement à (C) et (C′). Démontrer que l'axe radical des cercles (I) et (I′) reste fixe quand (Δ') varie et déterminer les ensembles des centres d'homothétie de ces deux cercles.

CHAPITRE 27

AFFINITÉ — (GÉOMÉTRIE PLANE) RABATTEMENTS — (GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE)

1. Définition.

Étant donné un plan rapporté à deux axes x′Ox et y′Oy et un nombre réel k ($k \neq 0$)**, si, à tout point M(x, y) du plan on associe le point M′ du plan de même abscisse x et d'ordonnée y′ = ky, on dit que M′ est déduit de M dans l'affinité d'axe x′x, de rapport k, de direction y′y.**

Si M décrit une figure (F), M′ décrit une figure (F′) dite **affine** de (F) dans l'affinité.

Si **k > 0**, on dit que l'affinité est positive, M et M′ sont du même côté de $x'x$.

Si **k < 0**, l'affinité est négative, M et M′ sont de part et d'autre de $x'x$.

Remarques. — 1) Par M menons une parallèle à $y'y$ qui coupe $x'x$ en P. Le point M′ homologue de M est défini par :

$$\overrightarrow{PM'} = k.\overrightarrow{PM}.$$

2) **Points doubles.** M sera point double dans la transformation si : $\overrightarrow{PM} = k.\overrightarrow{PM}$ soit $(1 - k)\overrightarrow{PM} = 0$.

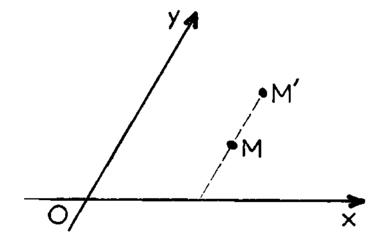


Fig. 1.

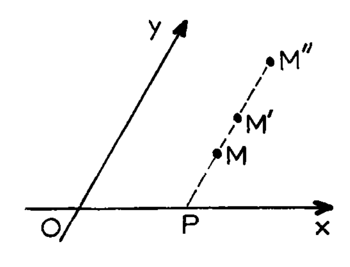


Fig. 2.

• **Si k ≠ 1,** cette relation exige $\overrightarrow{PM} = \vec{0}$. Tous les points de $x'x$ sont donc points doubles dans l'affinité ;

• **Si k = 1,** l'affinité est la transformation identique.

3) **Affinité réciproque.** Si M′ correspond à M dans l'affinité de rapport k, M correspond à M′ dans l'affinité réciproque de rapport $\frac{1}{k}$.

L'affinité est **involutive** si $k = \frac{1}{k}$ ou $k = \pm 1$.

2. Produit de deux affinités.

Soient deux affinités de même axe Ox, de même direction Oy et de rapports respectifs k_1 et k_2.

M étant un point donné, soit P le point d'intersection de Ox et de la parallèle à Oy menée par M. Désignons par M′ le transformé de M dans la première affinité et par M″ le transformé de M′ dans la seconde. On a :

$$\left.\begin{aligned}\overline{PM'} &= k_1.\overline{PM}\\ \overline{PM''} &= k_2.\overline{PM'}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \overline{PM''} = k_1.k_2.\overline{PM}.$$

Théorème. — ***Le produit de deux affinités de même axe, de même direction, et de rapports k_1 et k_2 est une affinité de même axe, de même direction et de rapport k_1k_2.***

On montrera facilement que ce produit est *commutatif.*

3. Transformée d'une droite.

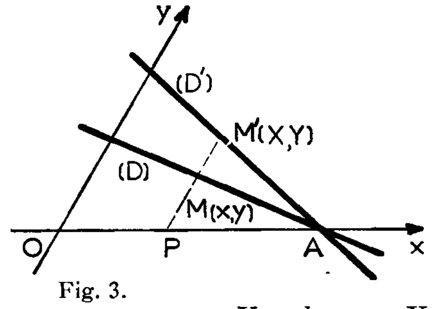


Fig. 3.

Soit, dans le plan xOy, une droite (D) d'équation $y = ax + b$ et M(x, y) un point quelconque de la droite (D). Transformons le point M(x, y) en M′(X, Y) par une affinité d'axe Ox, de direction Oy, de rapport k. On a :

$$\mathrm{Y} = ky, \qquad \mathrm{X} = x,$$

ou

$$y = \frac{\mathrm{Y}}{k}, \qquad x = \mathrm{X}.$$

$$y = ax + b \Rightarrow Y = k(aX + b).$$

Cette relation montre que le point M′(X, Y) décrit une droite (D′) de coefficient directeur ka, d'ordonnée à l'origine kb.

Si (D) coupe Ox en A $\left(\text{abscisse } x = -\frac{b}{a}\right)$, on constate que **(D′) coupe Ox en A** (résultat prévisible).

Si (D) est parallèle à Ox(a = 0), (D′) l'est également.

Si (D) est parallèle à Oy, elle est conservée dans son ensemble.

Théorème. — ***La transformée d'une droite est une droite.***

4. Transformées de deux droites parallèles.

Soient deux droites parallèles (Δ) et (Δ_1) non parallèles à $y'y$, (Δ') et (Δ'_1) leurs homologues dans l'affinité d'axe $x'x$, de rapport k, de direction $y'y$.

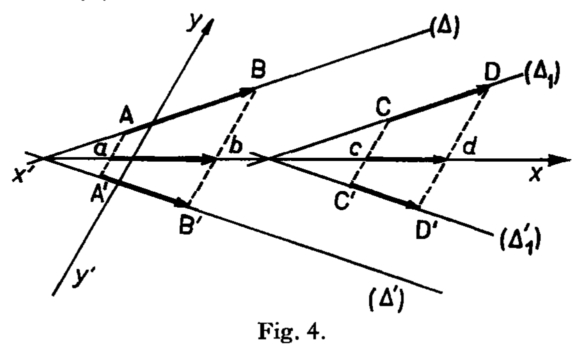


Fig. 4.

Si a est le coefficient directeur de (Δ) et (Δ_1), celui de (Δ') et (Δ'_1) sera égal à ka.

Théorème. — ***Les transformées de deux droites parallèles sont des droites parallèles.***

5. Conservation du rapport de deux vecteurs parallèles.

a) Soient $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ deux vecteurs de supports respectifs (Δ) et (Δ_1) (fig. 4). Leurs homologues $\overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{C'D'}$ ont pour supports (Δ') et (Δ'_1) et sont parallèles.

Soient $\overrightarrow{ab}$ et $\overrightarrow{cd}$ les projections sur $x'x$ parallèlement à $y'y$ de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$. On a :

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}} = \frac{\overrightarrow{ab}}{\overrightarrow{cd}} = \frac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{C'D'}}.$$

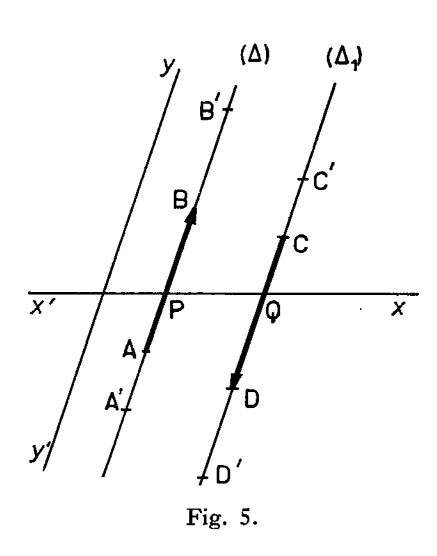


Fig. 5.

b) Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont parallèles à la direction d'affinité (fig. 5), leurs supports (Δ) et (Δ_1) rencontrent $x'x$ en P et Q et on a :

$$\overrightarrow{PA'} = k.\overrightarrow{PA}$$

$$\overrightarrow{PB'} = k.\overrightarrow{PB}.$$

D'où, en retranchant membre à membre :

$$\overrightarrow{A'B'} = k.\overrightarrow{AB}.$$

De même :

$$\overrightarrow{C'D'} = k.\overrightarrow{CD}.$$

Donc :

$$\frac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{C'D'}} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}}.$$

Théorème. — ***L'affinité conserve le rapport de deux vecteurs parallèles.***

6. Affinité déterminée par son axe et deux points homologues.

Soient une droite $x'x$ et deux points A et A' tels que AA' rencontre $x'x$ en P (A et A' distincts de P). A et A' sont homologues dans une affinité d'axe $x'x$ et de rapport $\frac{\overline{PA'}}{\overline{PA}}$.

Le transformé d'un point M (non sur AA') peut être construit de la façon suivante :

si AM rencontre $x'x$ en I (à distance finie ou infinie), la transformée de la droite IA est la droite IA′, M′ transformé de M est le point d'intersection de IA′ et de la parallèle à AA′ menée par M.

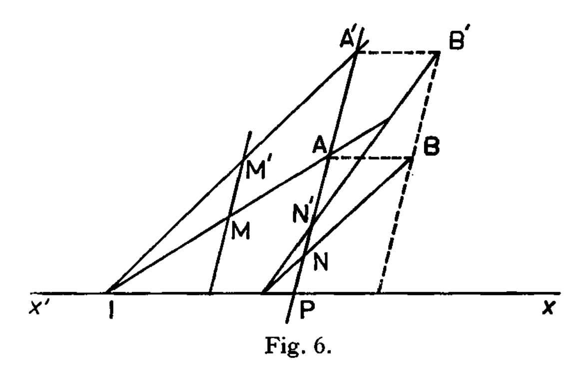


Fig. 6.

Si M est en N sur AA′, cette construction est en défaut. Il suffit de construire d'abord le transformé B′ d'un point B. La droite NB et sa transformée déterminent N′ sur AA′.

7. Propriété caractéristique de l'affinité.

a) Soient (F) et (F′) deux figures homologues dans une affinité d'axe $x'x$; A et B deux points de (F), A′ et B′ leurs homologues respectifs sur (F′).

La droite AB a pour homologue la droite A′B′. Ces droites se rencontrent sur l'axe d'affinité (éventuellement à distance infinie).

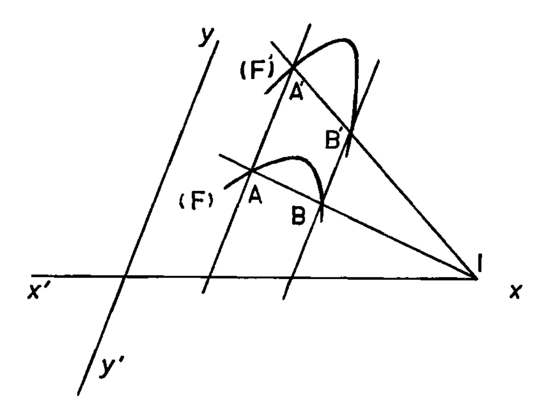


Fig. 7.

b) **Réciproquement** : soient deux figures coplanaires (F) et (F′), A et A′ deux points **donnés** de (F) et (F′) respectivement. Supposons qu'il existe une correspondance biunivoque entre les points M de (F) et les points M′ de (F′) telle que :

- les droites AA′ et BB′ soient parallèles ;
- les droites AB et A′B′ se rencontrent (éventuellement à distance infinie) sur une droite fixe $x'x$ du plan non parallèle à AA′.

Si A n'appartient pas à $x'x$, l'affinité d'axe $x'x$ qui transforme A en A′, transforme la droite AI en A′I, I désignant le point commun à AB, A′B′, $x'x$. Cette affinité transforme aussi B en B′. (F′) est donc transformée de (F) dans une affinité.

Théorème. — ***Une condition nécessaire et suffisante pour que deux figures (F) et (F′) d'un même plan soient homologues dans une affinité d'axe x′x est que, (A, A′) et (B, B′) désignant deux couples de points homologues de (F) et de (F′), les droites AA′ et BB′ soient parallèles et que les droites AB et A′B′ se rencontrent sur x′x*** (éventuellement à distance infinie).

8. Transformée de la tangente en un point d'une courbe.

Soient une courbe plane (C) et M un point de cette courbe. Dans le plan de la courbe traçons deux axes Ox et Oy de façon que M ne soit pas sur Oy.

Supposons que (C) admette une tangente MT en M.

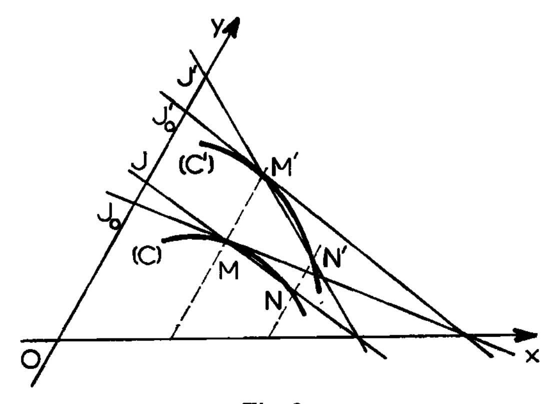


Fig. 8.

Appliquons à la courbe (C) une affinité d'axe Ox, de direction Oy, de rapport k et désignons par (C′) la transformée de (C), par M′ le transformé de M.

Le point fixe M′ appartient à (C′).

Montrons que (C′) admet une tangente en M′.

Soient N et N′ deux points homologues dans l'affinité et appartenant à (C) et (C′) respectivement. La droite M′N′ est la transformée de la droite MN. Ces deux droites coupent Oy en J et J′ respectivement.

Si N tend vers M sur (C) : N′ tend vers M′ sur (C′), MN tend vers la tangente MT, J tend vers le point J_0 intersection de MT et Oy et le point J′ transformé de J dans l'affinité tend vers J'_0 transformé de J_0. La droite M′N′ admet donc une position limite, la droite $M'J'_0$, qui est la tangente en M′ à la courbe (C′).

Remarque. — Ce raisonnement est encore valable si MT est parallèle à Oy. Dans ce cas J_0 est le point à l'infini sur Oy et son transformé J'_0 également.

Théorème. — ***Si une courbe (C) admet une tangente en M, la courbe (C′) transformée de (C) par affinité admet une tangente au point M′ transformée de M. Ces tangentes se correspondent dans l'affinité.***

Conséquence. Si deux courbes sont tangentes, les courbes homologues sont tangentes. **L'affinité conserve le contact.**

II. AFFINITÉ ORTHOGONALE

9. Affinité orthogonale.

L'affinité est dite **orthogonale** si l'axe d'affinité $x'x$ et la direction d'affinité $y'y$ sont perpendiculaires.

Si $\mathbf{k} = -\mathbf{1}$, l'affinité orthogonale est une symétrie par rapport à $x'x$.

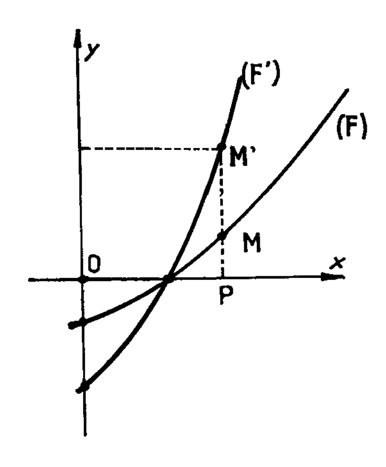


Fig. 9.

Une affinité négative peut être considérée comme le produit d'une affinité positive et d'une symétrie par rapport à l'axe. Nous n'envisagerons dans ce qui suit que les affinités positives.

10. Interprétation géométrique.

Si **k** $<$ **1**, on peut poser : $\cos \alpha = k$, $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$.

Si l'on fait subir au plan de figure une rotation (Ox, α) le point M vient en M_1 et l'on aura

$$EM' = EM \cos \alpha = EM_1 \cos \alpha.$$

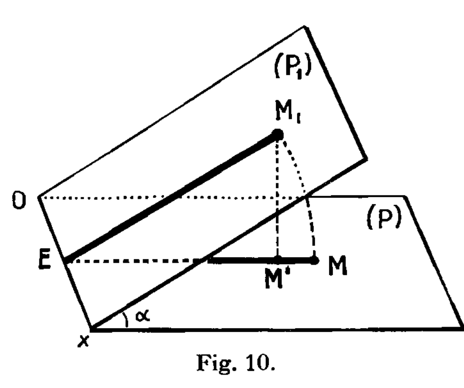


Fig. 10.

M′ est donc la projection du point M_1, la figure (F′) est la projection de la figure (F) déplacée dans une rotation (Ox, α).

Si k $>$ 1, c'est la figure (F) qui est projection de (F′) déplacée dans une rotation (Ox, α) avec $\cos \alpha = \frac{1}{k}$.

Une affinité orthogonale est le produit d'une rotation autour de l'axe d'affinité et d'une projection orthogonale.

III. RABATTEMENTS EN GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

11. But de la méthode.

La méthode des rabattements a pour but d'amener une figure plane, donnée par ses projections, à se placer sur un des plans de projection ou à lui être parallèle, afin qu'elle se projette en vraie grandeur sur ce plan.

Manière de procéder. — Pour amener un plan à se confondre avec le plan horizontal de projection, on lui applique une rotation autour de sa trace horizontale qui le transforme en le plan horizontal.

Pour rendre parallèle au plan horizontal un plan donné, on lui applique une rotation autour d'une de ses horizontales.

D'une manière analogue, on rabat un plan sur le plan frontal de projection ou sur un plan de front, en lui appliquant une rotation autour de sa trace frontale ou autour d'une de ses frontales.

L'axe de rotation s'appelle la **charnière** ou **l'axe de rabattement.**

Remarque. — C'est toujours un plan que l'on rabat ; mais, dans un grand nombre de cas, on cherche particulièrement à déterminer la position qu'occupent, après le rabattement, un ou plusieurs points du plan considéré.

Ainsi, **rabattre un point**, c'est rabattre le plan déterminé par le point et l'axe donnés, et indiquer la nouvelle position du point.

12. *Rabattre un plan autour d'une parallèle au plan horizontal.*

Rabattre un point, c'est rabattre le plan déterminé par le point et l'axe de rabattement.

Soient A et DE le point et l'axe donnés, P le plan qu'ils déterminent, et H′ le plan horizontal passant par l'axe, et sur lequel doit s'effectuer le rabattement.

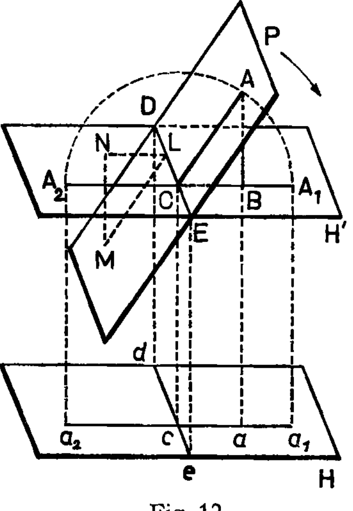


Fig. 12.

Du pied B de la projetante AB, abaissons la perpendiculaire BC sur DE et joignons AC. Cette ligne est perpendiculaire à DE, d'après le théorème des trois perpendiculaires. Si l'on fait tourner le plan DAE autour de DE, le point A décrit un arc de cercle et vient se placer en A_1 ou A_2, suivant le sens de la rotation, sur le prolongement de la perpendiculaire BC à DE, de manière que $A_1C = A_2C = AC$, car pendant ce déplacement AC reste constamment perpendiculaire à DE.

Soient a et a_1 les projections respectives de A et A_1 sur le plan horizontal H et de la projection de l'axe DE. a_1 est donc situé sur la perpendiculaire menée de a à de, à une distance de de égale à CA.

a_1 est donc le transformé de a dans l'affinité orthogonale d'axe de et de rapport $\dfrac{1}{\cos \widehat{ACB}}$.

La distance $ca_1 = CA$ est égale à l'hypoténuse du triangle rectangle ACB.

Or AB est la différence des cotes du point A et de l'axe DE, ou la **distance frontale** du point à l'axe. En épure, c'est la distance de la projection frontale du point à la projection frontale de l'axe.

BC est **la distance horizontale** du point à l'axe. En épure, c'est la distance de la projection horizontale du point à la projection horizontale de l'axe.

On peut donc formuler la règle pratique suivante, dite règle du triangle rectangle.

Règle du triangle rectangle. — Pour rabattre un point d'un plan P sur un plan horizontal, on choisit dans le plan un axe de rabattement, puis on abaisse de la projection horizontale du point une perpendiculaire sur la projection horizontale de l'axe, et à partir du pied de cette perpendiculaire, on prend sur cette perpendiculaire une longueur égale à l'hypoténuse d'un triangle rectangle ayant pour côtés de l'angle droit les distances frontale et horizontale du point à l'axe.

Remarques. — 1° Le triangle rectangle ABC est appelé **triangle de rabattement**. Les triangles de rabattement de tous les points du plan P sont semblables, car l'angle ACB est l'angle rectiligne du dièdre formé par le plan P avec les plans horizontaux.

Donc le triangle de rabattement d'un plan détermine l'angle de ce plan avec les plans horizontaux.

2° Tous les points du plan P, situés au-dessus du plan H', se rabattent d'un même côté de DE ; tous les points situés au-dessous se rabattent du côté opposé.

3° Les points situés sur l'axe DE restent fixes pendant le rabattement.

4° Les points situés sur une parallèle à l'axe DE sont rabattus sur une parallèle à cet axe.

5° Si on effectue le rabattement dans l'autre sens de rotation, on obtient le point A_2 qui se projette en a_2 déduit du point a dans l'affinité orthogonale d'axe *de* et de rapport $-\dfrac{1}{\cos \widehat{ACB}}$.

13. Épure.

Soit à rabattre le point (a, a') autour de l'horizontale (bc, $b'c'$) (fig. 13). Abaissons la perpendiculaire ad sur bc. Sur une parallèle à l'axe, prenons $aa_2 = na'$. da_2 est l'hypoténuse du triangle de rabattement, car na' et da égalent les distances frontale et horizontale du point à l'axe.

On porte da_2 en da_1, et l'on obtient en a_1 le rabattement demandé.

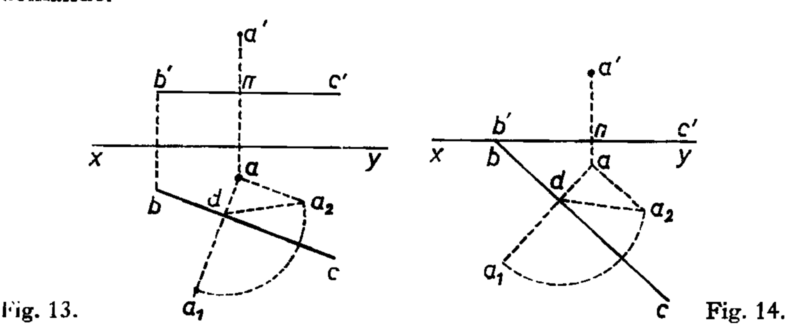


Fig. 13. Fig. 14.

La construction est la même lorsque l'axe est situé dans le plan horizontal ; il suffit de prendre $aa_2 = na'$; puis $da_1 = da_2$ (fig. 14).

14. Relèvement.

Relever un point rabattu en A_1, c'est appliquer au plan P confondu avec H' (fig. 12) une rotation inverse qui le ramène dans sa position initiale. a_1 et a étant connus on pourra ainsi déterminer la projection frontale a' du point A.

15. Relever un plan rabattu sur le plan horizontal.

Ce problème revient au suivant : Un plan ayant été rabattu sur un plan horizontal, déterminer la projection frontale d'un point de

ce plan, connaissant son rabattement et sa projection horizontale.

Connaissant l'hypoténuse et un côté de l'angle droit du triangle de rabattement, on détermine l'autre côté : cette longueur est la **distance frontale** du point à l'axe.

Soient (*bc*, *b'c'*) l'axe donné, a_1 le point rabattu et *a* sa projection horizontale (fig. 15 et 16).

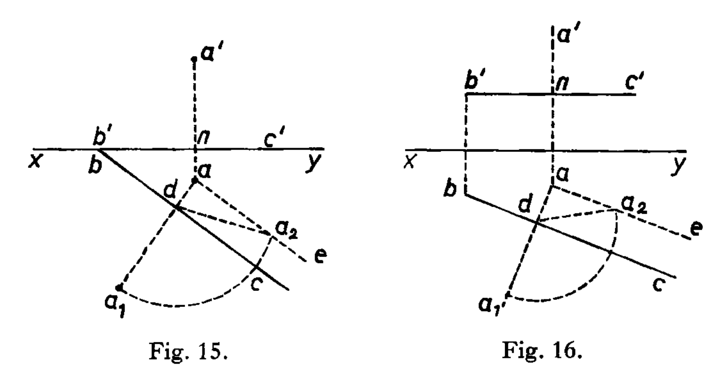


Fig. 15. Fig. 16.

Il faut que les points *a* et a_1 soient sur une même perpendiculaire à l'axe *bc* et que l'on ait $da_1 > da$. On élève à *ad* une perpendiculaire *ae* ; du centre *d*, on la coupe par un arc a_1a_2. La longueur aa_2 est la **distance frontale** du point à l'axe. On porte donc aa_2 en *na'*.

La construction est la même, quelles que soient les positions respectives de *a* et a_1 par rapport à l'axe.

16. Remarque.

Suppression de la ligne de terre. — Dans les épures qui précèdent et dans beaucoup d'autres, **la ligne de terre n'est d'aucune utilité.**

Lorsque les plans de projection n'interviennent pas dans la question d'une manière directe, et que l'on prend soin de n'utiliser que les données, on ne considère ni les traces des plans, ni les traces des droites, ni les distances des points aux plans de projection.

Tout déplacement des plans de projection parallèlement à eux-mêmes n'aurait d'autre effet, sur l'épure, que d'éloigner ou de rapprocher de *xy* les projections de la figure, sans modifier ni l'une ni

l'autre de ces projections. Alors les cotes et les éloignements sont arbitraires, la position de xy est indéterminée.

La ligne de terre ne sert plus qu'à indiquer la direction des lignes de rappel, et on peut se dispenser de la tracer sur l'épure.

17. Rabattement sur un plan frontal.

Cette méthode est corrélative à celle étudiée ci-dessus. Dans tout ce qui a été dit il suffit de permuter les mots **frontal** et **horizontal, éloignement** et **cote.**

18. Distance de deux points.

Soit à trouver la distance des deux points (a, a') et (b, b').

1° Joignons ces deux points par la droite $(ab, a'b')$, et rabattons cette droite sur le plan horizontal en faisant tourner le plan projetant autour de sa trace ab (fig. 18 **a**).

En a et b, menons des perpendiculaires à la projection horizontale ab, et prenons $aa_1 = ma'$ et $bb_1 = nb'$. La distance demandée est a_1b_1.

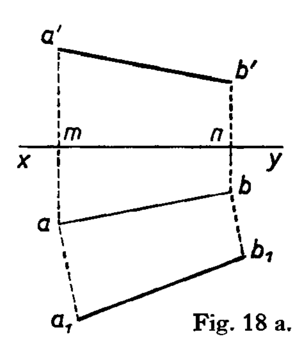


Fig. 18 a.

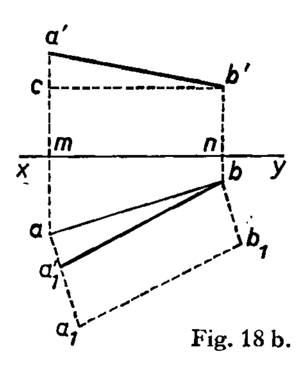


Fig. 18 b.

2° On peut encore, sur la perpendiculaire menée par a à ab (fig. 18 b), prendre $aa'_1 = ca'$, et joindre le point b au point a'_1. La distance demandée est ba'_1.

Ce second procédé consiste à rabattre le plan projetant horizontalement la droite sur le plan horizontal dont la cote nb' égale celle du point (b, b').

19. Distance d'un point à une droite.

On rabat sur le plan horizontal le plan déterminé par la droite et le point. La distance du point rabattu au rabattement de la droite est la distance cherchée.

Soient (bc, $b'c'$) et (a, a') la droite et le point donnés (fig. 19).

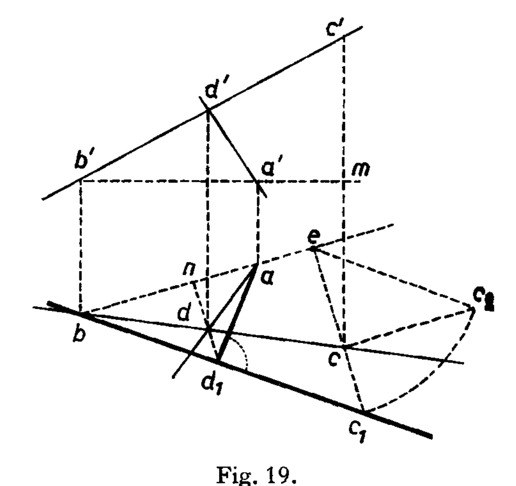


Fig. 19.

Rabattons le plan de la droite et du point autour de l'horizontale (ab, $a'b'$) du point (a, a'). Les points b et a ne changent pas ; (c, c') vient en c_1, et la droite est rabattue en bc_1.

La distance cherchée est ad_1, distance du rabattement du point au rabattement de la droite.

Pour relever le point d_1, on mène d_1n perpendiculaire à ba. Son point de rencontre avec bc donne la projection horizontale d, et une ligne de rappel détermine d'.

Les projections de la perpendiculaire sont ad et $a'd'$.

20. Distance d'un point à un plan.

Méthode ordinaire. — Pour trouver la distance d'un point à un plan, il faut abaisser du point la perpendiculaire sur le plan, chercher le point où elle rencontre le plan et déterminer la vraie grandeur du segment de cette droite compris entre ces deux points.

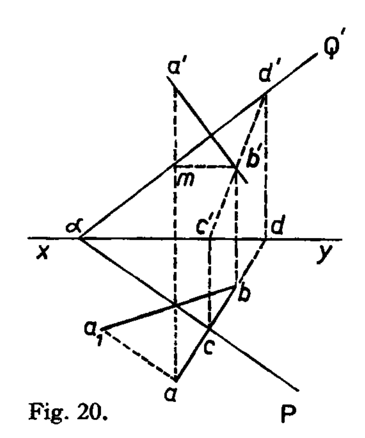


Fig. 20.

Soit à trouver la distance du point (a, a') au plan PαQ' (fig. 20).

Du point (a, a'), abaissons la perpendiculaire $(ab, a'b')$ sur le plan ; ses projections ab, $a'b'$ sont respectivement perpendiculaires aux traces correspondantes du plan. A l'aide du plan cdd' projetant horizontalement la droite, déterminons le pied (b, b') de la perpendiculaire et cherchons en ba_1 la vraie grandeur du segment $(ab, a'b')$. ba_1 est la distance demandée.

Autre méthode. — Par un changement de plan ou une rotation, on rend le plan donné perpendiculaire au plan horizontal. La distance du point au plan est égale à la distance de la nouvelle projection horizontale du point à la nouvelle trace horizontale du plan.

21. Angle de deux droites.

On appelle angle de deux droites non situées dans un même plan, l'angle de deux droites concourantes respectivement parallèles aux droites données. On peut donc se limiter au cas de deux droites concourantes.

Soit à déterminer l'angle de deux droites $(oa, o'a')$ et $(ob, o'b')$ (fig. 21).

Rabattons le plan des deux droites sur le plan horizontal H', en le faisant tourner autour de l'horizontale $(ab, a'b')$.

Les points (a, a') et (b, b'), situés sur l'axe, restent fixes pendant le rabattement. Il suffit de rabattre le point de rencontre (o, o') des deux droites.

Construisons en coo_2 le triangle de rabattement en abaissant oc perpendiculaire sur ab, puis en menant oo_2 parallèle à ab, et en prenant $oo_2 = mo'$.

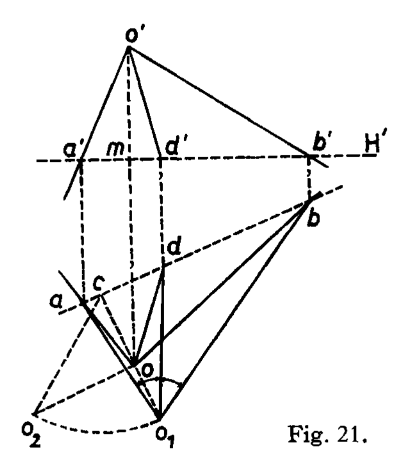


Fig. 21.

Il suffit de porter l'hypoténuse co_2 en co_1 pour obtenir en o_1 le rabattement de (o, o').

L'angle ao_1b est l'angle demandé.

Menons la bissectrice o_1d de cet angle. Le point d, intersection de o_1d avec ab, appartient à l'horizontale. Sa projection frontale est d' sur $a'b'$.

La bissectrice se relève en $(od, o'd')$.

Cas particulier : si les deux droites ont des projections horizontales confondues, le plan des deux droites est vertical. Il suffit de le rabattre sur un plan horizontal. Les constructions sont simplifiées.

22. Angle d'une droite et d'un plan.

L'angle d'une droite et d'un plan est l'angle aigu que forme cette droite avec sa projection sur le plan.

Soient AB la droite, P le plan, et BC la projection de la droite sur le plan.

ABC est l'angle de la droite et du plan.

Or, en géométrie descriptive, l'angle BAC est plus facile à obtenir directement que l'angle ABC ; d'où la méthode suivante :

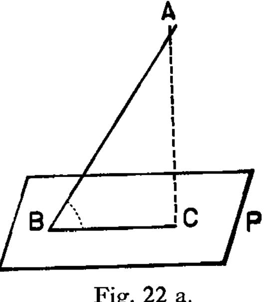


Fig. 22 a.

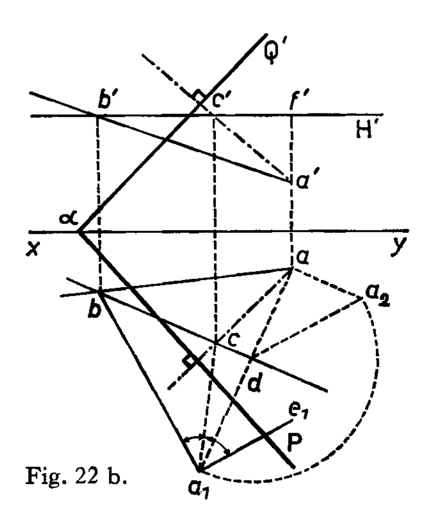


Fig. 22 b.

Méthode générale. — ***D'un point quelconque de la droite, on abaisse une perpendiculaire sur le plan ; on détermine la vraie grandeur de l'angle des deux droites. Son complément égale l'angle de la droite et du plan.***

Le plan est défini par ses traces.

Soient $(ab, a'b')$ et $P\alpha Q'$ la droite et le plan donnés (fig. 22 b).

D'un point quelconque (a, a') de la droite, abaissons la perpendiculaire (ac, $a'c'$) sur le plan.

Pour déterminer l'angle des deux droites, rabattons-le sur le plan horizontal H', en le faisant tourner autour de l'horizontale (bc, $b'c'$) de son plan. Le point (a, a') se rabat en a_1. ba_1c est l'angle des deux droites, et son complément ca_1e_1 est l'angle de la droite et du plan.

23. Angle de deux plans.

D'un point quelconque C, abaissons des perpendiculaires CD et CE sur les plans M et N. Le plan CED, perpendiculaire à chacun des plans M et N, est perpendiculaire à leur intersection AB, et les angles des droites GE, GD, sont les rectilignes des dièdres formés par les plans (fig. 23 a).

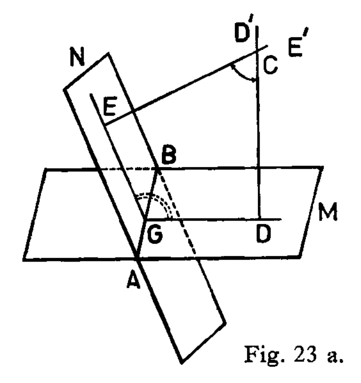


Fig. 23 a.

Dans le quadrilatère CEGD, les angles D et E sont droits ; par suite, les angles aigus en C et G sont égaux ; il en est de même des angles obtus. ***Donc, pour obtenir les angles formés par deux plans donnés, on abaisse d'un point quelconque de l'espace des perpendiculaires sur les deux plans, et l'on construit les angles de ces deux droites.***

Exemple : Chaque plan est donné par deux droites concourantes. —

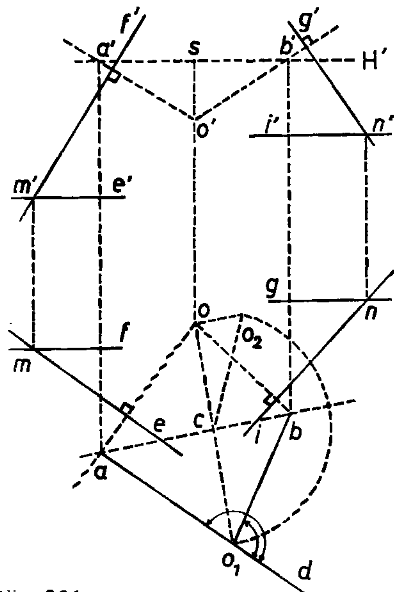


Fig. 23 b.

Soient les deux plans (mf, $m'f'$), (me, $m'e'$) et (ng, $n'g'$), (ni, $n'i'$), définis chacun par une horizontale et une frontale (fig. 23 b).

D'un point quelconque (o, o'), abaissons (oa, $o'a'$) perpendiculaire sur le premier plan, et (ob, $o'b'$) perpendiculaire sur le second. Rabattons l'angle de ces deux droites sur le plan horizontal H'. Les points (a, a') et (b, b') situés sur l'axe restent fixes ; le point (o, o') se rabat en o_1. L'angle ao_1b et son supplément bo_1d sont les rectilignes cherchés.

Autre méthode. — ***On coupe les deux plans donnés par un plan P perpendiculaire à leur intersection. Ce plan P coupe les deux plans suivant des droites (D) et (Δ) dont il faut chercher l'angle.***

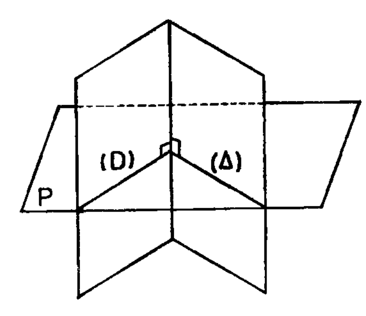


Fig. 23 c.

Exemples.

1° Les plans sont définis par leurs traces et deux traces de même nom sont parallèles.

Soient αP et $\alpha_1 P_1$ les traces horizontales données parallèles (fig. 23 d). Dans ce cas l'intersection est une horizontale parallèle à la direction commune des traces.

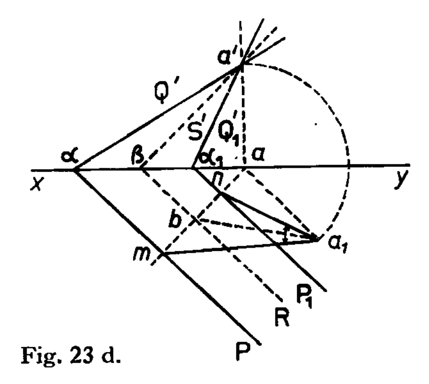


Fig. 23 d.

Coupons les deux plans donnés par le plan vertical $mnaa'$, perpendiculaire à leurs traces parallèles, et, par suite, à leur intersection. Les traces des plans donnés sur le plan auxiliaire, rabattues autour de am, en ma_1 et na_1, font connaître l'angle demandé ma_1n.

Plans bissecteurs. — Il suffit de tracer la bissectrice a_1b de l'angle ma_1n et de mener par b, intersection de a_1b avec am, une parallèle à αP, puis de joindre β à a'.

RβS' est l'un des plans bissecteurs. Une construction analogue donnerait le second : il suffirait de mener par a_1 une perpendiculaire à a_1b.

2° **Les plans sont parallèles à la ligne de terre.**

Leurs traces sont parallèles à la ligne de terre, ainsi que leur intersection. Le plan perpendiculaire à leur intersection est un plan de profil.

EXERCICES

386. On transforme une figure (F) par deux affinités de même rapport, d'axes parallèles et de même direction.

Montrer que les figures (F_1) et (F_2) obtenues se correspondent dans une translation.

387. On transforme deux figures homothétiques par une même affinité. Montrer que les figures obtenues sont homothétiques. Préciser le centre et le rapport de cette nouvelle homothétie.

388. Quels sont les transformées par affinité d'une division harmonique et d'un faisceau harmonique.

389. On considère l'affinité d'axe $x'Ox$, de direction $y'Oy$, de rapport k. Quelle est la transformée d'une courbe (C) d'équation $y = f(x)$. Démontrer que, si (C) admet une tangente en un de ses points A, la courbe homologue admet une tangente au point A' homologue de A et que ces tangentes sont homologues.

390. 1° Soit $x'x$ une droite passant par le sommet A d'un triangle ABC et située dans son plan. Dans une affinité orthogonale d'axe $x'x$, les points B et C ont pour homologues respectifs B' et C'. Soit I le point commun aux droites BC et B'C'. La perpendiculaire en A à Ax rencontre BC en I', B'C' en I''. On construit le triangle A_1BC directement semblable à AB'C'.

Quel est le centre de similitude des triangles AB'C' et A_1BC ?

Démontrer que le cercle de diamètre II' passe par A et A_1 et que : $(x'x, II'') = (IA_1, II')$.

2° Dans un plan, on donne un triangle ABC et un triangle T. En utilisant le 1°, déterminer une droite Ax du plan du triangle ABC telle qu'il existe une affinité d'axe Ax transformant le triangle ABC en un triangle directement semblable au triangle T. On trouvera deux solutions. Montrer que les deux axes d'affinités trouvés sont perpendiculaires et que le module du produit des rapports d'affinité est égal à 1.

3° Démontrer que tout triangle ABC peut être considéré comme la projection orthogonale d'un triangle équilatéral.

391. Un plan étant rapporté à deux axes orthonormés, on envisage la transformation (T) qui, à tout point m de coordonnées x et y fait correspondre un point M du même plan de coordonnées x' et y'.

On désignera par (T^{-1}), si elle existe, la transformation réciproque de (T), c'est-à-dire celle qui au point M fait correspondre le point m. La transformation (T) est définie par les relations :

$$x' = ax + by, \quad y' = cx + dy,$$

a, b, c, d étant des nombres réels non nuls simultanément.

1° On envisage d'abord le cas où $ad - bc = 0$. Montrer que le transformé d'un point m quelconque est situé sur une droite fixe. (T) admet-elle alors une transformation réciproque ?

Dans tout ce qui suit, on supposera $ad - bc \neq 0$.

2° Montrer que (T) admet une transformation réciproque. Écrire les égalités qui définissent cette transformation.

Quelles relations doivent exister entre a, b, c, d pour que (T) soit une transformation involutive, c'est-à-dire coïncide avec (T^{-1}).

Montrer que le produit de deux transformations (T) est une transformation (T) et que l'ensemble des transformations (T) a la structure de groupe.

3° (T) admet évidemment l'origine comme point double. Quelle condition doivent remplir a, b, c, d pour qu'il en existe d'autres ? Montrer que leur ensemble est alors une droite (D) dont on donnera l'équation.

4° On suppose que : $a = d = 2$, $b = c = -1$. Équation de (D). On fait un changement d'axes : (D) est l'axe OX, OY est perpendiculaire à OX.

Exprimer x et y en fonction de X et Y. Quelles sont les relations entre les nouvelles coordonnées (X, Y) de m et (X', Y') de M. Nature de la transformation (T) correspondante.

Géométrie descriptive.

392. On donne la trace horizontale d'un plan et deux points A, B sur cette trace. — Construire sa trace frontale, sachant que la somme de ses distances aux points A et B est égale à une longueur donnée.

393. Étant donné un triangle équilatéral rabattu sur le plan horizontal, le relever.

394. Trouver dans un plan P un point A dont les distances à deux points B et C de ce plan ont une valeur donnée l.

395. Construire un triangle isocèle, connaissant sa base BC, sa hauteur h et sachant que son sommet se trouve dans un plan P.

396. Construire un triangle équilatéral, connaissant sa base BC et sachant que son sommet se trouve dans un plan P.

397. Mener par A une droite Δ qui soit orthogonale à une droite Δ_1 de profil et qui en soit distante d'une longueur donnée l.

398. Trouver la distance d'un point à un plan :

a) Le plan est parallèle à xy ;
b) Le plan est déterminé par xy et un point ;
c) Le plan a ses deux traces en ligne droite.

399. Trouver la distance d'un point donné :

1° A la ligne de terre ;
2° A une parallèle à la ligne de terre ;
3° A une ligne située dans le plan frontal ;
4° A une horizontale quelconque.

400. 1° Sur une droite donnée, trouver un point dont l'ordonnée soit double de l'éloignement. 2° Même problème lorsque le point doit appartenir à un plan

donné. 3° Quel est le lieu géométrique des points du plan dont l'ordonnée et l'éloignement sont entre eux dans un rapport donné ?

401. 1° Trouver la distance de deux plans parallèles.

2° Mener un plan parallèle à un plan donné et distant de ce plan d'une longueur *l*.

402. On donne la trace horizontale d'un plan de bout, un point dans l'espace, et la distance de ce point au plan. Déterminer la trace frontale du plan.

403. Trouver l'angle de deux droites sécantes, l'une d'elles étant de profil et l'autre étant : 1° quelconque ; 2° parallèle à l'un des plans de projection; 3° parallèle à la ligne de terre.

404. Une horizontale rencontre le plan F sous un angle de 45°, une frontale rencontre le plan H sous un angle de 45°. Quel est l'angle des deux droites ?

405. Déterminer les angles que forme une droite quelconque avec un plan de profil et avec le second bissecteur.

406. Étant donnés un point (a, a') et un plan Q parallèle à la ligne de terre, faire passer par le point un second plan P parallèle à xy, mais incliné sur le premier d'un angle donné.

407. Par un point donné, faire passer un plan parallèle à xy et qui rencontre, sous un angle donné, un plan mené par la ligne de terre et un point.

408. Dans un plan donné par ses traces, trouver un point équidistant des traces de ce plan, sans recourir aux rabattements. — Lieu géométrique des points équidistants.

409. Mener le plan bissecteur du dièdre que forment deux plans donnés.

410. On donne deux points A et B tels que $AB = a$ et un point M tel que $\widehat{MAB} = \alpha$, $\widehat{MBA} = 2\alpha$.

1° Calculer la distance du point M à la droite AB en fonction de a et de α.

2° Éudier la variation de cette distance quand α varie continuellement, M devant rester au-dessus de AB. On ne devra pas recourir aux dérivées.

3° On choisit AB pour ligne de terre, MA et MB pour projections frontales de deux droites situées, la première dans le plan frontal de projection, la deuxième dans un plan de front dont l'éloignement est égal à la distance de M à AB. Compléter l'épure de ces deux droites.

4° Figurer la projection de deux horizontales s'appuyant sur les droites considérées.

Pour l'épure, on prendra $a = 4$ cm, $M = 90°$ et l'une des deux horizontales perpendiculaires au plan frontal de projection. (Baccalauréat).

CHAPITRE 28

INVERSION

I. PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES

1. Définition.

Étant donnés un point fixe O et un nombre réel k, (k $\neq$ 0), si, à tout point M on fait correspondre un point M' tel que :

a) ***O, M et M' soient alignés ;***

b) $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM'} = k$,

on définit une transformation ponctuelle appelée inversion.

Les points O, M et M' étant alignés le produit scalaire $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM'}$ est égal à $\overline{OM}.\overline{OM}'$.

Si M décrit une figure (F), M' décrit une figure (F') dite inverse de (F).

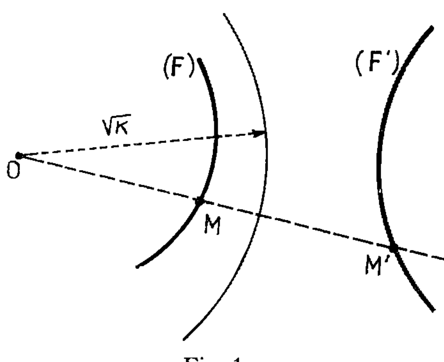


Fig. 1 a.

Le point O est le **pôle** ou le **centre d'inversion,** le nombre k, le **module** ou la **puissance d'inversion.**

Une inversion de centre O et de module k se désigne en abrégé par inversion (O, k).

Si M' est l'inverse de M, M est l'inverse de M'. **L'inversion est une transformation involutive.**

Pour k > 0, l'inversion est dite **positive**. Les points M et M' sont situés du même côté du point O. Tout point de la sphère de

centre O et de rayon $\sqrt{k}$, est à lui-même son inverse. C'est un point double de la transformation.

Cette sphère est dite **sphère d'inversion.**

Tout point situé a l'intérieur de la sphère d'inversion a son inverse a l'extérieur et réciproquement.

(Si l'on effectue une inversion plane, le lieu des points doubles est le **cercle d'inversion** de centre O et de rayon $\sqrt{k}$).

Pour $k < 0$, l'inversion est **négative**. Les points inverses M et M′ sont situés de part et d'autre de O. Une telle inversion n'admet aucun point double.

Chaque point de la sphère de centre O et de rayon $\sqrt{|k|}$, a pour inverse le point de cette sphère diamétralement opposé. La sphère n'est plus conservée par points, mais elle est conservée dans son ensemble.

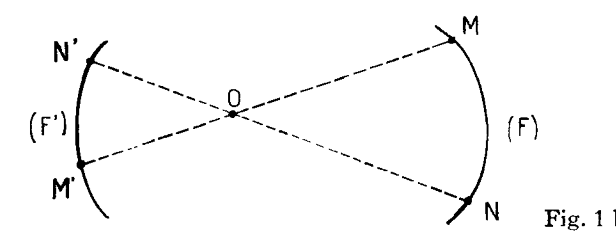


Fig. 1 b.

Une telle inversion peut être considérée comme le produit d'une inversion positive (O, $|k|$) *et d'une symétrie* (O).

2. Propriété caractéristique.

Fig. 2 a.

a) Soient (F) et (F′) deux figures inverses dans l'inversion (O, k), A un point donné et M un point *quelconque* de (F), A′ et M′ leurs homologues de (F′). On a

$$\overline{OA}.\overline{OA'} = \overline{OM}.\overline{OM'}.$$

Les points A, A′, M, M′ sont donc **cocycliques** (ou éventuellement alignés avec O si O, A, M sont sur une même droite).

Théorème. — ***Deux couples de points inverses sont sur un même cercle, ou éventuellement sur une même droite passant par le pôle d'inversion.***

Réciproquement, soient (F) et (F′) deux figures qui se correspondent ponctuellement de telle manière que deux couples quelconques de points homologues non alignés soient sur un même cercle.

Soient (A, A′) et (B, B′) deux couples de points homologues **donnés** et (M, M′) un couple de points homologues **quelconque**.

Par hypothèse, les points A, A′, B, B′ sont cocycliques ainsi que les points A, A′, M, M′ et B, B′, M, M′. Les droites AA′, BB′ et MM′ sont donc deux à deux coplanaires.

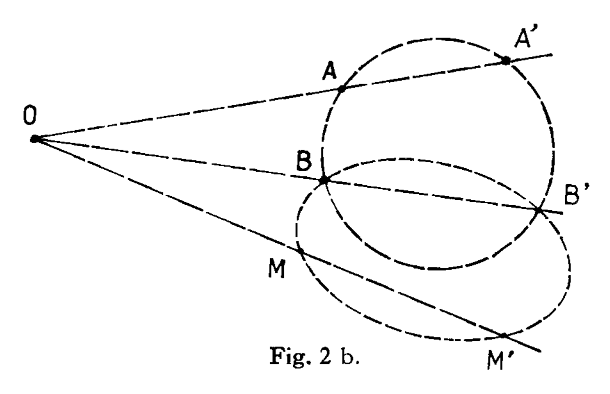


Fig. 2 b.

1° *Si* AA′ *et* BB′ *se coupent en un point* O, les plans AMM′ et BMM′ ont en commun la droite MM′. O appartenant à ces deux plans, appartient à MM′.

O, M et M′ sont donc alignés et on a :

$$\overline{OM}.\overline{OM'} = \overline{OA}.\overline{OA'} = \overline{OB}.\overline{OB'} = C^{te}.$$

Les figures (F) et (F′) se correspondent dans l'inversion (O, $\overline{OA}.\overline{OA'}$)

2° *Si* AA′ *et* BB′ *sont parallèles*, toutes les droites analogues sont parallèles, sinon on serait dans le premier cas. Le plan médiateur de AA′ et BB′ est aussi plan médiateur de MM′. Il est fixe et les points homologues sont symétriques par rapport à ce plan (ce plan est réduit à une droite en géométrie plane).

Théorème. — **Si deux figures se correspondent ponctuellement de manière que deux couples de points homologues non alignés soient sur un même cercle, ces figures sont inverses l'une de l'autre ou symétriques par rapport à un plan.**

Remarques. 1° Connaissant un couple (A, A′) de points inverses et un point M non situé sur la droite AA′, l'inverse M′ de

M est le second point commun au cercle (AA'M) et à la droite OM (fig. 2 a).

2° Si M et M' sont confondus (M appartient au cercle ou à la sphère d'inversion), la relation $\overline{OA}.\overline{OA'} = OM^2$ montre que le cercle (AA'M) est tangent en M à OM.

3. Distance de deux points inverses.

Soient A' et M' les inverses respectifs de A et M dans une inversion (O, k) (fig. 2 a).

Les triangles semblables OAM et OA'M' donnent

$$\frac{OM}{OA'} = \frac{OA}{OM'} = \frac{AM}{A'M'},$$

$$A'M' = AM.\frac{OM'}{OA} = AM.\frac{OM.OM'}{OA.OM},$$

et

$$\boxed{A'M' = |k|\frac{AM}{OA.OM}.}$$

Si les points sont alignés, la démonstration est en défaut. On a, dans ce cas :

$$\overline{A'M'} = \overline{OM'} - \overline{OA'} = \frac{k}{\overline{OM}} - \frac{k}{\overline{OA}} = k.\frac{\overline{MA}}{\overline{OA}.\overline{OM}}.$$

Cette relation montre que la formule précédente est encore valable. Elle montre aussi que, si quatre points alignés avec le centre d'inversion forment une division harmonique, leurs homologues forment aussi une division harmonique (il suffit d'appliquer la formule précédente à la définition de la division harmonique).

4. Produit de deux inversions de même centre.

Soient M un point quelconque, M_1 l'inverse de M dans l'inversion (O, k_1) et M_2 l'inverse de M_1 dans l'inversion (O, k_2). Les points O, M, M_1, M_2 sont alignés et on a :

$$\left.\begin{array}{l}\overline{OM}\ \overline{OM_1} = k_1,\\ \overline{OM_1}.\overline{OM_2} = k_2,\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\overline{OM_2}}{\overline{OM}} = \frac{k_2}{k_1}.$$

Théorème. — ***Le produit de deux inversions de même centre est une homothétie de même centre.***

Remarques. 1° Si $k_2 = -k_1$, le produit est une symétrie de centre O.

2° Ce produit n'est pas commutatif, sauf si : $\frac{k_2}{k_1} = \frac{k_1}{k_2}$ c'est-à-dire, si $k_2 = \pm k_1$.

5. Produit d'une inversion et d'une homothétie de même centre.

Soient M un point quelconque, M′ l'inverse de M dans l'inversion (O, p) et M″ l'homothétique de M′ dans l'homothétie (O, k). Les points O, M, M′, M″ sont alignés et on peut écrire :

$$\left.\begin{array}{r}\overline{OM}.\overline{OM'} = p \\ \dfrac{\overline{OM''}}{\overline{OM'}} = k\end{array}\right\} \Rightarrow \overline{OM}.\overline{OM''} = p.k.$$

Théorème. — ***Le produit d'une inversion et d'une homothétie de même centre est une inversion de même centre.***

Remarque. — Ce produit n'est pas commutatif en général, car si on permute l'ordre des transformations composantes, on verra facilement que la puissance de l'inversion-produit est $\frac{p}{k}$. Ce produit sera commutatif si : $pk = \frac{p}{k}$, donc si $k = \pm 1$.

II. INVERSION EN GÉOMÉTRIE PLANE

6. Cercle d'inversion.

Dans une inversion plane de puissance positive k, tous les points du cercle d'inversion (C) de centre O et de rayon $r = \sqrt{k}$ sont conservés.

Tout autre point M et son inverse M′ sont tels que :

$$\overline{OM}.\overline{OM'} = k = r^2.$$

Les points inverses M et M′ sont donc conjugués par rapport au cercle d'inversion et le cercle de diamètre MM′ lui est orthogonal.

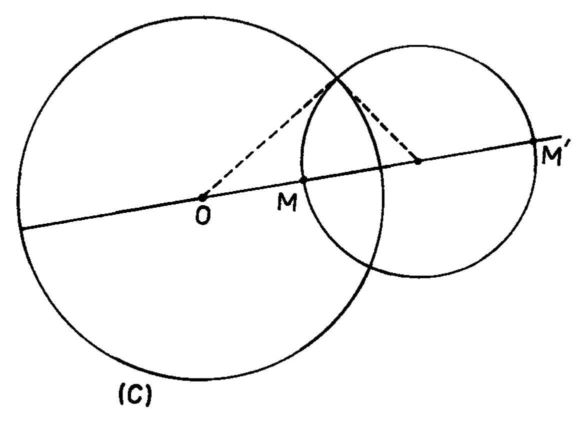


Fig. 6.

7. Tangentes à deux courbes inverses.

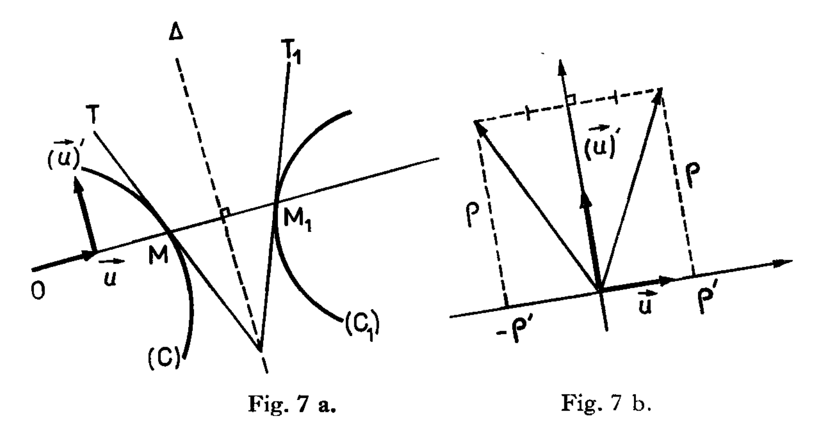


Fig. 7 a. Fig. 7 b.

Soient (C) et (C_1) deux courbes inverses dans l'inversion (O, k), M un point de (C) [distinct de O] et M_1 son homologue.

Soit $\vec{u}$ un vecteur unitaire orientant la droite OM. Posons : $\overline{OM} = \rho$. On a : $\overrightarrow{OM} = \rho\vec{u}$. (1).

$$\overline{OM}.\overline{OM_1} = k \Rightarrow \overline{OM_1} = \frac{k}{\rho}.$$

$$\text{Donc :} \quad \overrightarrow{OM_1} = \frac{k}{\rho} . \vec{u}. \quad (2)$$

Les vecteurs variables $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM_1}$ sont fonctions d'un paramètre t. Supposons que, par rapport à t, le vecteur $\overrightarrow{OM}$ admette un vecteur dérivé $(\overrightarrow{OM})' \neq \vec{0}$. La courbe (C) admet donc une tangente en M de vecteur directeur $(\overrightarrow{OM})'$. [Ch. 7, n° 4].

Dérivons (1), par rapport à t :

$$(\overrightarrow{OM})' = \rho'.\vec{u} + \rho(\vec{u})' \qquad (3)$$

[ρ' et $(\vec{u})'$ existent par hypothèse].

De même :

$$(\overrightarrow{OM_1})' = -\frac{k}{\rho^2}\rho'.\vec{u} + \frac{k}{\rho}.\vec{u} = \frac{k}{\rho^2}[-\rho'\vec{u} + \rho(\vec{u})']. \qquad (4)$$

Soient deux axes de vecteurs unitaires $\vec{u}$ et $(\vec{u})'$ (fig. 7). Ces axes sont perpendiculaires car $\vec{u}$ et $(\vec{u})'$ le sont [Ch. 7, n° 10]. Les relations (3) et (4) montrent que, sur ces axes, les composantes de $(\overrightarrow{OM})'$ sont respectivement ρ' et ρ, celles de $\frac{\rho^2}{k}(\overrightarrow{OM_1})'$ sont $-\rho'$ et ρ.

L'hypothèse $(\overrightarrow{OM})' \neq 0$ exige donc $\rho' \neq 0$ et $\rho \neq 0$, c'est-à-dire M distinct de O.

Donc si M est distinct de O, la relation (4) montre que $(\overrightarrow{OM_1})'$ existe et n'est pas nul. Par suite :

La courbe (C_1) *admet une tangente en* M_1 *de vecteur directeur* $(\overrightarrow{OM_1})'$. En outre, les vecteurs directeurs des tangentes, $(\overrightarrow{OM})'$ et $(\overrightarrow{OM_1})'$, ont des directions symétriques par rapport au vecteur $(\vec{u})'$. La médiatrice (Δ) de MM_1 est parallèle à $(\vec{u})'$, les tangentes en M et M_1 sont donc symétriques par rapport à (Δ).

Théorème. — ***Si une courbe (C) admet une tangente en M, son inverse (C_1) admet une tangente en M_1 homologue de M. Ces tangentes sont symétriques par rapport à la médiatrice de MM_1.***

Remarque. Si M est en O, M_1 est rejeté à l'infini.

Autre méthode. — Soient (C) et (C_1) deux courbes inverses dans l'inversion (O, k), M et N deux points de (C) [distincts de O], M_1 et N_1 leurs homologues sur (C_1).

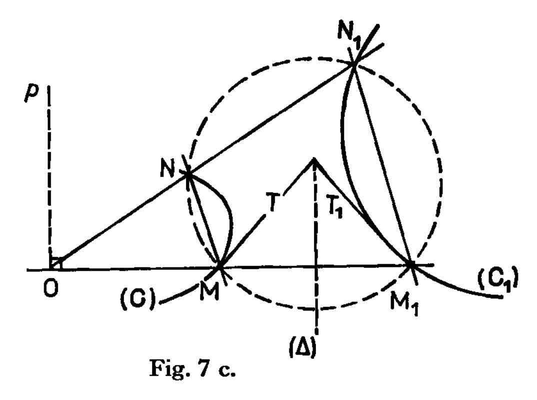


Fig. 7 c.

Les points M, N, M_1, N_1 sont cocycliques, donc les droites MN et M_1N_1 sont antiparallèles par rapport aux droites OM et ON. Les angles de droites (MN, M_1N_1) et (OM, ON) admettent les mêmes directions de bissectrices.

Supposons que (C) admette une tangente MT en M. Si N tend vers M, les bissectrices de (OM, ON) tendent : l'une vers OM, l'autre vers la perpendiculaire (p) en O à OM. N_1 tend vers M_1 et *la droite* M_1N_1 *a donc une position limite* M_1T_1 dont la direction est symétrique de MT par rapport à la direction définie par (p). La médiatrice (Δ) de MM_1 a même direction que (p). M et M_1

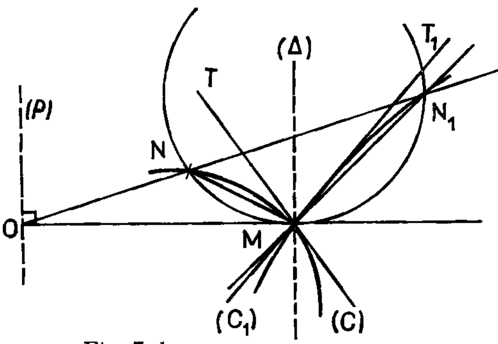


Fig. 7 d .

étant symétriques par rapport à (Δ), *les tangentes* MT *et* M_1T_1 *sont symétriques par rapport à* (Δ).

Le raisonnement subsiste si M et M_1 sont confondus. Dans ce cas, le cercle passant par M, N, N_1 est tangent à OM. MN_1 a une

position limite symétrique de MT par rapport à la perpendiculaire en M à OM.

Théorème. — Voir énoncé ci-dessus.

8. Angles de deux courbes et de leurs inverses.

Soient deux courbes (C) et (C_1) sécantes en un point M où elles admettent respectivement pour tangentes les droites MT et MT_1.

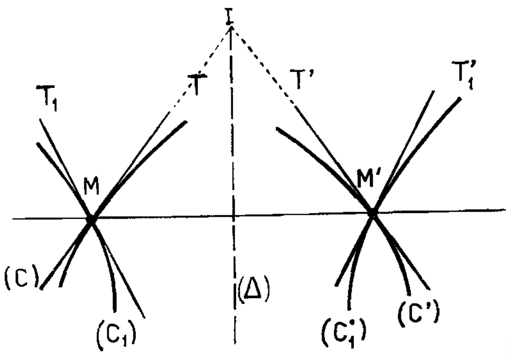


Fig. 8.

Leurs courbes inverses (C') et (C'_1) se coupent au point M' où elles admettent respectivement pour tangentes les droites M'T' et $M'T'_1$, symétriques de MT et MT_1, par rapport à la médiatrice de MM'.

On a : $(MT, MT_1) = -(M'T', M'T'_1)$.

Théorème. — ***Si deux courbes se coupent en M sous un angle α, leurs inverses se coupent en M' inverse de M sous l'angle — α.***

Les angles en M et M' étant égaux (en valeur absolue), on dit que l'**inversion conserve les angles.**

Cas particuliers.

1° Si les courbes sont tangentes en M($\alpha = 0$), leurs inverses sont tangentes en M' inverse de M. **L'inversion conserve les contacts.**

2° Si les courbes sont orthogonales en M, leurs inverses sont orthogonales en M' inverse de M.

Remarque. — Les tangentes MT et M'T' ne sont pas inverses.

III. FIGURES INVERSES D'UNE FIGURE DONNÉE INVERSION PLANE

a) *Figure inverse d'une droite.*

9. Droite passant par le centre d'inversion.

Si la droite (D) passe par le centre d'inversion, elle est à elle-même son inverse, d'après la définition même de l'inversion. Réciproquement, si une droite est à elle-même son inverse, elle passe par le centre d'inversion.

Théorème. — ***Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une droite soit conservée dans l'inversion est qu'elle passe par le centre d'inversion.***

10. Droite ne passant pas par le centre d'inversion.

Soit (D) une droite ne passant pas par le centre d'inversion O. Soient H la projection de O sur (D), M un point quelconque de (D), H′ et M′ leurs inverses.

Le quadrilatère HMM′H′ est inscriptible et $\widehat{OM'H'} = \pi/2$.

Le lieu de M′ est le cercle de diamètre OH′.

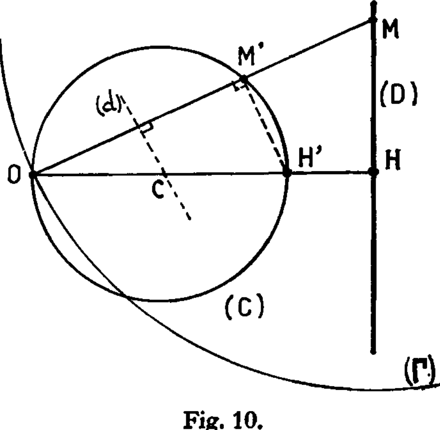


Fig. 10.

Théorème. — ***L'inverse d'une droite ne passant pas par le centre d'inversion est un cercle passant par ce centre.***

Le point du cercle diamétralement opposé au centre O est l'inverse de la projection de O sur la droite. Son centre est sur la perpendiculaire menée de O à la droite.

11. L'inversion étant une transformation involutive, (D) est l'inverse du cercle (C).

Théorème. — ***L'inverse d'un cercle passant par le pôle d'inversion est une droite perpendiculaire au diamètre passant par le pôle.***

Le pied de cette perpendiculaire est l'inverse du point diamétralement opposé au pôle d'inversion.

Exercice. Quel est l'inverse du centre C du cercle (C) ? (fig. 10).

Soit (*d*) la médiatrice de OM'. Elle passe par C. L'inverse de (*d*) est un cercle (Γ) passant par O et par C' inverse du point C. Le centre de (Γ) est sur OM' (n° 10).

D'autre part, (*d*) et (*c*) sont des courbes orthogonales, leurs inverses (Γ) et (D) le sont aussi. Le centre de (Γ) est donc aussi sur (D). (Γ) est donc centré en M.

Le cercle (Γ), de centre M et de rayon MO, recoupe la droite OH en C' inverse du point C. O et C' sont symétriques par rapport à H.

Autre méthode. C' étant l'inverse du point C, on a :

$\overline{OC}.\overline{OC'} = \overline{OH}.\overline{OH'} = \overline{OH}.2\,\overline{OC} = k.$ D'où :

$\overline{OC}.\overline{OC'} = 2\,\overline{OC}.\overline{OH}$ et $\overline{OC'} = 2\,\overline{OH}.$

12. Problème.

Une droite et un cercle donnés peuvent-ils être considérés comme inverses l'un de l'autre ?

Soient (C) et (D) un cercle et une droite d'un plan. S'il existe une inversion transformant (D) en (C) [et donc (C) en (D)], son pôle est nécessairement sur le cercle (C) et sur le diamètre perpendiculaire à (D) (n° 10). Ce diamètre OO' coupe (D) en H. Soit M un point de la droite (D) et M' l'intersection de la droite OM et du cercle (C).

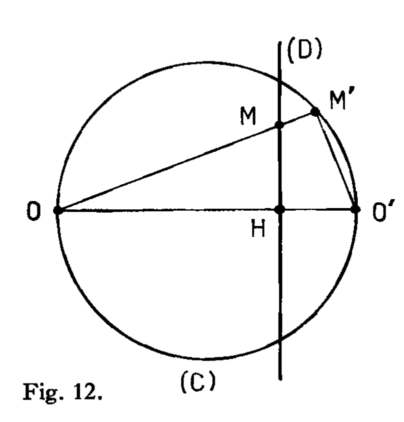


Fig. 12.

Le quadrilatère inscriptible O'HMM' permet d'écrire :

$\overline{OO'}.\overline{OH} = \overline{OM}.\overline{OM'} = C^{te}$

Le cercle (C) et la droite (D) sont donc inverses l'un de

l'autre dans l'inversion (O, $\overline{O'O}.\overline{OH}$). On démontrerait de même que (C) et (D) sont inverses dans l'inversion (O', $\overline{OO'}.\overline{O'H}$).

Ce raisonnement suppose que (D) n'est pas tangente au cercle (C). *Si* (D) *est tangente à* (C) *en* O' par exemple, la droite (D) est conservée dans l'inversion de centre O'. L'autre inversion subsiste, c'est l'inversion (O, OO'^2).

Théorème. — ***Une droite et un cercle sont inverses l'un de l'autre de deux façons s'ils ne sont pas tangents, d'une seule façon s'ils sont tangents.***

b) *Figure inverse d'un cercle (Géomètrie plane).*

13. Cercles passant par le centre d'inversion.

L'inverse d'un cercle passant par le centre d'inversion est une droite perpendiculaire au diamètre passant par ce centre d'inversion (nº 11).

14. Cercle ne passant pas par le centre d'inversion.

Soient (C) un cercle de centre C et de rayon R auquel on applique l'inversion (O, k), M un point quelconque de (C) et M' son inverse.

On doit avoir

$$\overline{OM}.\overline{OM'} = k\,;$$

d'autre part, la puissance du point O par rapport au cercle (C) est donnée par

$$\overline{OM}.\overline{ON} = p\,;$$

d'où

$$\frac{\overline{OM'}}{\overline{ON}} = \frac{k}{p} = C^{te}.$$

M' est donc l'homothétique de N dans l'homothétie $\left(O, \frac{k}{p}\right)$.

Quand M (et par suite N) décrit le cercle (C), M' décrit un cercle (C') homothétique de (C).

L'inverse d'un cercle (C) ne passant pas par le pôle d'inversion O est un cercle (C) homothétique du cercle (C), par rapport à O ; le rapport d'homothétie est ègal au

rapport du module d'inversion à la puissance de O par rapport au cercle (C) donné.

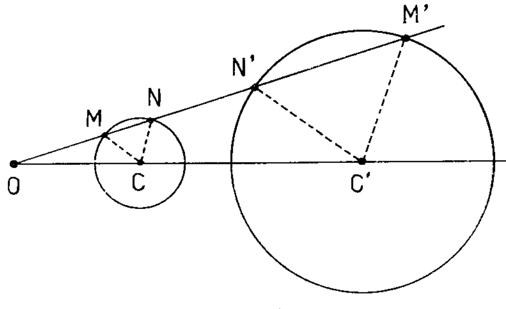


Fig. 14.

Cas particulier important.

Si $k = p$, le rapport d'homothétie égale 1. ***Le cercle (C) est à lui-même son inverse.***

Remarques. 1° On distinguera le cas du cercle d'inversion du cas précédent.

Dans le cercle d'inversion, chaque point est à lui-même son inverse.

Le cercle d'inversion est *le lieu des points doubles de l'inversion.*

Dans le cas précédent, le cercle est conservé *dans son ensemble,* chaque point du cercle a pour inverse un *autre* point du cercle. Les seuls points doubles du cercle (C) sont les points de contact des tangentes menées du centre d'inversion au cercle si elles existent.

2° Pour construire le cercle (C′) inverse du cercle (C), il suffit de construire N′ inverse de N, le rayon M′C′ est parallèle au rayon MC.

15. Réciproque.

Deux cercles (C) et (C′) sont-ils inverses ?

Si les deux cercles peuvent être considérés comme inverses l'un de l'autre, le pôle d'inversion est nécessairement l'un des centres d'homothétie des deux cercles (n° 14) et ne doit pas être situé sur les cercles (n° 11) [cas de deux cercles tangents].

Soit S_1 le centre d'homothétie positive des deux cercles (C) et (C') non tangents, p_1 la puissance de S_1 par rapport au cercle (C).

On peut écrire $$\overline{S_1M} \cdot \overline{S_1N} = p_1 \qquad (1)$$

et $$\frac{\overline{S_1M'}}{\overline{S_1M}} = \frac{\overline{S_1N'}}{\overline{S_1N}} = \frac{R'}{R}; \qquad (2)$$

d'où $$\overline{S_1N} \cdot \overline{S_1M'} = \overline{S_1M} \cdot \overline{S_1N'} = \frac{R'}{R} p_1.$$

Comme M et N', N et M' sont alignés sur S_1, M et N', N et M' se correspondent dans l'inversion $\left(S_1, \frac{R'}{R} p_1\right)$.

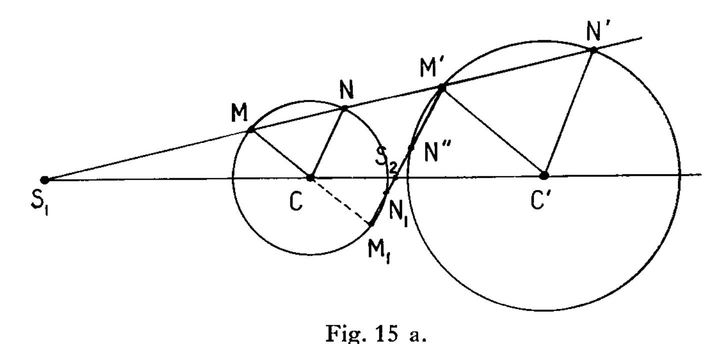


Fig. 15 a.

Si S_2 est le centre d'homothétie négative, on peut écrire

$\overline{S_2M_1} \cdot \overline{S_2N_1} = p_2$. [$p_2$: puissance de S_2 par rapport à (C)].

$$\frac{\overline{S_2M'}}{\overline{S_2M_1}} = \frac{\overline{S_2N''}}{\overline{S_2N_1}} = -\frac{R'}{R};$$

et $$\overline{S_2N_1} \cdot \overline{S_2M'} = \overline{S_2M_1} \cdot \overline{S_2N''} = -\frac{R'}{R} p_2.$$

N_1 et M', M_1 et N'' se correspondent dans l'inversion $\left(S_2, -\frac{R'}{R} p_2\right)$.

Théorème. — ***Deux cercles d'un plan sont inverses de deux façons s'ils ne sont pas tangents, d'une seule façon s'ils sont tangents. Les pôles d'inversion sont les centres d'homothétie non situés sur les cercles.***

Remarque. — Les points homothétiques M et M′, N et N′ sont parfois appelés points *homologues*. Les points inverses N et M′, M et N′ sont alors dits *antihomologues*.

Cas particuliers.

Si les cercles sont égaux, le centre d'homothétie positive est rejeté à l'infini. Une seule inversion est possible.

Si les cercles sont concentriques, les deux centres d'homothétie sont confondus au centre des cercles, mais les deux inversions subsistent. Les puissances d'inversion sont $\pm$ RR′.

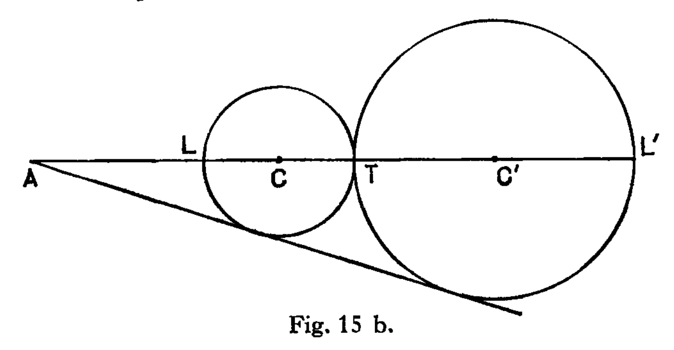


Fig. 15 b.

Si les cercles sont tangents en T et si A est l'autre centre d'homothétie, il n'existe qu'une seule inversion de centre A. Les points L et L′ (fig. 15 b) sont inverses, le point T est un point double dans l'inversion. La puissance d'inversion est donc AT^2.

16. Sécantes joignant les points inverses.

Soient deux cercles (C) et (C′), S un centre d'homothétie, M et N′, P et Q′ deux couples des points inverses, M et P étant sur (C), N′ et Q′ sur (C′).

Les points M, P, Q′, N′ sont cocycliques (nº 2). Les droites MP et N′Q′ se coupent en un point α tel que : $\overline{\alpha P}.\overline{\alpha M} = \overline{\alpha Q'}.\overline{\alpha N'}$, α est donc sur l'axe radical de (C) et (C′).

Théorème. **La sécante joignant deux points d'un cercle (C) et la sécante joignant les deux points inverses du cercle (C′) inverse de (C) se coupent sur l'axe radical de (C) et (C′).**

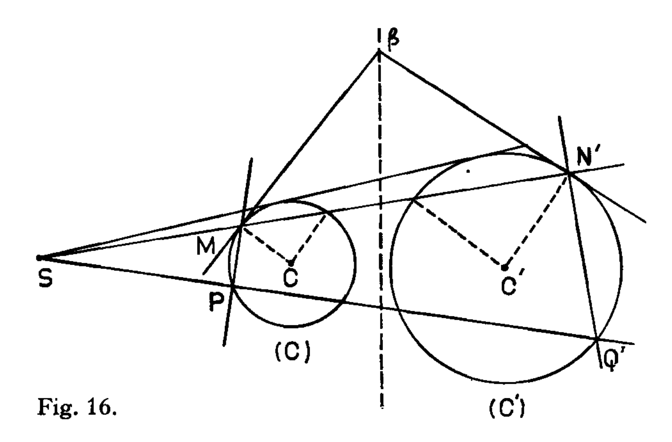


Fig. 16.

Les tangentes en M et N′ à (C) et (C′) sont symétriques par rapport à la médiatrice de MN′. Elles se coupent sur cette médiatrice en β tel que βM = βN′. β est donc sur l'axe radical de (C) et (C′).

Théorème. **Les tangentes à deux cercles en des points inverses se coupent sur l'axe radical des deux cercles.**

17. Inverses des centres des deux cercles.

Soit H le pied de la polaire (Δ) du centre O d'inversion par rapport au cercle (C). Le cercle de diamètre OH est orthogonal au cercle (C). Dans l'inversion (O, *k*) il se transforme en une droite

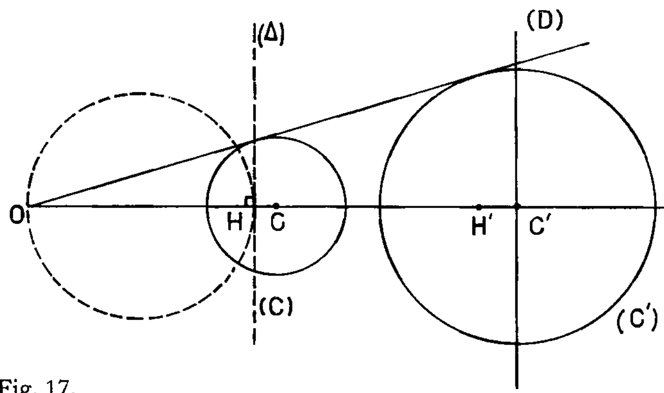


Fig. 17.

(D) orthogonale au cercle (C′), donc passant par le centre C′ et perpendiculaire à OH.

H et C′ sont donc inverses l'un de l'autre.

L'inversion étant une transformation involutive, le pied H′ de la polaire de O par rapport à (C′) sera l'inverse de C.

Théorème. — ***Lorsque deux cercles sont inverses l'un de l'autre, le centre de l'un a pour inverse le pied de la polaire du centre d'inversion par rapport à l'autre.***

IV. APPLICATIONS

18. Inversion d'un faisceau de cercles et du faisceau conjugué.

Considérons un faisceau de cercles (C) défini par les cercles (C_1) et (C_2) ,d'axe radical (Δ) et le faisceau de cercles conjugués (Γ).

Si l'on applique une inversion de centre O, les cercles (C) se transforment en cercles (C′) et les cercles (Γ) en cercles (Γ′).

Les cercles (Γ′) orthogonaux aux cercles (C'_1) et (C'_2) forment un faisceau de cercles et les cercles (C′) orthogonaux aux cercles (Γ′) forment aussi un faisceau.

L'axe radical (Δ) devient un cercle (Δ′) orthogonal à tous les cercles (Γ′) donc appartenant au faisceau (C′).

Le cercle (C) passant par O devient une droite orthogonale à tous les cercles (Γ′) et axe radical des cercles (C′).

Le cercle (Γ) passant par O devient une droite orthogonale à tous les cercles (C′), donc ligne des centres de ces cercles.

Si le faisceau est à points limites, les cercles (Γ) passent par ces points, les cercles (Γ′) passent par leurs inverses et le faisceau (C′) est aussi à points limites.

Si le faisceau est à points de base, tous les cercles (C) passent par ces points de base, les cercles (C′) passent par leurs inverses et le faisceau (C′) est aussi à points de base.

Si les cercles (C) sont tangents, les cercles (C′) le seront aussi.

L'inverse d'un faisceau de cercles est un faisceau de cercles de même genre, et le faisceau conjugué se transforme aussi en faisceau conjugué.

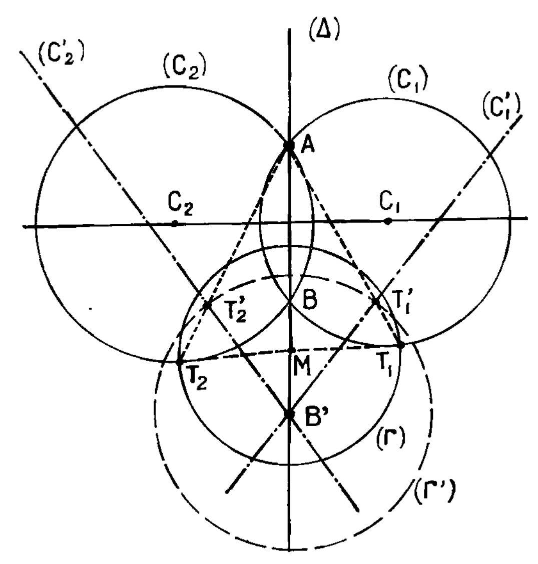


Fig. 18 a.

Cas particuliers. a) *Le faisceau admet des points de base* A *et* B *et le centre d'inversion est l'un de ces points* A (*par exemple*).

Les cercles (C) deviennent des droites (C′) passant par B′ inverse de B. Elles forment un faisceau de droites concourantes. Les cercles (Γ′) devant être orthogonaux à toutes les droites (C′) seront centrés en B′. L'axe radical (Δ) est conservé.

b) *Le faisceau admet des points limites* P *et* Q *et le centre d'inversion est l'un de ces points,* P *par exemple.*

Les cercles (Γ) passant par P et Q, se transforment en un faisceau de droites concourantes au point Q′, inverses de Q.

Les cercles (C′) devant être orthogonaux à ce faisceau de droites (Γ′) seront concentriques, le centre commun étant Q′ inverse de Q.

On sait d'autre part que le point limite P a même polaire par rapport à tous les cercles du faisceau (C) et que le pied de cette polaire est le second point limite Q. Les centres des cercles (C′) se

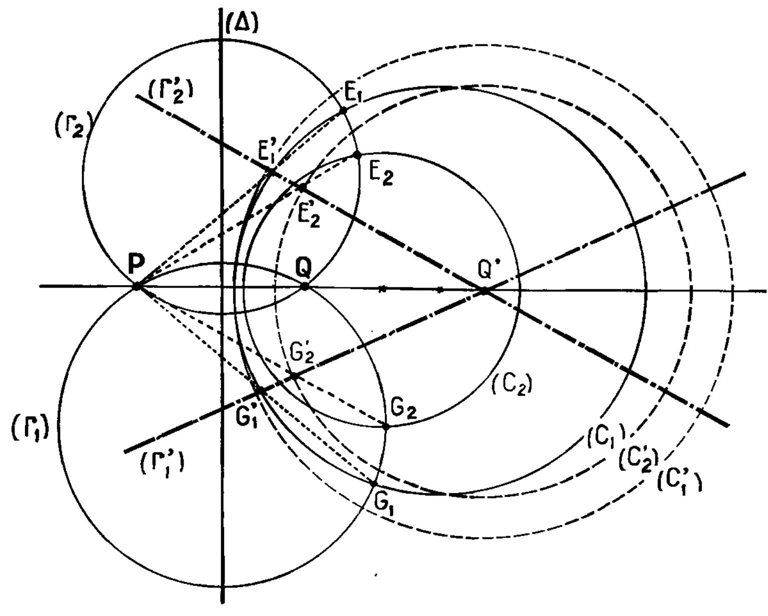


Fig. 18 b.

trouvent à l'inverse du pied Q de cette polaire, c'est-à-dire en Q'. Les cercles (C') sont donc concentriques.

L'axe radical (Δ) devient un cercle (Δ') centré lui aussi en Q'.

c) *Si le faisceau est formé de cercles tangents en* A *et si le centre d'inversion est en* A.

Les cercles (C) du faisceau deviennent un faisceau de droites parallèles (C') et le faisceau (Γ) devient aussi un faisceau de droites parallèles (Γ') ; les deux faisceaux sont orthogonaux.

19. Problème.

Transformer, par inversion, une droite et un cercle ou deux cercles en cercles concentriques.

Il suffit, d'après ce qui précède, de prendre pour pôle d'inversion, l'un des points limites du faisceau défini par le cercle et par la droite ou par les deux cercles.

Le problème est possible si les deux figures n'ont aucun point commun.

20. Théorème de Ptolémée.

Soit ABCD un quadrilatère inscriptible dans un cercle (Γ).

Si l'on effectue une inversion de centre A, le cercle (Γ) devient une droite (Δ). B, C et D ont pour inverses les points alignés B', C' et D'. On peut écrire :

$$B'D' = B'C' + C'D'$$

or, d'après le n° 3,

$$B'C' = |k|.\frac{BC}{AB.AC} \qquad (1)$$

$$C'D' = |k|.\frac{CD}{AC.AD} \qquad (1)$$

$$B'D' = |k|.\frac{BD}{AB.AD} \qquad (1)$$

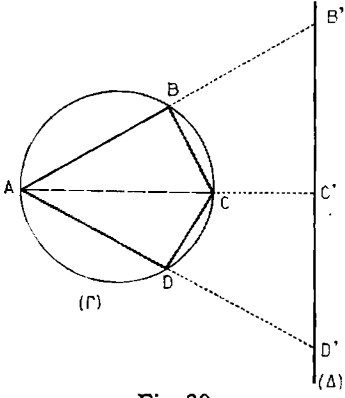


Fig. 20.

d'où
$$|k|\frac{BD}{AB.AD} = |k|\frac{BC}{AB.AC} + |k|\frac{CD}{AC.AD}.$$

$$\mathbf{BD.AC = BC.AD + CD.AB.} \qquad (2)$$

Réciproquement, soit ABCD un quadrilatère convexe tel que

$$BD.AC = BC.AD + CD.AB.$$

Si on lui applique une inversion de centre A, les points B, C, D ont pour inverses B', C' et D', et les distances B'C', C'D' et B'D' sont liées par les relations (1).

La relation (2) entraîne

$$B'D' = B'C' + C'D'.$$

Les points B', C' et D' sont donc alignés sur une droite (Δ).

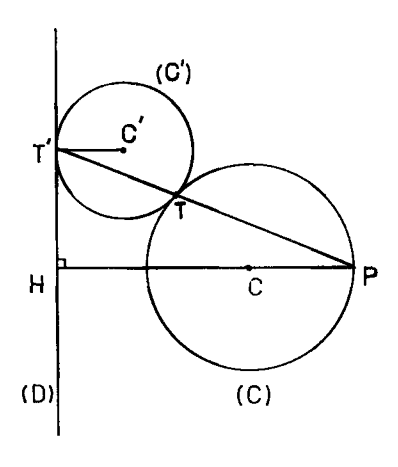
Leurs inverses B, C, D sont donc situés sur le cercle (Γ) inverse de (Δ) et passant par A.

Le quadrilatère ABCD est donc inscriptible.

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un quadrilatère convexe soit inscriptible est que le produit des diagonales égale la somme des produits des côtés opposés.

21. Inverse d'un cercle tangent à une droite et à un cercle donnés.

Soient un cercle (C), une droite (D) et un cercle (C') tangent à (C) et (D). Le point de contact T de (C) et (C') est centre d'homothétie pour les deux cercles. T' désignant le point de contact de (C') et (D), le rayon de (C) homothétique de C'T' est perpendiculaire à (D). L'extrémité P de ce rayon est alignée avec les points T, T' (définition de l'homothétie). Dans l'inversion de centre P qui échange la droite et le cercle (C) [elle existe si P n'est pas sur (D)], l'inverse du point T situé sur (C) est le point T' situé sur (D) ; la puissance d'inversion est donc : $\overline{PT}.\overline{PT'}$, c'est-



à-dire la puissance de P par rapport à (C') qui est donc conservé dans son ensemble.

Si un cercle (C') est tangent en T et T' à un cercle (C) et à une droite (D), les points T et T' sont homologues dans l'une des inversions échangeant la droite (D) et le cercle (C). Le cercle (C') est invariant dans cette inversion.

Fig. 21.

22. Problème.

Construire un cercle passant par un point donné A et tangent à une droite (D) et à un cercle (C).

Soit (Γ) le cercle cherché. Si l'on effectue l'inversion de pôle P qui transforme l'un en l'autre le cercle (C) et la droite (D), le cercle (Γ) est conservé dans son ensemble (n° 21).

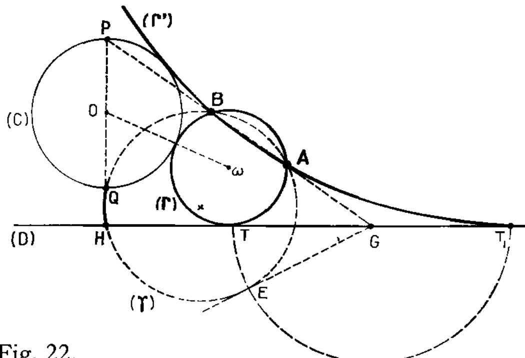


Fig. 22.

Le cercle (Γ) passe donc par B inverse de A. On peut construire le point B. On est ramené au problème : Construire un cercle passant par deux points donnés A et B et tangent à une droite donnée (D).

Pour obtenir B, on construit le cercle (γ), circonscrit au triangle HQA, B est le second point de rencontre de PA avec ce cercle ($\overline{PA}.\overline{PB} = \overline{PQ}.\overline{PH} = k$). On prolonge AB jusqu'à sa rencontre avec (D) et l'on achève comme au chap. 17, n° 6.

La discussion s'appuie sur les remarques suivantes :

Dans l'inversion qui transforme une droite et un cercle, l'un en l'autre :

a) *si la droite est extérieure au cercle,*

tout point intérieur au cercle a son inverse au delà de la droite et réciproquement. En effet

$$PM.PM' = PE.PG = PQ.PH,$$

et

$$PM < PE \text{ entraîne } PM' > PG.$$

Tout point pris entre le cercle et la droite a son inverse dans la même région.

$$PN.PN' = PE.PG,$$

et

$$PE < PN < PG$$

entraîne

$$PG > PN' > PE.$$

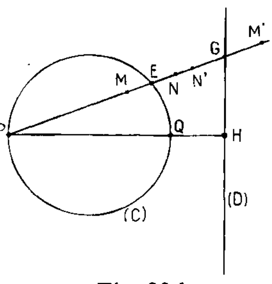


Fig. 22 b.

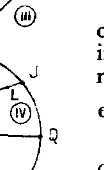


Fig. 22 c.

b) *Si le cercle coupe la droite.*

Tout point situé dans la région (I) intérieure au cercle et qui contient le centre d'inversion a son inverse au delà de (D) (région III) et réciproquement $PM < PE$

entraîne $PM' > PG$.

Tout point des régions II et IV a son inverse dans la même région

$$PE < PN < PG$$

entraîne $PG > PN' > PE$,

et $PI < PL < PJ$

entraîne $PJ > PL' > PI$.

Or, pour que le problème proposé soit possible, il faut que A et B soient d'un même côté de (D).

On voit que :

a) *si* (D) *et* (C) *sont sécants,* il y a toujours deux solutions ;

b) *si* (D) *et* (C) *sont extérieurs,* il y a quatre solutions si A est extérieur à (C) et du côté de (D) où se trouve (C).

On peut, en effet, effectuer deux inversions de pôles P et Q.

Si A est intérieur à (C) ou au delà de (D) par rapport à (C), il n'y a aucune solution.

Si A est sur (C) ou sur (D), il y a deux solutions.

c) *Si* (C) *et* (D) *sont tangents,* il y a trois solutions si A est extérieur à (C) et du côté de (D) où se trouve (C), une seule si A est intérieur à (C) ou au delà de (D) par rapport à (C).

(Cette solution est alors le cercle du faisceau défini par (C) et (D) et passant par A).

Remarque. On peut aussi résoudre ce problème en utilisant l'inversion de pôle A qui conserve (C).

23. Inverse d'un cercle tangent à deux cercles donnés.

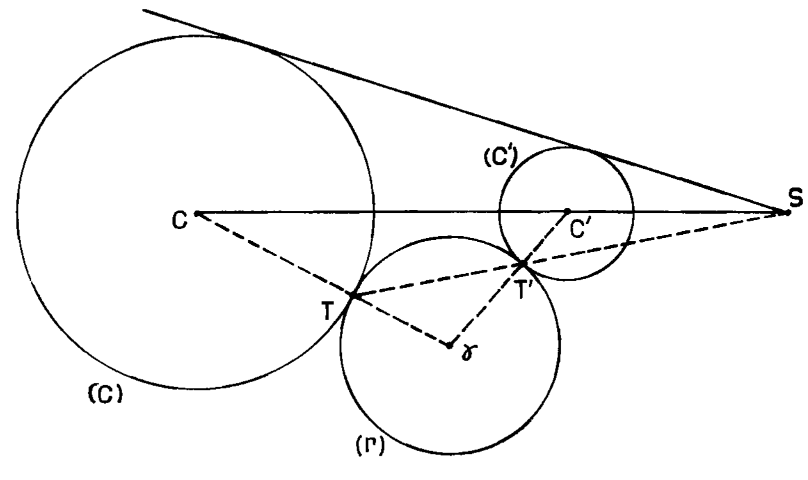


Fig. 23.

Soient (C) et (C') deux cercles donnés, (Γ) un cercle tangent à (C) en T et tangent à (C') en T'. Le point T est centre d'homothétie pour les cercles (C) et (Γ), T' est centre d'homothétie pour (Γ) et (C'), on sait que la droite TT' passe par un des centres d'homothétie, S, des cercles (C) et (C'). Les rayons CT et C'T' se coupent en γ centre du cercle (Γ), par suite, ils ne sont pas homothétiques. Dans l'inversion de pôle S qui échange (C) et (C'), T' et T sont donc des points inverses. La puissance d'inversion est : $\overline{ST}.\overline{ST'}$, c'est-à-dire la puissance de S par rapport à (Γ) qui est donc conservé dans son ensemble.

Si un cercle (Γ) est tangent en T et T' à deux cercles (C) et (C'), les points T et T' sont homologues dans l'une des inversions transformant (C) en (C'). Le cercle (Γ) est invariant dans cette inversion.

24. Problème.

Construire un cercle passant par un point donné A et tangent à deux cercles donnés (C) et (C').

Soit (Γ) le cercle cherché. Il est conservé dans cette inversion et passe par B, inverse de A.

On construira ce point B et l'on est ramené au problème :

Construire un cercle passant par deux points donnés et tangent à un cercle donné.

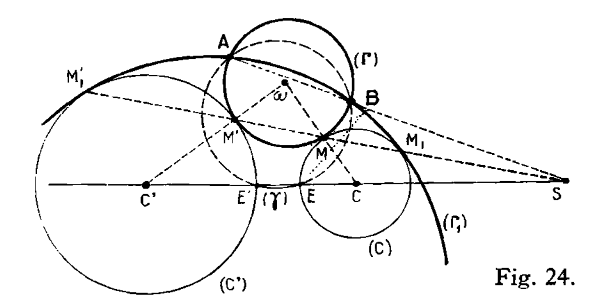


Fig. 24.

Pour obtenir B, on construira le cercle (γ) circonscrit au triangle AEE'.B est le second point de rencontre de SA avec (γ).

En effet $\overline{SA}.\overline{SB} = \overline{SE}.\overline{SE}' = k$.

On achève la construction comme au chap. 17, n° 7.

Il y a deux solutions possibles en envisageant l'inversion (S) et deux autres en envisageant l'inversion (S'), S' étant le second centre d'homothétie. *Il y a donc quatre solutions au plus.*

Remarque.

On peut envisager aussi d'autres inversions.

a) (C) et (C') déterminent un faisceau de cercles.

Si le faisceau est à points de base E *et* F, on effectue l'inversion de pôle E qui conserve F. Les cercles (C) et (C') deviennent des droites passant par F ; le cercle (Γ) devient un cercle (Γ') tangent à ces deux droites et passant par B, inverse de A. On peut le construire facilement et remonter au cercle (Γ).

Il y a deux solutions.

Si le faisceau est à points limites P *et* Q, une inversion de pôle P de module $\overline{PQ}^2$, transforme (C) et (C') en cercles concentriques (C_1) et (C'_1) de centre Q. Le cercle (Γ) devient un cercle tangent à (C_1) et (C'_1) et passant par B, inverse de A.

Si B est entre les deux cercles (C_1) et (C'_1), il y a quatre solutions.

Si B est extérieur aux cercles ou intérieur au plus petit, il n'y a aucune solution.

Si le faisceau est à points de contact T, l'inversion de pôle T transforme (C) et (C') en deux droites auxquelles (Γ') doit être tangent. Il y a trois solutions si A est extérieur aux cercles ou entre les deux cercles, une si A est intérieur à l'un des cercles (le cercle du faisceau passant par A).

b) On peut effectuer l'inversion de centre A. (Γ) devient une tangente commune à (C_1) et (C'_1) inverses de (C) et (C').

Si (C_1) *et* (C'_1) *sont sécants,* donc aussi (C) et (C'), il y a deux tangentes communes, donc deux solutions.

Si (C_1) *et* (C'_1) *n'ont aucun point commun,* donc aussi (C) et (C'), il peut y avoir quatre solutions [(C_1) et (C'_1) extérieurs] ou aucune solution [(C_1) et (C'_1) intérieurs].

On traitera facilement les cas particuliers : (C) et (C') tangents, ou A sur l'un des cercles.

EXERCICES

Inversion plane.

411. Si quatre points alignés sur le pôle forment une division harmonique, il en est de même de leurs inverses.

412. Si deux points M et N sont inverses l'un de l'autre dans l'inversion de centre O qui conserve le cercle (O), leurs distances à un point P mobile sur le cercle sont dans un rapport constant.

413. On considère dans un plan un centre d'inversion O et trois couples de points inverses A, A' ; B, B' ; C, C'.

1° Montrer que l'on a

$$(CA, CB) + (C'A', C'B') = (OA, OB).$$

2° On suppose que C décrit un cercle passant par A et B. Quel sera le lieu de C' ?

414. Transformer par inversion, trois cercles donnés en trois cercles dont les centres sont alignés. Le problème est-il possible ? Lieu du centre de ces inversions.

415. Lieu des centres des inversions qui transforment trois points A, B et C en trois points A', B' et C' tels que l'on ait A'B' = A'C'.

Trouver les centres des inversions qui transforment trois points A, B et C en trois points A', B', C', tels que le triangle A'B'C' soit équilatéral.

416. Lieu des centres des inversions qui transforment deux points A et B donnés sur un cercle (O) en deux points A' et B' diamétralement opposés sur le cercle (O') inverse du cercle (O).

417. Lieu des centres des inversions qui transforment deux cercles donnés en deux cercles égaux.

Par une même inversion transformer trois cercles donnés en trois cercles égaux.

418. Lieu des centres des inversions qui transforment deux cercles donnés (O) et (Γ) ayant deux points communs A et B en deux cercles (O') et (Γ') tels que le cercle (Γ') détermine sur le cercle (O') deux arcs dont l'un ait pour mesure 2φ. Cas particulier $\varphi = \pi/2$.

419. Si R est le rayon du cercle circonscrit à un triangle, r le rayon du cercle inscrit et d la distance du centre du cercle inscrit et du centre du cercle circonscrit, on a la relation

$$d^2 = R^2 - 2Rr.$$

420. On donne trois points A, B et C et on considère le cercle (Γ) lieu des points M tels que

$$\frac{MA}{MB} = \frac{CA}{CB}.$$

Quel est le lieu du point M' inverse de M dans une inversion donnée ? Examiner le cas particulier où le centre d'inversion est en C.

421. Dans l'inversion échangeant deux cercles, le centre d'inversion est l'un des centres d'homothétie. Quel est l'inverse de l'autre centre d'homothétie ?

422. Parmi les cercles orthogonaux à un cercle A :

1° Tous ceux qui passent par un même point P passent par un autre point fixe P'.

2° Tous ceux qui sont tangents à une droite D sont tangents à un même cercle D′ et tous ceux qui sont tangents à un même cercle C sont tangents à un deuxième cercle C′.

423. Parmi les cercles qui coupent deux cercles donnés sous des angles égaux, tous ceux qui passent par un même point P passent par l'un ou l'autre de deux points fixes P_1 ou P'_1.

424. On donne deux cercles orthogonaux O et ω qui se rencontrent aux points A et B ; on prend un point C sur le cercle O, un point D sur le cercle ω. Démontrer que les cercles ACD et BCD sont orthogonaux.

425. D'un point fixe C pris sur le prolongement d'un segment rectiligne AB, on mène aux cercles qui passent par les points A et B des tangentes CD et CD′.

1° Lieu des points de contact D et D′ de ces tangentes.

2° Lieu du milieu M de la corde DD′.

426. D'un point P à un cercle O, on mène deux sécantes variables PAA′ et PBB′. Lieu du point M où se recoupent les cercles PAB et PA′B′ ou du point N où se recoupent les cercles PA′B et PAB′.

427. On donne un cercle O et deux points A et B. Par le point B on mène une sécante quelconque BCD et on trace les droites AC et AD qui recoupent le cercle respectivement en E et F. Trouver le lieu géométrique du centre du cercle circonscrit au triangle AEF.

428. Une corde BC pivote autour d'un point A donné à l'intérieur d'un cercle O. Sur chacun des segments BA et AC comme cordes, on décrit des cercles tangents au cercle O. Lieu du second point M où se coupent ces deux cercles variables.

429. Étant donnés un cercle C et un point O, si par le point O on mène une sécante OAA′, les cercles passant par les points O et touchant le cercle en A et A′ se rencontrent en un deuxième point P. Lieu du point P.

430. On donne un cercle O et un point P. Par ce point P on mène une sécante variable qui rencontre le cercle O en deux points A et B, et on considère les cercles γ et γ′ qui ont pour diamètres respectivement PA et PB. L'axe radical des cercles O et γ rencontre l'axe radical des cercles O et γ′ en un point M. Lieu du point M.

431. On donne un cercle O et deux diamètres rectangulaires Ox et Oy. La tangente en un point P quelconque de ce cercle rencontre Ox en A et Oy en B; l'axe radical du cercle O et du cercle circonscrit au triangle AOB rencontre Ox et Oy aux points C et D. Trouver le lieu géométrique du milieu M de CD.

432. Un triangle ABC dont l'angle A est constant et l'aire invariable pivote autour de son sommet A qui est fixe. Lieu du sommet C quand le sommet B décrit soit une droite, soit un cercle passant par le sommet A.

433. On donne un point A et un cercle O. On considère les cercles (C) tangents à O et passant par A. Lieu du deuxième point commun à deux cercles (C) orthogonaux.

434. On donne deux cercles O et O′. Une tangente variable au cercle O coupe O′ en deux points B et C. Enveloppe du cercle O′BC.

435. Un angle constant BAC $= \alpha$ pivote autour de son sommet A qui est fixe et intercepte sur une droite fixe D un segment variable BC. Déterminer l'enveloppe du cercle ABC.

436. Construire un cercle passant par un point A, tangent à une droite D et orthogonal à un cercle C.

437. Mener par un point P un cercle tangent à deux cercles donnés.

438. Par deux points A et B, mener un cercle.

1° Tangent à un cercle O.

2° Coupant le cercle O sous un angle φ.
Cas particulier $\varphi = \pi/2$.

439. Construire un cercle tangent à un cercle A et orthogonal à deux cercles donnés B et C.

440. On donne un point A, une droite D et un cercle O. Trouver sur la droite un point B et sur le cercle un point C tels que le triangle ABC soit rectangle en A et d'aire donnée 1/2 m^2.

441. On donne un cercle O, un point A et une droite Δ passant par A.

1° Montrer qu'il existe deux cercles tangents au cercle O et touchant la droite Δ au point A.

2° La droite qui joint les points de contact de ces cercles et du cercle O passe par un point fixe lorsque la droite Δ tourne autour du point A.

442. On donne un cercle de centre O et la tangente AT en l'un de ses points A.

1° Construire un cercle (C) orthogonal au cercle O et tangent à AT en un point donné M.

2° OM coupant (C) en un second point M′ trouver le lieu de M′ quand M décrit AT, et montrer que (C) reste tangent à ce lieu.

443. Sur deux cercles donnés (O) et (O′) on donne deux points, A sur (O) et A′ sur (O′). On mène d'un point P de l'axe radical (D) des deux cercles, PA et PA′ qui recoupent (O) et (O′) respectivement en M et M′. Déterminer le point P de manière que MM′ soit perpendiculaire à (D).

444. On donne deux cercles (O) et (O′) tangents extérieurement au point A, et un point P situé sur la tangente commune AT.

1° Montrer qu'il existe deux cercles (γ) et (γ') passant par le point P et tangents aux cercles (O) et (O′) et déterminer leurs points de contact.

2° Les deux cercles (γ) et (γ') se coupent en un point autre que P ; trouver le lieu de ce point quand P décrit la droite AT.

445. On donne deux cercles (O) et (O′) qui se coupent en deux points A et B. On prend un point M sur le cercle (O) et l'on mène les droites MA et MB qui recoupent le cercle (O′) en A′ et B′.

1° Démontrer que la droite A′B′ est perpendiculaire à MO.

2° Trouver l'enveloppe de A′B′.

446. On considère un cercle fixe (O), un point fixe A et les cercles (C) orthogonaux au cercle (O) et passant par A.

1° Lieu du centre des cercles (C).

2° Enveloppe de la corde commune au cercle (O) et à un cercle (C).

3° Soient M et N les points communs au cercle (O) et à un cercle (C). Les droites AM et AN rencontrent le cercle (O) en M′ et N′. Enveloppe de M′N′.

4° Montrer que le cercle circonscrit au triangle AM′N′ passe par un point fixe.

447. On considère sur une circonférence de centre O deux points fixes B et C et un point variable A. Soient (γ) et (γ') les cercles qui passent par le point A et qui sont tangents respectivement en B et C à la droite BC.

1° Lieu géométrique du deuxième point de rencontre des cercles (γ) et (γ').

2° Lieu du point N où AB rencontre (γ') et du point P où AC rencontre (γ).

448. On donne une circonférence (C) et une droite (D) situées dans un même plan et qui ne se coupent pas.

1° Montrer que l'on peut par une inversion convenablement choisie transformer cette circonférence et cette droite en deux cercles concentriques.

2° On considère deux circonférences (γ) et (γ') variables toutes deux et assujetties à rester tangentes entre elles et d'autre part tangentes à la circonférence (C) et à la droite (D). Trouver le lieu de point de contact de (γ) et de (γ').

3° En déduire le lieu des centres des inversions qui transforment le cercle (C) et la droite (D) en deux cercles égaux.

449. Dans un plan on donne deux points A, B, et on prend sur AB entre A et B un point C ; on construit, dans le plan considéré, d'un même côté de AB, les trois demi-circonférences décrites respectivement sur AB, AC, CB comme diamètres ; on envisage une circonférence tangente à ces trois demi-circonférences et on désigne par M son centre.

1° Que devient la figure considérée si on lui applique une inversion ayant pour pôle un des points A, B, C ?

2° On envisage deux inversions ayant pour pôles respectifs A, B et des puissances d'inversion choisies, dans chaque cas, de façon à transformer en elle-même la demi-circonférence à laquelle le pôle n'appartient pas ; déduire de la considération simultanée de ces deux inversions une détermination graphique de la circonférence de centre M.

3° On désigne par $2a$ la distance AB, par $2x$ la distance AC, par O, D, E les milieux respectifs de AB, AC, CB, par y le rayon de la circonférence de centre M ; calculer en fonction de a et de x les longueurs MD, MO, ME et le rayon y.

450. Soient (I) et (J) deux cercles égaux de rayon R, tangents en un même point O, à une droite donnée (D).

1° Montrer que par un point A de la droite (D) on peut en général mener deux cercles (β) et (γ) tangents aux cercles (I) et (J). Déterminer graphiquement les points de contact, puis les centres des cercles (β) et (γ) par une inversion convenable de pôle A.

2° Étudier directement le cas particulier OA $=$ R, et calculer dans ce cas, le rayon de l'unique cercle passant par A et tangent aux cercles (I) et (J).

3° On choisit sur la droite (D) un sens positif de parcours et l'on prend le point O pour l'origine des abscisses. Calculer en fonction de l'abscisse $\overline{OA} = x$ du point A, les abscisses $\overline{OB}$ et $\overline{OC}$ des points B et C, où les cercles (β) et (γ) coupent respectivement la droite (D) en dehors de A. Montrer que, dans tous les cas de figure, les points B et C sont conjugués harmoniques par rapport à O et A.

4° Étudier quand x varie de $-\infty$ à $+\infty$, les variations de l'abscisse $y = \overline{O\omega}$ du milieu ω du segment BC. Construire la courbe représentative de ces variations. Préciser la position de la tangente à cette courbe pour $x = 0$.

451. On donne un cercle (C) de centre O et de diamètre AB $=$ 2R et une droite (Δ) perpendiculaire à AB en H. On pose OH $= d$. Soit M un point variable

sur (Δ). Les droites MA et MB recoupent en P et Q le cercle (C). On désigne par (γ) le cercle variable circonscrit au triangle MPQ, son centre par ω, son rayon par ρ.

1° En se servant d'une inversion convenablement choisie, montrer que (γ) est orthogonal à (C) et que son centre ω est sur (Δ).

2° Montrer que l'axe radical de deux cercles (γ) quelconques est toujours la droite AB et que la droite PQ passe par un point fixe K.

3° Déduire des résultats obtenus le lieu du point N autre que M, commun à (γ) et au cercle (C') circonscrit au triangle MAB.

4° On oriente (Δ) et l'on pose $\overline{HM} = x$; $\overline{H\omega} = y$. Évaluer y en fonction de x, R et d. Quand x varie, tracer la courbe représentative des variations de y, en distinguant les divers cas possibles suivant les valeurs de d.

452. On donne un système de coordonnées rectangulaires $x'Ox$, $y'Oy$; on donne en outre la droite (D) parallèle à $x'Ox$ et rencontrant Oy en B, tel que $\overline{OB} = 2R$ (R est une longueur positive donnée).

On appelle (M) un cercle tangent à la fois à $x'Ox$ et à (D) et dont le centre M, n'est pas sur $y'Oy$; on appelle (P) le cercle inverse du cercle (M) dans l'inversion de pôle O et de puissance $4R^2$; on dit alors que le cercle (P) est le *cercle associé* au cercle (M). On notera P le centre du cercle (P).

1° Montrer que, lorsque (M) varie, son cercle associé (P) reste tangent à la fois à $x'Ox$ et à un cercle fixe, (L), que l'on précisera. En déduire :

a) une construction simple du cercle (P) associé à un cercle (M) donné ;

b) les cercles (M) qui coïncident avec leur cercle associé ;

2° Quel est le lieu des points communs, lorsqu'ils existent, à un cercle (M) et à son cercle associé ? Construire les cercles (M) qui sont tangents à leur associé ; construire leurs cercles associés.

3° Quel est le lieu du pied H, de la polaire de O par rapport au cercle (P) lorsque le cercle (M) varie ? En déduire que cette polaire passe par un point fixe, que l'on précisera.

4° On désigne par (O) le cercle de centre O de rayon 2R. Montrer qu'il existe un point K ayant même puissance par rapport au cercle (O), au cercle (Γ) au cercle (M) et à son cercle associé (P). Montrer que, lorsque (M) varie, la perpendiculaire en K à l'axe radical des cercles (M) et (P) passe par un point fixe F.

N.B. Par *lieu géométrique* ou *lieu* il faut entendre *ensemble de points*.

(Bacc. France, 1962 — Partiel).

453. A) On donne deux axes perpendiculaires, $x'Ox$ et $y'Oy$ $\left((\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy}) = +\frac{\pi}{2}\right)$, munis de vecteurs unitaires de même longueur, et plusieurs points définis par leurs coordonnées :

$A(x = a,\ y = 0)$, $B(x = 0,\ y = a)$, $C(x = a,\ y = a)$, $I(x = a,\ y = \beta)$, $J(x = \alpha,\ y = a)$, a étant un nombre positif constant, α et β deux nombres positifs, négatifs ou nuls. On désigne par (I) le cercle de centre I, tangent à Ox, et par (J) le cercle de centre J, tangent à Oy.

1° Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que les cercles (I) et (J) soient orthogonaux est que l'on ait

$$(1) \qquad \alpha + \beta = a.$$

2° Montrer que si la relation (1) est satisfaite, il existe une rotation (dont on précisera l'angle et le centre S) transformant le vecteur $\overrightarrow{AI}$ en le vecteur $\overrightarrow{CJ}$. En déduire que la médiatrice du segment IJ passe par un point fixe.

3° Les nombres α et β varient en restant liés par la relation (1). Montrer que le point M de coordonnées ($x = \alpha$, $y = \beta$) appartient aux cercles (I) et (J) et à la droite AB. Trouver les lieux des points d'intersection, M et P, des cercles (I) et (J) et le lieu du milieu du segment IJ.

4° Transformer, dans l'inversion de pôle A et de puissance AB^2, les droites $x'Ox$ et $y'Oy$ et les cercles (I) et (J). Retrouver ainsi les lieux des points d'intersection des cercles (I) et (J).

B. On considère maintenant un triangle fixe quelconque OAB. On désigne par (I) un cercle variable tangent au point A à la droite OA et par (J) un cercle variable tangent au point B à la droite OB et orthogonal au cercle (I). Comment faut-il choisir le triangle OAB pour que le lieu des points d'intersection des cercles (I) et (J) comprenne une droite ?

(Bacc. France, session de remplacement, juin 1961).

454. Dans un plan rapporté à deux axes rectangulaires $x'Ox$, $y'Oy$, on définit les points fixes A, B, I, J, S et le point variable M par leurs coordonnées respectives : A(— 3, 0), B(3, 0), I(1, 0), J(9, 0), S(0, h), M(x, 0), où h désigne une constante positive et x une variable pouvant prendre toute valeur de $-\infty$ à $+\infty$.

1° Calculer en fonction de x la quantité $z = MA + 2MB$ (MA et MB représentent des longueurs, donc des nombres positifs ou nuls). Montrer que, dans chacun des intervalles $x \leqslant -3$, $-3 \leqslant x \leqslant 3$, $x \leqslant 3$, la quantité z s'exprime en fonction linéaire de x et vérifier que, selon l'intervalle considéré, le rapport $\frac{z}{MI}$ ou le rapport $\frac{z}{MJ}$ reste constant.

2° Calculer la quantité $y = \frac{MA + 2MB}{MS}$ en fonction de x et h. Dans le cas particulier $h = 3$, étudier les variations de y en fonction de x et tracer le graphique représentatif avec le plus de précision possible. On prendra pour échelle : sur l'axe $x'Ox$, 1 unité = 1 centimètre ; sur l'axe $y'Oy$, 1 unité = 3 centimètres.

Déterminer la plus grande et la plus petite valeur de y quand x varie de $-\infty$ à $+\infty$. Pour quelles valeurs de x a-t-on $y = 3$?

Supposant toujours $h = 3$, comparer les valeurs prises par y en deux points M_1, M_2 divisant harmoniquement le segment AB. Expliquer géométriquement le résultat obtenu, d'après le choix particulier du point S.

3° Revenant au cas général ($h > 0$ quelconque), on désigne par A', B', I', J', M' les inverses respectifs de A, B, I, J, M dans l'inversion de centre S et de puissance h^2. Montrer que, quand x varie en restant dans l'un des intervalles $x \leqslant -3$, $-3 \leqslant x \leqslant 3$, $x \leqslant 3$, le rapport $\frac{y}{M'I'}$ ou le rapport $\frac{y}{M'J'}$ selon l'intervalle considéré, reste constant.

Montrer qu'on peut ainsi déterminer sans calcul le sens de variation de y et retrouver les résultats obtenus au 2° pour $h = 3$.

Étant donnés un cercle C, deux points A' et B' de ce cercle et un point M' variable sur ce cercle, montrer que l'étude précédente permet de déterminer la plus grande et la plus petite valeur de M'A' + 2M'B'.

(Bacc. France, 1959).

455. On donne un cercle (C) de centre O, une corde fixe AB de ce cercle. On désigne par I le milieu de AB (on suppose que I et O sont distincts). Soit M un point variable de (C) ; la tangente en M au cercle (C) coupe la droite AB en T.

1° Montrer que la polaire t de T par rapport au cercle (C) passe par un point fixe J et que le cercle (ω) de diamètre JT est orthogonal à (C). Le point M décrivant

le cercle (C), montrer que les cercles (ω) appartiennent à un faisceau dont on précisera les points de base.

2° Quel est le lieu du point T', transformé de T par l'inversion de pôle J, de puissance JA^2 ? Transformer par cette inversion le cercle (ω) et la droite MT.

3° Soit K le centre du cercle inverse de la droite MT. Quel est le lieu de K ?

Soient α le milieu de JO, $y'\alpha y$ un axe porté par JO et de même sens que $\overrightarrow{JO}$, $x'\alpha x$ un axe tel que le repère $x'\alpha x$, $y'\alpha y$ soit direct et orthonormé. Écrire l'équation du lieu de K par rapport à ce repère. On désignera par R le rayon de (C) et par kR ($k > 1$) la longueur OJ.

4° Quelle est la polaire t' du point T' par rapport au cercle (C) ? Déterminer l'enveloppe de t'.

5° Dans cette question, on suppose que $k = 2$.

Déterminer les lieux :

a) De l'orthocentre H du triangle MAB ;

b) Du pied H' de la polaire h de H par rapport au cercle (C).

Quelle est l'enveloppe (E) des droites h ? Écrire l'équation de (E) par rapport au repère $\alpha' ax$, $y'\alpha y$.

NOTE. Par *lieu géométrique* ou *lieu*, il faut entendre *ensemble de points*.

(Bacc. France, 1963).

456. On donne un système d'axes orthonormé, $x'Ox$, $y'Oy$; soit A l'extrémité du vecteur unitaire de l'axe $x'x$. On considère la transformation ponctuelle T qui, à un point P du plan, fait correspondre le point M par la construction suivante : P se projette orthogonalement en H sur $y'y$; M est l'intersection de la droite AP avec la parallèle à AH menée par O.

1° Le point M est-il bien défini pour tout point P du plan ? On considère l'intersection, I, de la droite AP avec $y'y$. Montrer que M et P se correspondent dans une inversion de pôle I et de puissance IA^2. Comment faut-il modifier cette conclusion lorsque I n'existe pas ? Montrer que cette nouvelle détermination du point M est équivalente à la construction initiale, lorsque P n'est pas sur $x'x$. Peut-on, dans un langage conventionnel, définir le transformé d'un point P situé sur $y'y$?

2° On désigne par (x, y) les coordonnées de P, par (X, Y) celles de M. Établir les relations qui déterminent x et y en fonction de X et Y, puis celles qui donnent X et Y en fonction de x et y.

3° Démontrer que T transforme une droite (U) en une droite (V). Donner une détermination géométrique simple de (V) lorsque (U) est donnée.

4° Démontrer que T transforme un cercle (K), de centre A et de rayon k ($k > 0$), en une conique, (C), dont on discutera le genre, suivant les valeurs de k.

Mettre en place les foyers, les sommets et les asymptotes de la conique correspondant à $k = \sqrt{2}$.

(Bacc. Israël, 1962).

CHAPITRE 29

TRANSFORMATION PAR POLAIRES RÉCIPROQUES (GÉOMÉTRIE PLANE)

1. Définition.

Étant donné un cercle (O) d'un plan, à tout point P de ce plan (sauf le centre O) on peut faire correspondre une droite du plan, polaire de ce point par rapport au cercle (O), et à toute droite (Δ) du plan (sauf les droites passant par le centre), on peut faire correspondre un point P, pôle de cette droite (Δ) par rapport à (O).

Cette transformation est dite **transformation par polaires réciproques.**

Le cercle (O) est le **cercle directeur** de la transformation.

On remarquera que cette transformation n'est pas une transformation ponctuelle.

2. Propriétés.

1° **Cette transformation est involutive.** En effet, à un point P du plan associons la polaire de P par rapport à un cercle (O). Dans la transformation par polaires réciproques par rapport au cercle (O), à la droite (Δ) correspond le point P (réciprocité polaire).

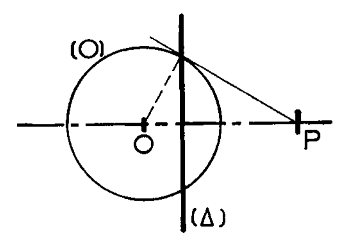


Fig. 2 a.

Ainsi à toute figure (F) du plan, formée de points et de droites, correspond une figure (F′) formée de droites et de points et réciproquement, à la figure (F′) correspond, dans la même transformation, la figure (F).

2° *A toute propriété de la figure* (F) *correspond une propriété de la figure* (F′). On dit que ces propriétés sont **corrélatives.**

Ainsi, en vertu de la réciprocité polaire :

a) **à trois points de (F) alignés sur une droite (D) correspondent trois droites de (F′) concourantes au pôle de (D).**

b) **à trois droites de (F) concourantes en un point P, correspondent trois points de (F′) alignés sur la polaire de P.**

Ce procédé permet d'établir certaines propriétés.

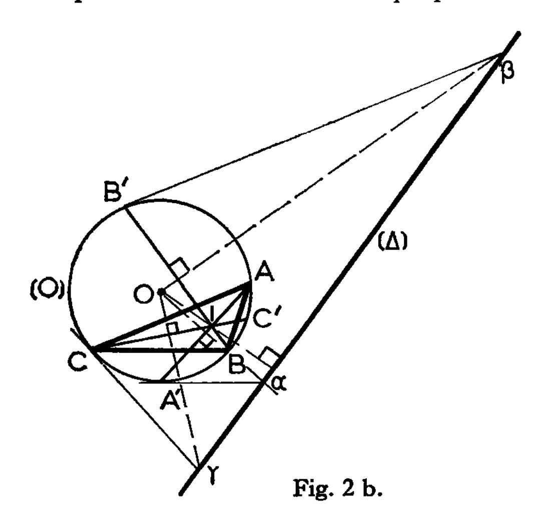


Fig. 2 b.

Exemple. *Transformer par polaires réciproques la propriété des bissectrices d'un triangle d'être concourantes.*

Soient ABC un triangle, (O) son cercle circonscrit, AA′, BB′ et CC′ les trois bissectrices de ce triangle, I leur point de concours.

Prenons (O) comme cercle directeur de la transformation.

La bissectrice AA′ a pour pôle le point de concours α des tangentes au cercle en A et A′ ; de même BB′ a pour pôle le point de concours β des tangentes en B et B′ et CC′ a pour pôle γ, point de concours des tangentes en C et C′.

AA′, BB′, CC′ concourant au point I, α, β, γ sont alignés sur la polaire (Δ) de I par rapport à (O).

D'où la proposition :

Étant donné un cercle (O), *trois points* A, B *et* C *sur ce cercle,* A', B' *et* C' *les milieux des arcs* BC, CA *et* AB, *les tangentes en* A *et* A', B *et* B', C *et* C' *se coupent en trois points alignés.*

3. Transformée d'une division harmonique.

Soient quatre points A, B, C, D d'une droite (Δ) formant une division harmonique. Dans la transformation par polaires réciproques de cercle directeur (O), les points A, B, C, D se transforment en des droites (*a*), (*b*), (*c*), (*d*) respectivement perpendiculaires à OA, OB, OC, OD et passant par le pôle P de (Δ).

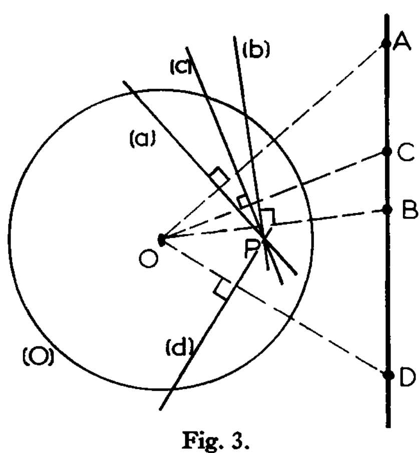


Fig. 3.

Dans la translation de vecteur $\overrightarrow{OP}$ suivie de la rotation (P, $+\pi/2$), le faisceau harmonique (O, ABCD) se transforme en le faisceau de droites (P, *abcd*).

Le faisceau (P, *abcd*) est donc harmonique.

Théorème. — ***La transformée par polaires réciproques d'une division harmonique est un faisceau harmonique et réciproquement.***

4. Transformée d'une courbe.

a) Remarques préliminaires.

1° On peut considérer une courbe (Γ) comme l'ensemble de ses points ou, *si elle admet une tangente en chacun de ses points*, comme l'enveloppe de ses tangentes.

Exemple : un cercle est l'ensemble des points équidistants d'un point fixe ou l'enveloppe d'une droite dont la distance à un point fixe est constante.

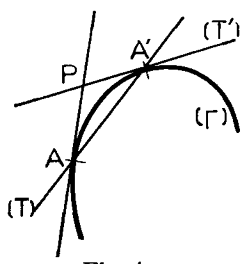


Fig. 4 a.

2° Soient A un point d'une courbe (Γ) (ayant une tangente en A) et A′ un point voisin de A sur (Γ), si A′ tend vers A, la sécante AA′ tend vers la tangente en A.

Nous admettrons la propriété suivante : si (T) est la tangente en A et (T′) la tangente en un point voisin A′, le point P commun à (T) et (T′) tend vers A lorsque (T′) tend vers (T).

b) ***Transformée d'une courbe par polaires réciproques.***

1° Définition.

Soit une transformation par polaires réciproques de cercle directeur (O).

Si un point A décrit une courbe (Γ), sa polaire (a) reste tangente à une courbe (γ) qui est dite transformée de (Γ).

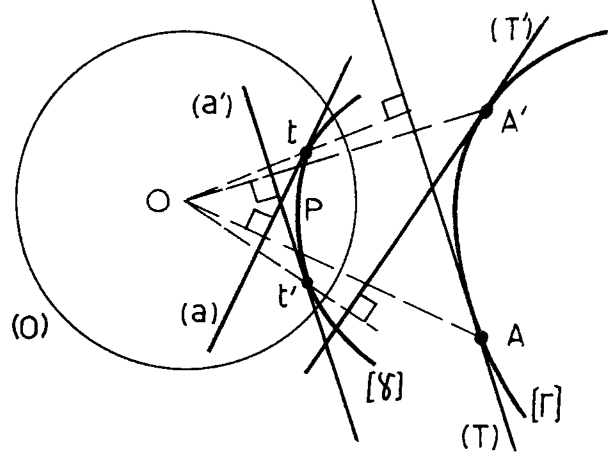


Fig. 4 b.

2° Propriétés réciproques de (γ) et (Γ).

Soient A′ un point de (Γ) voisin de A, (*a*′) sa polaire. (*a*) et (*a*′) se coupent en P, par réciprocité polaire, la polaire de P est la droite AA′.

Si A′ tend vers A en restant sur la courbe (Γ), la sécante AA′ tend vers la tangente AT à (Γ), (*a*′) tend vers (*a*) et le point P tend vers *t* point de contact de (*a*) et (γ) [remarque n° 2]. *t est donc le pôle de la position limite de* AA′, *c'est-à-dire* AT.

(Γ) est donc l'enveloppe des polaires (T) des points t de (γ). Les courbes (Γ) et (γ) sont donc réciproques. Elles sont appelées *courbes polaires réciproques par rapport au cercle directeur.* Chacune d'elles peut-être considérée comme étant :

α) ***l'ensemble des pôles des tangentes à l'autre,***

β) ***l'enveloppe des polaires des points de l'autre.***

Les problèmes relatifs aux points (ou tangentes) de (γ) se ramènent à des problèmes relatifs aux tangentes (ou points) de (Γ).

5. Conservation du contact.

On appelle **élément de contact** d'une courbe, l'ensemble d'un point de la courbe et de sa tangente en ce point.

La transformation par polaires réciproques transforme un élément de contact de (Γ) en un élément de contact de (γ).

Soient deux courbes tangentes (Γ) et (Γ'). Leur élément de contact commun, se transforme en un élément de contact commun à (γ) et (γ') transformées de (Γ) et (Γ').

Théorème. — ***La transformation par polaires réciproques conserve le contact.***

6. Recherche de la transformée d'une courbe.

1° Un point A décrivant (Γ), la courbe (γ) polaire réciproque de (Γ) par rapport au cercle directeur (O, R) est l'ensemble des pôles t des tangentes AT à (Γ).

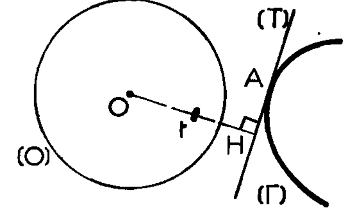


Fig. 6 a.

Soit H la projection de O sur (T). On a :

$$\overline{Ot}.\overline{OH} = R^2.$$

L'ensemble (Γ') *décrit par* H *ayant été défini,* (γ) *est donc l'inverse de* (Γ') *dans l'inversion* (O, R²).

2° Un point A décrivant (Γ), la courbe (γ) polaire réciproque de (Γ) par rapport au cercle directeur (O, R) est l'enveloppe des polaires (a) de A.

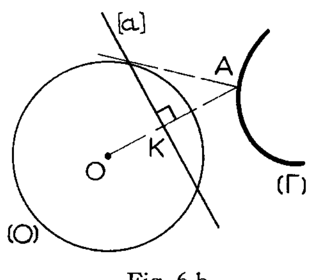


Fig. 6 b.

(*a*) est perpendiculaire en K à OA et on a :

$$\overline{OK}.\overline{OA} = R^2.$$

L'ensemble (Γ'') décrit par K est donc l'inverse de (Γ) dans l'inversion (O, R^2).

(γ) *apparait donc comme l'enveloppe d'un côté* (*a*) *d'un angle droit dont le sommet décrit une courbe* (Γ'') *et dont l'autre côté passe par un point fixe* O.

EXERCICES

457. Dans une transformation par polaires réciproques quelle est la figure transformée d'un triangle conjugué par rapport au cercle directeur de la transformation ?

458. Dans une transformation par polaires réciproques quel est le transformé du cercle directeur de la transformation ? d'un cercle concentrique au cercle directeur ?

459. Les médianes d'un triangle sont concourantes.

Transformer cette propriété par polaires réciproques en prenant pour cercle directeur le cercle circonscrit au triangle.

460. Transformer par polaires réciproques la propriété de la droite de Simson.

461. On désigne par (γ) et (γ') les courbes polaires réciproques d'une même courbe (Γ) par rapport aux cercles directeurs concentriques (O, R) et (O, R'). Montrer que (γ) et (γ') se correspondent dans une transformation simple.

462. I. Dans un plan rapporté à un repère orthonormé $x'Ox$, $y'Oy$ on donne : le cercle (O) de centre O et de rayon R, un point fixe P(α, β) et un point quelconque P'(X, Y).

Montrer que P et P' sont conjugués par rapport au cercle (O), si, et seulement si $\vec{OP}.\vec{PO'} = R^2$. En déduire l'équation de la polaire de P par rapport au cercle (O).

II. On considère la courbe (E) d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (a et b : longueurs données) et un point $M_0(x_0, y_0)$ de cette courbe.

a) Établir l'équation de la tangente en M_0 à la courbe (E).

b) Déterminer, en fonction de x_0, y_0, a, b, R les coordonnées α et β du pôle P de cette tangente par rapport au cercle (O).

c) Dans la transformation par polaires réciproques de cercle directeur (O), quelle est la transformée de la courbe E ?

Faire la figure dans le cas : R = 4, a = 4, b = 2.

QUATRIÈME PARTIE

Les Coniques

CHAPITRE 30

LES CONIQUES. DÉFINITION PROPRIÉTÉS ÉLÉMENTAIRES

DÉFINITIONS

1. Définition de l'ellipse.

On appelle ellipse l'ensemble des points M du plan, centres des cercles (M) tangents à un cercle donné (F′) et passant par un point F intérieur au cercle (F′).

Le cercle (F′) est le cercle directeur relatif au foyer F′, on désigne son rayon par $2a$.

Les points F et F′ sont les foyers de l'ellipse ; on désigne la longueur FF′ par $2c$.

F étant intérieur au cercle (F′), on aura $2c < 2a$.

Les segments MF et MF′ sont les rayons vecteurs du point M.

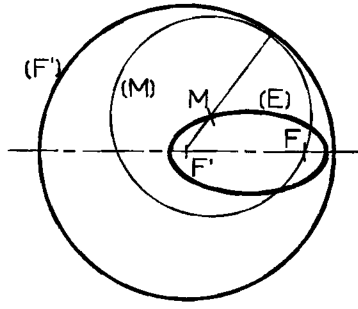


Fig. 1 a.

Le rapport $e = \frac{c}{a}$ est l'exentricité de l'ellipse ($e < 1$)

Définition de l'hyperbole.

On appelle hyperbole l'ensemble des points M du plan, centres des cercles (M) tangents à un cercle donné (F′) et passant par un point F extérieur au cercle (F′).

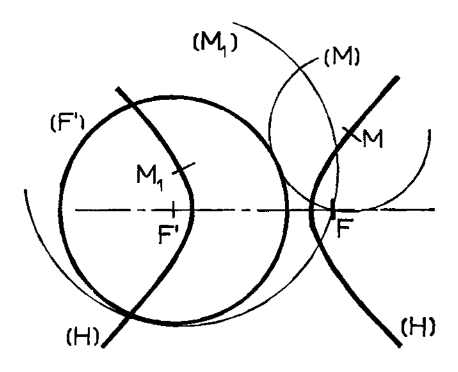


Fig. 1 b.

Le cercle (F′) est le cercle directeur relatif au foyer F′, on désigne son rayon par $2a$.

Les points F et F′ sont les foyers de l'hyperbole ; on désigne la longueur FF′ par $2c$.

F étant extérieur au cercle (F′), on aura $2c > 2a$.

Les segments MF et MF′ sont les rayons vecteurs du point M.

Le rapport $e = \frac{c}{a}$ est l'excentricité de l'hyperbole ($e > 1$)

Définition de la parabole.

On appelle parabole l'ensemble des points M du plan, centres des cercles (M) tangents à une droite donnée (D) et passant par un point donné, F, hors de cette droite.

La droite (D) est la directrice.

Le point F est le foyer.

La distance, p, du foyer à la directrice est le paramètre.

Le segment MF est le rayon vecteur du point M.

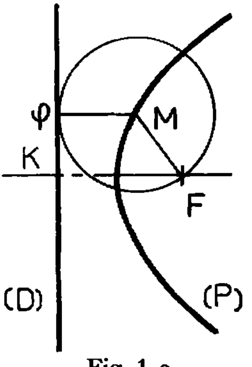


Fig. 1 c.

Coniques. Les trois courbes que nous venons de définir sont désignées sous le nom général de coniques. L'étude ultérieure justifiera ce terme en montrant qu'elles peuvent être obtenues en coupant une surface conique par un plan convenablement choisi.

Les trois définitions précédentes peuvent se mettre sous une forme unique :

On appelle conique l'ensemble des centres des cercles passant par un point donné (foyer) et tangents à une droite (directrice) ***ou à un cercle*** (cercle directeur) ***donné.***

Si le foyer est un point de la directrice ou du cercle directeur, il est évident que la conique se réduit à une droite.

Si le foyer est au centre du cercle directeur, la conique est un cercle.

2. Construction d'un point de l'ellipse.

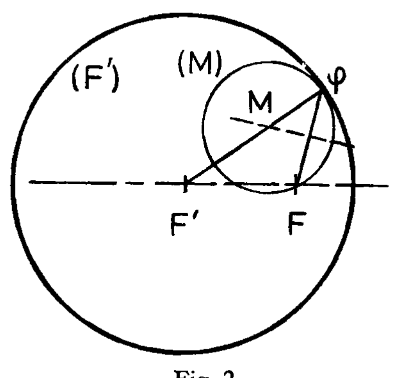


Fig. 2.

Pour qu'un cercle (M) passe par F et soit tangent en φ au cercle (F'), il faut et il suffit que :

1) M, F' et φ soient alignés.

2) MF = Mφ.

Le point M cherché est donc l'intersection de la droite F'φ et de la médiatrice de Fφ.

Si ces droites étaient parallèles, les droites F'φ et φF seraient perpendiculaires donc φF serait tangente en φ au cercle (F'), ce qui est impossible car F est intérieur au cercle (F').

A tout point φ du cercle (F') il correspond donc un point M et un seul de l'ellipse.

Cette construction établit l'existence d'ellipses ; elle montre également que toute droite passant par le foyer F' coupe l'ellipse en deux points et en deux points seulement.

3. Propriété caractéristique des points de l'ellipse.

Dans la construction précédente, le point F étant intérieur au cercle (F'), le cercle (M) est lui-même intérieur à (F'). Ces cercles sont tangents à la condition nécessaire et suffisante que la distance des centres soit égale à la différence des rayons, c'est-à-dire :

$$F'M = 2a - MF$$

soit

$$\boxed{MF + MF' = 2a}$$

Réciproquement, soit un point M tel que $MF + MF' = 2a$: cette relation suppose $MF' + MF \geqslant FF'$.

1) $MF' + MF = FF'$ est vérifié si, et seulement si, M appartient au segment FF'.

2) $MF' + MF > FF'$ étant vérifié, (c'est-à-dire $FF' < 2a$) le point F est intérieur au cercle (F') de centre F' et de rayon $2a$.

La relation donnée s'écrit $MF' = 2a - MF$, ce qui montre que le cercle de centre M et de rayon MF est tangent au cercle de centre F' et de rayon $2a$ (forme $d = R - R'$).

Le point M appartient donc à l'ellipse de foyers F et F' et de cercle directeur (F').

L'ensemble des points du plan dont la somme des distances à deux points fixes F et F' est constante, est une ellipse de foyers F et F'.

On aurait démontré de la même façon que le point M est le centre d'un cercle passant par F' et tangent au cercle de centre F et de rayon $2a$, ce qui permet d'énoncer :

Une ellipse admet deux cercles directeurs égaux et les deux foyers jouissent de propriétés analogues.

4. Construction d'un point de l'hyperbole.

Pour qu'un cercle (M) passe par F et soit tangent en φ au cercle (F'), il faut et il suffit que :

1) M, F' et φ soient alignés.

2) $MF = M\varphi$.

Le point M cherché est donc l'intersection de la droite $F'\varphi$ et de la médiatrice de $F\varphi$.

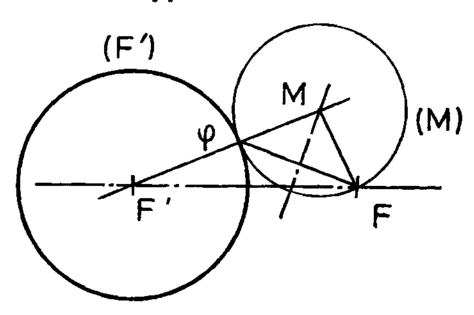
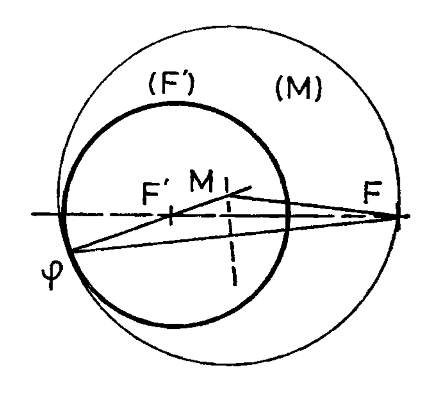


Fig. 4 a.

En général ces deux droites sont sécantes et déterminent un point M unique correspondant à un point φ.

Ces deux droites sont parallèles (et M est rejeté à l'infini) si $F'\varphi$ et $F\varphi$ sont perpendiculaires, donc si $F\varphi$



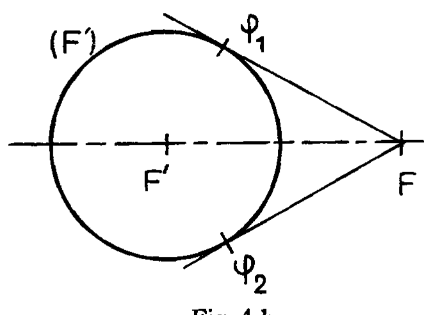


Fig. 4 b.

est tangente en φ au cercle (F').

Les points de contact des tangentes issues de F divisent le cercle (F') en deux arcs $\varphi_1\varphi_2$. Si φ est sur le petit arc $\varphi_1\varphi_2$, il est intérieur au cercle de diamètre FF', donc l'angle $F'\varphi F$ est obtus : F et F' sont alors de part et d'autre de la tangente à (F') en φ, ce qui montre que les cercles (F') et (M) sont tangents extérieurement.

Inversement, les cercles sont tangents intérieurement si φ est sur le grand arc $\varphi_1\varphi_2$.

5. Propriété caractéristique des points de l'hyperbole.

Dans la construction précédente, si les cercles (M) et (F') sont tangents extérieurement, le point de contact φ est entre M et F' et :

$$MF' - M\varphi = F'\varphi$$

soit, avec $M\varphi = MF$: $MF' - MF = 2a.$

Si les cercles (M) et (F') sont tangents intérieurement le cercle (M) est extérieur au cercle (F') puisqu'il contient le point F extérieur au cercle (F'), donc les rayons vérifient l'inéquation :

$$M\varphi > F'\varphi.$$

M et F' étant d'un même côté du point de contact φ, on aura donc : $M\varphi - MF' = F'\varphi$

soit, avec $MF = M\varphi$ $MF - MF' = 2a.$

Dans les deux cas, le résultat peut s'écrire :

$$\boxed{|MF - MF'| = 2a}$$

Réciproquement si $MF' - MF = 2a$ ou $MF' = MF + 2a$ le cercle de centre M et de rayon MF est tangent extérieurement au cercle de centre F' et de rayon $2a$ (forme $d = R + R'$).

Si : $MF - MF' = 2a$

ou $$MF' = MF - 2a$$
le cercle de centre M et de rayon MF est tangent intérieurement au cercle de centre F′ et de rayon $2a$ (forme $d = R - R'$).

Dans les deux cas, M appartient à l'hyperbole de foyers F et F′ et de cercle directeur (F′).

L'ensemble des points du plan dont la différence des distances à deux points fixes F et F′ est constante, est une hyperbole de foyers F et F′.

On aurait démontré de la même façon que M est centre d'un cercle passant par F′ et tangent au cercle de centre F et de rayon $2a$, donc :

l'hyperbole admet deux cercles directeurs égaux et les deux foyers jouissent de propriétés analogues.

6. Construction d'un point de la parabole.

Pour qu'un point M soit le centre d'un cercle passant par F et tangent en φ à la droite (D), il faut et il suffit que :

1) M soit sur la droite (Δ) perpendiculaire à (D) en φ.

2) MF = Mφ.

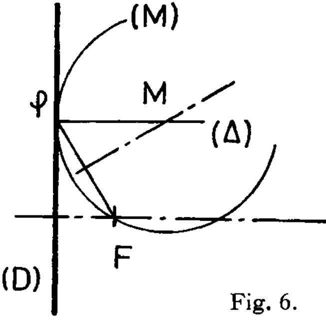


Fig. 6.

Le point M est donc l'intersection de (Δ) et de la médiatrice de Fφ. Ces deux droites sont sécantes puisqu'elles sont respectivement perpendiculaires aux droites (D) et Fφ sécantes.

A tout point φ, $φ \in (D)$, il correspond donc un point M de la parabole, et un seul.

Cette construction établit l'existence de paraboles.

Propriété caractéristique des points de la parabole.

Un cercle (M) passant par F est tangent à une droite (D) si, et seulement si, son centre est équidistant du point F et de la droite (D). On peut donc énoncer :

L'ensemble des points équidistants d'un point donné F et d'une droite donnée (D) est la parabole de foyer F et de directrice (D).

7. Seconde construction d'un point de l'ellipse.

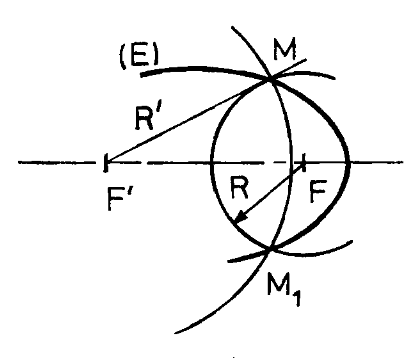


Fig. 7.

On donne les foyers F et F' et la longueur $2a$. ($FF' = 2c < 2a$).

Construisons deux cercles :

l'un de centre F et de rayon R quelconque ;

l'autre de centre F' et de rayon $R' = 2a - R$.

Si M est un point commun aux deux cercles, on aura :

$$MF + MF' = R + R' = 2a$$

ce qui montre que le point M appartient à l'ellipse.

Les deux cercles ont des points communs si :

$$|R' - R| \leqslant FF' \leqslant R + R'.$$

L'inéquation $FF' \leqslant R + R'$ ou $FF' \leqslant 2a$ est vérifiée quel que soit R.

Si l'on désigne par R' le plus grand rayon :

$|R' - R| \leqslant FF'$ devient : $(2a - R) - R \leqslant 2c$

soit : $a - c \leqslant R$

la construction est donc possible pour :

$$\boxed{(a - c) \leqslant R \dots R' \leqslant (a + c)}$$

8. Seconde construction d'un point de l'hyperbole.

On donne les foyers F et F' et la longueur $2a$ ($FF' = 2c < 2a$).

Construisons le cercle de centre F et de rayon R quelconque et le cercle de centre F' et de rayon $R' = 2a + R$.

Si M est un point commun aux deux cercles, on aura :

$\text{MF}' - \text{MF} = (2a + \text{R}) - \text{R} = 2a$

ce qui montre que le point M appartient à l'hyperbole.

Les deux cercles ont des points communs si :

$\text{R}' - \text{R} \leqslant \text{FF}' \leqslant \text{R} + \text{R}'.$

La condition

$$\text{R}' - \text{R} \leqslant \text{FF}'$$

ou $2a \leqslant 2c$ est vérifiée $\forall \text{R}$.

Fig. 8.

La condition $\text{FF}' \leqslant \text{R} + \text{R}'$ ou $2c \leqslant \text{R} + (\text{R} + 2a)$ devient

$$c - a \leqslant \text{R}.$$

La construction pourrait aussi se faire avec $\text{R} = 2a - \text{R}'$ et la condition de possibilité serait $c - a \leqslant \text{R}'$.

9. Seconde construction de la parabole.

On donne la directrice (D) et le foyer F.

Menons une droite (Δ) parallèle à (D) et à une distance quelconque, $\text{KG} = d$, de celle-ci, puis le cercle de centre F et de rayon d.

Si M est un point commun à la droite (Δ) et au cercle, il est équidistant de (D) et de F donc appartient à la parabole.

Le cercle coupe la droite (Δ) si $\text{FG} < d$

ou $\text{FG} < \text{KG}$

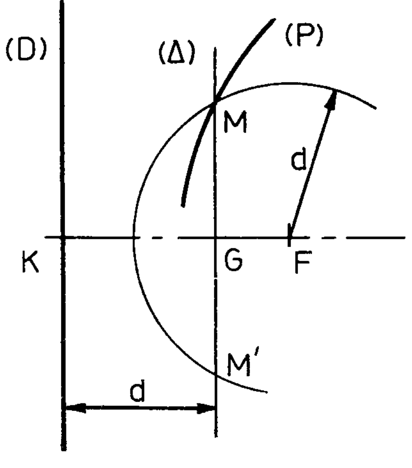


Fig. 9.

vérifié si, et seulement si, F et G sont d'un même côté de la médiatrice de KF. Il y a alors deux points M.

Si FG = KG, la construction donne un seul point qui est le milieu de KF. Ce point est appelé sommet de la parabole.

10. Tracé continu des coniques.

a) Tracé continu de l'ellipse.

On donne les foyers F et F′ et la longueur $2a$.

On utilise un fil souple de longueur $2a$ dont les extrémités sont fixées en F et F′ et l'on tend le fil à l'aide d'une pointe à tracer, M, mobile.

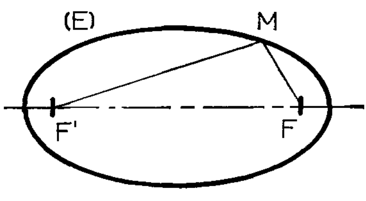


Fig. 10 a.

Quelle que soit la position de M, on aura :

$$MF + MF' = 2a.$$

La pointe M décrit donc l'ellipse de foyers F et F′.

b) Tracé continu d'un arc d'hyperbole.

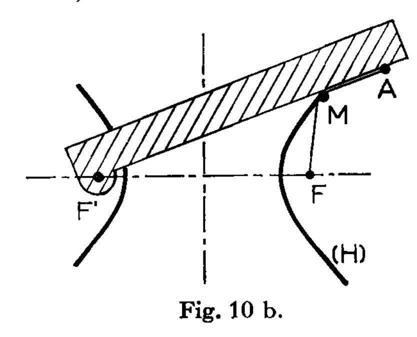


Fig. 10 b.

On donne les foyers F et F′ et la longueur $2a$.

Les extrémités d'un fil de longueur l sont fixées l'une au foyer F, l'autre en un point A d'une règle pouvant tourner autour du foyer F′.

Le point A est choisi de sorte que $AF' = l + 2a$.

Une pointe à tracer, M, appuyée contre la règle, maintient le fil tendu au cours de la rotation. Quelle que soit la position de la règle, on aura :

$$\begin{cases} AM + MF = l \\ AF' \qquad = l + 2a \end{cases}$$

par soustraction $$(AF' - AM) - MF = 2a$$

soit $$MF' - MF = 2a$$

ce qui montre que le point M appartient à l'hyperbole.

On obtient un arc de la seconde branche de l'hyperbole en fixant le fil en F′ et en faisant tourner la règle autour du point F.

c) **Tracé continu d'un arc de parabole.**

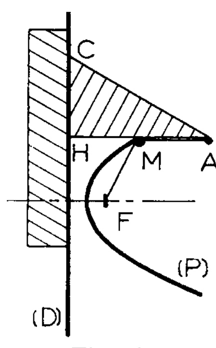


Fig. 10 c.

On donne la directrice (D) et le foyer F.

Une équerre AHC, placée comme l'indique la figure, coulisse contre une règle fixée le long de la directrice.

Une extrémité d'un fil de longueur $l = \text{AH}$ est fixée au foyer F, l'autre au sommet A de l'équerre. Une pointe à tracer, M, appuyée contre l'équerre maintient constamment le fil tendu. Quelle que soit la position de l'équerre, on aura :

$$\text{FM} + \text{MA} = \text{HM} + \text{MA} = l$$

donc :

$$\text{MF} = \text{MH}$$

ce qui montre que le point M appartient à la parabole.

11. Symétries — Éléments remarquables de l'ellipse.

Soit M un point quelconque de l'ellipse, on sait que

$$\text{MF} + \text{MF}' = 2a$$

son symétrique M_1 par rapport au milieu O de FF′ est tel que

$\text{M}_1\text{F} = \text{MF}'$ et $\text{M}_1\text{F}' = \text{MF}$

donc : $\text{M}_1\text{F} + \text{M}_1\text{F}' = 2a$

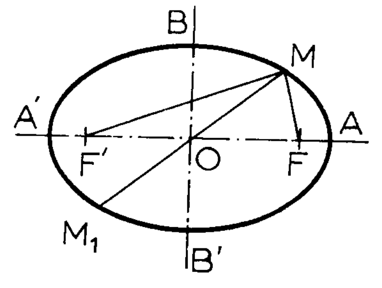


Fig. 11 a.

ce qui montre que le point M_1 appartient aussi à l'ellipse et que le point O est centre de symétrie de l'ellipse.

On montre de la même façon que l'ellipse admet deux axes de symétrie :

la droite FF′ appelée axe focal ;

la médiatrice de FF′ appelée axe non focal.

Les points communs à l'ellipse et aux axes sont appelés sommets.

Remarquons qu'aucun point du ***segment*** FF′ n'appartient à l'ellipse, car :

$$M \in F'F \Rightarrow F'M + MF = 2c < 2a.$$

A étant un point commun à l'ellipse et à l'axe focal on aura, en orientant F′F :

$$\overline{F'A} + \overline{FA} = 2a$$

ou $$\overline{F'O} + \overline{OA} + \overline{FO} + \overline{OA} = 2a$$

soit, avec $$\overline{F'O} = -\overline{OF}, \qquad \overline{OA} = a$$

et par symétrie : $$\overline{OA'} = -a$$

l'ellipse coupe l'axe focal en deux points ou sommets notés A′ et A. La longueur A′A = $2a$ est appelée longueur du grand axe.

Le cercle de centre F et de rayon a coupe l'axe non focal en deux points B et B′ qui appartiennent à l'ellipse, car

BF = BF′ $= a \Rightarrow$ BF + BF′ = $2a$.

On pose OB = OB′ = b. La longueur B′B = $2b$ est appelée longueur du petit axe.

Dans le triangle rectangle BOF on aura : $OB^2 = BF^2 - OF^2$

soit $$\boxed{b^2 = a^2 - c^2}.$$

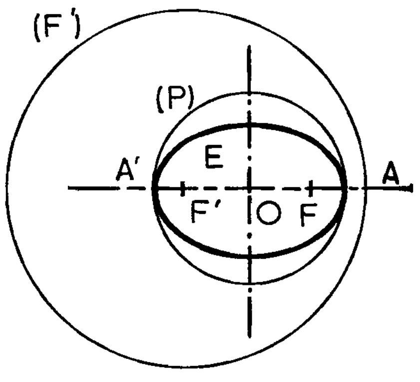


Fig. 11 b.

Le cercle de centre O et de rayon a est appelé cercle principal de l'ellipse.

La relation $\overrightarrow{FF'} = 2\,\overrightarrow{FO}$ montre que le cercle principal (O, a) est l'homologue du cercle directeur (F′, $2a$) dans l'homothétie de centre F et de rapport $\frac{1}{2}$.

12. Symétries et éléments remarquables de l'hyperbole.

Soit M un point quelconque de l'hyperbole, on sait que

$$|MF - MF'| = 2a.$$

Son symétrique M_1 par rapport au milieu O de FF' est tel que

$M_1F = MF'$ et $M_1F' = MF$

donc $|M_1F' - M_1F| = 2a$

ce qui montre que le point M_1 appartient aussi à l'hyperbole et que le point O est centre de symétrie de l'hyperbole.

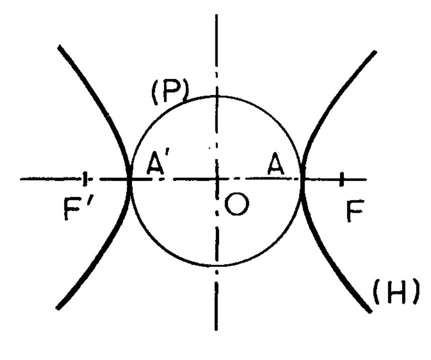


Fig. 12 a.

On montre de la même façon que l'hyperbole admet deux axes de symétrie :

la droite FF' appelée axe focal ou axe transverse ;

la médiatrice de FF' appelée axe non focal.

Les points communs à l'hyperbole et à l'axe focal sont appelés sommets.

Remarquons qu'aucun point de l'axe non focal n'appartient à l'hyperbole puisque pour ces points $MF' - MF = 0$.

Il existe deux points A et A', communs à l'hyperbole et à l'axe focal, et tels que $OA = OA' = a$.

En effet, en orientant FF' on aura :

$$\overline{F'A} - \overline{AF} = (\overline{OA} - \overline{OF'}) - (\overline{OF} - \overline{OA}) = 2\,\overline{OA} = 2a.$$

$$\overline{F'A'} - \overline{A'F} = (\overline{OA'} - \overline{OF'}) - (\overline{OF} - \overline{OA'}) = 2\,\overline{OA'} = -2a.$$

Le cercle de centre O et de rayon a est appelé cercle principal de l'hyperbole.

La relation $\overrightarrow{FF'} = 2\,\overrightarrow{FO}$ montre que le cercle principal (O, a) est l'homologue du cercle directeur (F', $2a$) dans l'homothétie de centre F et de rapport $\frac{1}{2}$.

Les ellipses et les hyperboles qui seules possèdent un centre de symétrie sont désignées sous le nom général de coniques à centre (on dit aussi coniques bifocales).

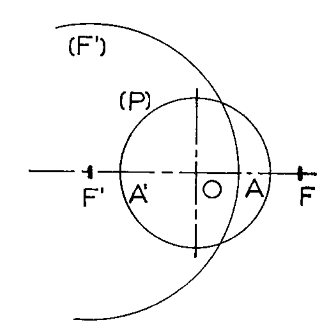


Fig. 12 b.

13. Symétrie de la parabole.

La droite passant par le foyer et perpendiculaire à la directrice est axe de symétrie de la parabole puisqu'elle est axe de symétrie pour les éléments (foyers et directrice) qui servent à définir la parabole. Cette droite est appelée axe de la parabole. Il existe sur l'axe un point unique de la parabole (n° 9) ce point est le sommet de la parabole.

La parabole ne possède aucune autre symétrie.

EXERCICES

463. La grande base AB d'un trapèze ABCD reste fixe, la petite base CD garde une longueur constante et la somme des longueurs des côtés non parallèles reste constante.

1° Ensemble des points C et D.

2° Ensemble des points I intersection des diagonales AC et BC.

3° Ensemble des points J intersection des côtés non parallèles AD et BC.

4° Reprendre les mêmes questions en supposant que la différence des longueurs des côtés non parallèles reste constante.

464. Ensemble des centre ω des cercles tangents à deux cercles (O) et (O') donnés.

Examiner les divers cas possibles suivant les positions relatives des cercles (O) et (O') et la nature du contact du cercle (ω) avec les cercles (O) et (O').

465. Ensemble des centres ω des cercles tangents à un cercle fixe (O) et à une droite fixe (D). Examiner les divers cas possibles suivant la nature du contact.

466. Ensemble des points M dont la somme des distances à un point fixe A et à une droite fixe (D) est égale à une longueur donnée l.

Ensemble des points N dont la différence des distances au point fixe A et à la droite fixe (D) est égale à l.

467. On donne un cercle fixe (O) et une droite fixe (D). Déterminer à l'aide d'une inversion l'enveloppe des cercles (ω) orthogonaux à (O) et tangents à (D).

Ensemble des centres ω.

468. On donne sur une droite fixe (D) trois points fixes A, B, C et l'on appelle (γ) tout cercle tangent à la droite (D) en A ; les tangentes aux cercles (γ) issues de B et C (distinctes de D) se coupent en M.

Montrer que l'ensemble des points M est une conique.

Discuter suivant les positions relatives de A, B, et C.

469. Un cercle variable (ω) orthogonal à deux cercles fixes (O) et (O′) les coupe respectivement aux points A et B, A′ et B′ ; les rayons OA et OB coupent O′A′ et O′B′ en M, N, P et Q.

Ensemble des points M, N, P et Q.

470. On donne un cercle fixe (O) et un point M mobile sur la tangente en A à ce cercle. Par le point M, on mène la seconde tangente MB à ce cercle et la parallèle à OA qui recoupe la droite OB en P.

Montrer que l'ensemble des points P est une parabole.

471. Un point M décrit l'hypoténuse d'un triangle rectangle isocèle OAB (OA = OB). Le point M se projette orthogonalement en D sur OA, en E sur OB et la bissectrice de l'angle EMD coupe en P la droite DE.

Montrer que l'ensemble des points P est un arc de parabole.

472. On donne dans un cercle (O) deux diamètres perpendiculaires AA′ et BB′. Un point M décrit le cercle (O). Par N, intersection de MB et AA′, on mène NP perpendiculaire à AA′ qui recoupe OM en P.

Montrer que l'ensemble des points P est une parabole.

473. On donne un cercle fixe (O) deux diamètres perpendiculaires AA′ et BB′. Un point M mobile sur (O) se projette en P sur BB′.

Montrer que l'ensemble des points N communs aux droites OM et AP est une parabole.

474. On donne sur une droite (D) deux points fixes A et B et l'on appelle (C) les cercles tangents à (D) en A. La tangente à un cercle (C) (distincte de D) menée par B, recoupe en M la tangente à (C) parallèle à (D).

Montrer que l'ensemble des points M est une parabole.

475. Déterminer les points communs à deux ellipses (E_1) et (E_2) qui ont un foyer F′ commun, même longueur du grand axe, $2a$, et pour second foyer F_1 et F_2 respectivement.

476. Ensemble des foyers des ellipses (E) passant par un point donné M et admettant un cercle donné (O, a) pour cercle principal.

Ensemble des foyers des hyperboles (H) passant par un point donné M et admettant pour cercle principal un cercle donné.

477. Ensemble des foyers F′ et des centres des hyperboles admettant pour second foyer un point donné F et passant par deux points donnés M_1 et M_2.

478. Construire le cercle directeur (F′) d'une conique dont on donne :

1° le foyer F, un point M, les longueurs a et b ;

2° le foyer F, un sommet A et un point M.

479. On donne un triangle ABC. Montrer que l'ensemble des points D tels que le quadrilatère ABCD puisse être circonscrit à un cercle, est une hyperbole.

480. Montrer que l'ensemble des sommets M des triangles MAA′ de base AA′ fixe, et tels que la médiane MO soit moyenne proportionnelle entre les côtés MA et MA′, est une hyperbole.

CHAPITRE 31

ÉQUATION DES CONIQUES

1. Équation de la parabole.

Soit une parabole (P) de foyer F, de directrice (D) de paramètre $FK = p$, de sommet O, rapportée au repère orthonormé dont :
l'origine est le sommet O ;
l'axe $x'x$ est l'axe de symétrie orienté dans le sens $\overrightarrow{OF}$
l'axe $y'y$ est porté par la médiatrice de FK.

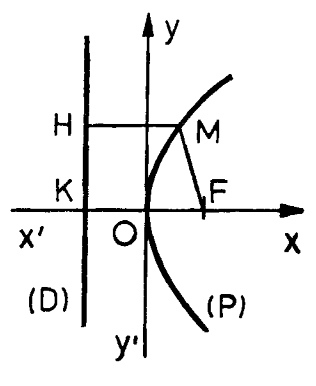


Fig. 1.

Les coordonnées du foyer sont : $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$. Un point $M(x, y)$ se projette orthogonalement sur la directrice en un point $H\left(-\frac{p}{2}, y\right)$; on aura donc :

$$\overrightarrow{MF}\left(x - \frac{p}{2}, -y\right) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{MH}\left(-\frac{p}{2} - x, 0\right)$$

Un point M appartient à la parabole à la condition nécessaire et suffisante que MF = MH, équivalente à $MF^2 = MH^2$, c'est-à-dire :

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(-\frac{p}{2} - x\right)^2$$

et, en effectuant : $\boxed{y^2 = 2px}$

Tangente au sommet.

Conservant les hypothèses précédentes, la pente de la droite OM est m :

$$|m| = \frac{|y|}{x} = \frac{\sqrt{2px}}{x} = \sqrt{\frac{2p}{x}} \quad (\text{avec } x \geqslant 0)$$

ce qui montre que $x \to 0 \Leftrightarrow |m| \to \infty$
autrement dit, si M tend vers 0 en décrivant la parabole, la droite OM tend vers une position limite qui est la perpendiculaire à $x'x$ en O. Nous énoncerons :

La parabole admet une tangente au sommet et cette tangente est perpendiculaire à l'axe de la parabole.

L'équation de la parabole rapportée à son axe de symétrie et à sa tangente au sommet est $y^2 = 2px$.

Si l'axe $x'Ox$ était orienté dans le sens $\overrightarrow{FO}$, on obtiendrait l'équation $y^2 = -2px$.
et en échangeant les axes entre eux,

soit $x^2 = 2py \Leftrightarrow y = \dfrac{x^2}{2p}$

soit $x^2 = -2py \Leftrightarrow y = -\dfrac{x^2}{2p}$

2. Calcul des rayons vecteurs de l'ellipse.

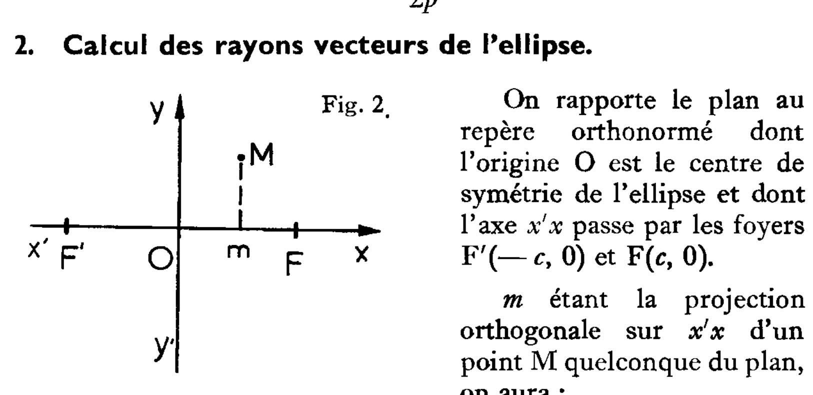


Fig. 2.

On rapporte le plan au repère orthonormé dont l'origine O est le centre de symétrie de l'ellipse et dont l'axe $x'x$ passe par les foyers $F'(-c, 0)$ et $F(c, 0)$.

m étant la projection orthogonale sur $x'x$ d'un point M quelconque du plan, on aura :

$MF'^2 - MF^2 = 2\overline{F'F} \cdot \overline{Om}$ soit : $MF'^2 - MF^2 = 4cx$.

Le point M appartient à l'ellipse si, et seulement si :

$$MF' + MF = 2a \qquad (1)$$

en divisant membre à membre, on obtient :

$$MF' - MF = \frac{2cx}{a} \qquad (2)$$

le système des équations (1) et (2) aux inconnues MF′ et MF admet pour solutions :

$$\mathbf{MF' = a + \frac{cx}{a}; \quad MF = a - \frac{cx}{a}.}$$

3. Équation de l'ellipse rapportée à ses axes.

Le triangle MmF est rectangle en m :

$$mF^2 + mM^2 = MF^2$$

donc pour tout point M de l'ellipse :

$$(c - x)^2 + y^2 = \left(a - \frac{cx}{a}\right)^2$$

en effectuant : $$\frac{x^2(a^2 - c^2)}{a^2} + y^2 = a^2 - c^2$$

on divise les deux membres par $a^2 - c^2 = b^2$ $(b \neq 0)$

et l'on obtient : $$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Réciproquement, si les coordonnées d'un point M vérifient l'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

avec $b^2 = a^2 - c^2$ on obtient :

$$y^2 = \frac{a^2 - c^2}{a^2}(a^2 - x^2) \qquad (1)$$

sachant que $a > c$, donc $a^2 - c^2 > 0$, cette équation ne peut être vérifiée que pour $a^2 - x^2 \geqslant 0$

soit pour : $$\boxed{-a \leqslant x \leqslant a}$$

On peut alors calculer MF et MF′ :

$MF^2 = mF^2 + mM^2 = (c - x)^2 + y^2$

avec (1) :

$$MF^2 = (c - x)^2 + \frac{a^2 - c^2}{a^2}(a^2 - x^2) = \left(a - \frac{cx}{a}\right)^2$$

et enfin $$MF = \left|a - \frac{cx}{a}\right|$$

de même, $MF'^2 = (c + x)^2 + y^2$

$$MF' = (c + x)^2 + \frac{a^2 - c^2}{a^2}(a^2 - x^2) = \left(a + \frac{cx}{a}\right)$$

$$MF' = \left|a + \frac{cx}{a}\right|$$

Sachant que $\frac{c}{a} < 1$ et que $|x| \leqslant a$ on aura $\left|\frac{cx}{a}\right| \leqslant a$

donc : $$MF = a - \frac{cx}{a} \quad \text{et} \quad MF' = a + \frac{cx}{a}$$

par addition : $MF + MF' = 2a$, ce qui montre que le point M appartient à l'ellipse, donc l'équation $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1}$ est l'équation de l'ellipse.

La relation (1) détermine au plus deux valeurs de y pour une valeur donnée de x, donc une perpendiculaire à l'axe focal, d'abscisse x, aura :

2 points communs avec l'ellipse si $-a < x < a$
1 seul point commun avec l'ellipse si $x = -a$ ou $x = a$
aucun point commun avec l'ellipse si $x < -a$ ou $a < x$

4. Calcul des rayons vecteurs de l'hyperbole.

On rapporte le plan à un repère orthonormé dont l'origine O est le centre de symétrie de l'hyperbole et dont l'axe $x'x$ passe par les foyers $F'(-c, 0)$ et $F(c, 0)$.

m étant la projection orthogonale sur $x'x$ d'un point M quelconque du plan, on aura :

$$MF'^2 - MF^2 = 2\overline{F'F}.\overline{Om}$$

soit :

$$MF'^2 - MF^2 = 4cx \qquad (1)$$

Fig. 4.

Un point M appartient à la **branche d'hyperbole située du côté de F** si, et seulement si :

$$MF' - MF = 2a \qquad (2)$$

en divisant membre à membre (1) et (2) :

$$MF' + MF = \frac{2cx}{a}$$

d'où les solutions du système aux inconnues MF' et MF :

$$\mathbf{MF' = a + \frac{cx}{a} \quad \text{et} \quad MF = -a + \frac{cx}{a}.}$$

Un point M appartient à la **branche d'hyperbole située du côté de F′** si, et seulement si :

$$\text{MF} - \text{MF}' = 2a \qquad \textbf{(3)}$$

en divisant membre à membre (1) et (3) :

$$\text{MF} + \text{MF}' = -\frac{2cx}{a}$$

d'où les solutions du système aux inconnues MF et MF′ :

$$\text{MF}' = -a - \frac{cx}{a} \quad \text{et} \quad \text{MF} = a - \frac{cx}{a}$$

dans les deux cas, on aura :

$$\text{MF}'^2 = \left(a + \frac{cx}{a}\right)^2 \text{ et } \text{MF}^2 = \left(a - \frac{cx}{a}\right)^2$$

On remarque que les expressions de MF'^2 et MF^2 sont communes à l'hyperbole et à l'ellipse.

5. Équation de l'hyperbole rapportée à ses axes.

Le triangle M*m*F est rectangle en *m* :

$$m\text{F}^2 + m\text{M}^2 = \text{MF}^2$$

pour tout point M de l'hyperbole on aura :

$$(c - x)^2 + y^2 = \left(a - \frac{cx}{a}\right)^2$$

en effectuant : $$\frac{x^2(a^2 - c^2)}{a^2} + y^2 = a^2 - c^2$$

en divisant les deux membres par $a^2 - c^2 = -b^2$

on obtient : $$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Réciproquement, si les coordonnées d'un point M vérifient l'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

avec $b^2 = c^2 - a^2$ on obtient :

$$y^2 = \frac{a^2 - c^2}{a^2}(a^2 - x^2) \qquad (1)$$

sachant que $a < c$ donc $a^2 - c^2 < 0$, cette équation ne peut être vérifiée que pour $a^2 - x^2 \leqslant 0$

soit pour : $x \leqslant -a$ ou $a \leqslant x$

On peut alors calculer MF et MF′ :

$$MF^2 = mF^2 + mM^2 = (c - x)^2 + y^2$$

$$MF^2 = (c - x)^2 + \frac{a^2 - c^2}{a^2}(a^2 - x^2) = \left(a - \frac{cx}{a}\right)^2$$

de même : $MF'^2 = mF^2 + mM^2 = (c + x)^2 + y^2$

$$MF' = (c + x)^2 + \frac{a^2 - c^2}{a^2}(a^2 - x^2) = \left(a + \frac{cx}{a}\right)^2$$

donc : $MF = \left|a - \frac{cx}{a}\right|$ et $MF' = \left|a + \frac{cx}{a}\right|$

dans le cas où x $\leqslant$ — a, $\frac{c}{a} > 1$ entraîne $\frac{cx}{a} < -a$

on aura $MF = a - \frac{cx}{a}$ et $MF' = -a - \frac{cx}{a}$

dans le cas où a $\leqslant$ x, $\frac{c}{a} > 1$ entraîne $\frac{cx}{a} > a$

on aura : $MF = \frac{cx}{a} - a$ et $MF' = a + \frac{cx}{a}$

dans les deux cas on aura $|MF - MF'| = 2a$ ce qui montre que le point M appartient à l'hyperbole, donc l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

est l'équation de l'hyperbole.

La relation (1) détermine au plus deux valeurs de y correspondant à une valeur de x, donc une perpendiculaire à l'axe focal, d'abscisse x, aura :

2 points communs avec l'hyperbole si $x < -a$ ou $a < x$
1 seul point commun avec l'hyperbole si $x = -a$ ou $x = a$
aucun point commun avec l'hyperbole si $-a < x < a$.

6. Asymptotes à l'hyperbole.

Soient une hyperbole (H) de centre O, FG et FG′ les tangentes au cercle directeur (F′) issues de O, (D) et (D′) les médiatrices de FG et FG′, α l'angle aigu de F′F avec (D) ou (D′). Dans le triangle FGF′ rectangle en G, on a :

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{FG}{F'G} = \sqrt{\frac{FF'^2 - F'G^2}{F'G^2}} = \sqrt{\frac{4c^2 - 4a^2}{4a^2}} = \frac{b}{a}.$$

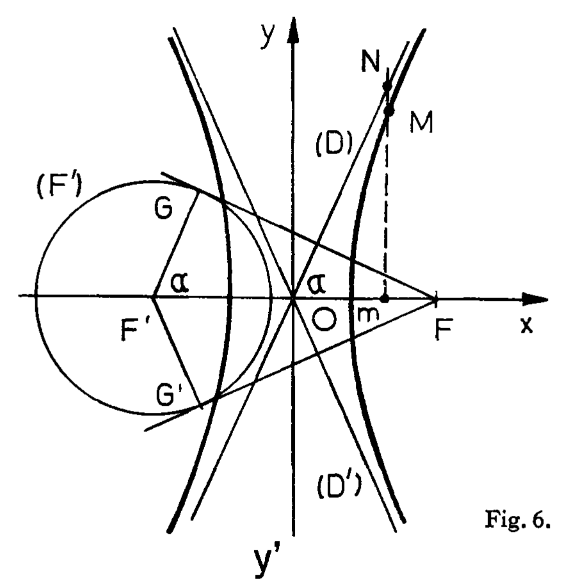


Fig. 6.

Si l'on rapporte le plan au repère orthonormé d'origine O dont l'axe $x'x$ passe par F et F', l'équation de (D) est :

$$Y = \frac{b}{a}x \qquad \text{(D)}$$

A tout x extérieur à l'intervalle $]-a, a[$ il correspond deux points, $M(x, y)$ et $M'(x, -y)$, de l'hyperbole, et un point $N(x, y)$ de la droite (D). Appelons M le point dont l'ordonnée y a même signe que Y.

$$M \in (H) \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{ou} \quad y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2) \qquad (1)$$

$$N \in (D) \Rightarrow \qquad Y^2 = \frac{b^2}{a^2}x^2 \qquad (2)$$

par différence : $\quad Y^2 - y^2 = b^2$

soit : $\quad (Y + y)(Y - y) = b^2 \qquad (3)$

$x \to \infty$ entraîne $y \to \infty$ et $Y \to \infty$ d'après les relations (1) et (2), et, puisque y et Y ont même signe, $(Y + y) \to \infty$

d'après la relation (3), on aura donc $\lim_{x\to\infty}(Y - y) = 0$ ce qui

montre que l'hyperbole (H) est asymptote à la droite (D). Par symétrie, elle est aussi asymptote à la droite (D′).

Une hyperbole est asymptote à deux droites passant par le centre et faisant avec l'axe focal un angle α tel que $tg\ \alpha = b/a$.

Les symétriques d'un foyer par rapport aux asymptotes appartiennent au cercle directeur relatif à l'autre foyer.

Propriétés des asymptotes à l'hyperbole.

Le triangle PGF′ est rectangle en G donc :

$$\cos\alpha = \frac{F'G}{F'F} = \frac{2a}{2c} \qquad \boxed{\cos\alpha = \frac{a}{c}}$$

nous avons trouvé $\boxed{tg\ \alpha = \frac{b}{a}}$

on en déduit $\sin\alpha = tg\ \alpha . \cos\alpha = \frac{b}{a}.\frac{a}{c}$ soit $\boxed{\sin\alpha = \frac{b}{c}}$.

Les asymptotes étant les médiatrices de FG et FG′, l'homothétie $\left(F, \frac{1}{2}\right)$ montre que ***les projections orthogonales du foyer sur les asymptotes appartiennent au cercle principal.***

7. Hyperbole équilatère.

On appelle hyperbole équilatère une hyperbole dont les asymptotes sont perpendiculaires.

Avec les notations déjà utilisées, on aura $\alpha = \pi/4$ puis

$$tg\ \alpha = \frac{b}{a} = 1 \Rightarrow a = b$$

$$\cos\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow c = a\sqrt{2}$$

l'excentricité est

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{2}$$

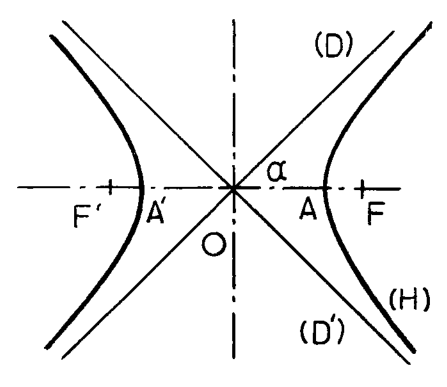


Fig. 7.

Avec $a = b$ l'équation générale $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

devient $$\boxed{x^2 - y^2 = a^2}$$

qui est l'équation de l'hyperbole équilatère rapportée à ses axes.

8. Équation de l'hyperbole équilatère rapportée à ses asymptotes.

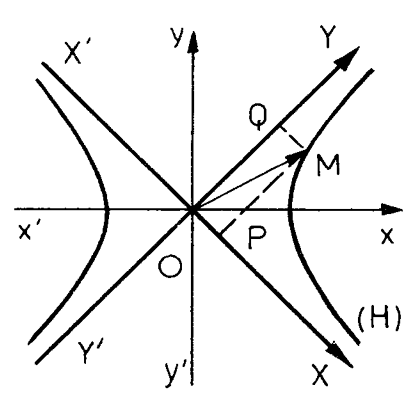


Fig. 8.

Soit l'hyperbole équilatère rapportée à un repère orthonormé $x'Ox$, $y'Oy$ dont les axes sont portés par les axes de symétrie (voir n° 5) et soit un second repère orthonormé ayant même origine O et dont les axes X'OX et Y'OY sont portés par les asymptotes de l'hyperbole de telle sorte que $(\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{Ox}) = + \pi/4$.

P et Q étant les projections orthogonales d'un point M sur les axes OX et OY, on a :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$$

Si l'on projette cette somme vectorielle successivement sur les axes $x'Ox$ et $y'Oy$, on obtient :

$$x = \overline{OP} \cos (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OX}) + \overline{OQ} \cos (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OY})$$

$$y = \overline{OP} \cos (\overrightarrow{Oy}, \overrightarrow{OX}) + \overline{OQ} \cos (\overrightarrow{Oy}, \overrightarrow{OY})$$

soit : $$x = X\frac{\sqrt{2}}{2} + Y\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$y = -X\frac{\sqrt{2}}{2} + Y\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Un point M appartient à l'hyperbole (H) si, et seulement si,

$$x^2 - y^2 = a^2$$

donc si : $$\left(X\frac{\sqrt{2}}{2} + Y\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(Y\frac{\sqrt{2}}{2} - X\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = a^2$$

et en effectuant : $$\boxed{XY = \frac{a^2}{2}}$$

cette relation est l'équation de l'hyperbole équilatère rapportée à ses asymptotes.

En orientant les axes de sorte que $(\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{Ox}) = -\pi/4$ on aurait trouvé la relation $XY = -a^2/2$.

9. Ensemble des points dont le produit des distances à deux droites perpendiculaires est constant.

P et Q étant les projections orthogonales d'un point M sur deux droites perpendiculaires (D) et (D′), la relation $PM \cdot QM = k^2$ devient, si l'on oriente les droites :

$$|\overline{PM} \cdot \overline{QM}| = k^2 \quad \text{ou} \quad xy = \pm k^2.$$

ce qui montre que l'ensemble des points M est la réunion des deux hyperboles équilatères ayant pour asymptotes les droites (D) et (D′) et pour longueur de l'axe $2a = 2k\sqrt{2}$.

10. Intérieur, extérieur d'une parabole.

Soit une parabole (P) de foyer F, de directrice (D) et une droite (Δ) parallèle à l'axe, qui coupe la parabole en M et la directrice en H. (On sait que le point M est unique).

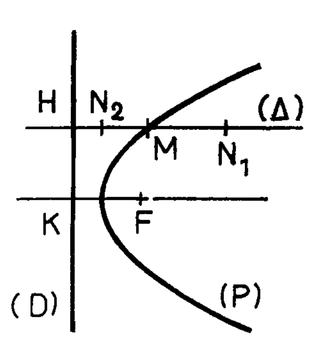


Fig. 10.

Tout point N de la droite (Δ) situé du côté opposé à H par rapport à M est appelé point **intérieur** à la parabole.

Dans ce cas on aura :

$$NM + MH = NH.$$

Le triangle NMF donne l'inéquation:

$$NF < NM + MF$$

avec $MF = MH$

$$NF < NM + MH \qquad \text{ou} \qquad \boxed{NF < NH}$$

Tout point N de la droite (Δ) situé du côté de H par rapport à M est appelé point **extérieur** à la parabole.

- si N et M sont de part et d'autre de H, la relation

$$NF > NH \text{ est évidente.}$$

- si N est entre M et H, on aura $MH - MN = NH$

le triangle NFM donne l'inéquation : $NF > MF - MN$

avec $MF = MH$: $NF > MH - MN$

ou $\boxed{NF > NH}$

En résumé il n'y a que trois possibilités :

N intérieur à la parabole	⇔	$NF < NH$
N appartient à la parabole	⇔	$NF = NH$
N extérieur à la parabole	⇔	$NF > NH$

L'ensemble des points intérieurs à la parabole est appelé région intérieure à la parabole ; l'ensemble des points extérieurs est appelé région extérieure. Un point mobile décrivant une courbe continue ne peut passer d'une région dans l'autre sans rencontrer la parabole.

11. Intérieur, extérieur de l'ellipse.

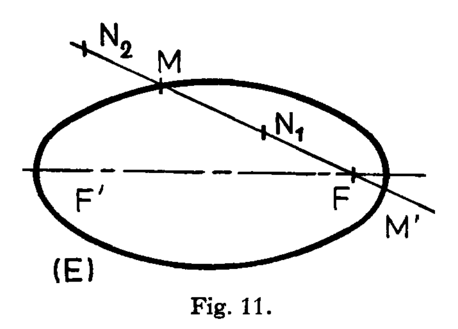


Fig. 11.

La construction de l'ellipse par points a montré que toute droite passant par le foyer a deux points communs avec l'ellipse, et seulement deux.

N étant un point quelconque du plan, soient M et M′ les points communs à la droite NF et à l'ellipse :

- si N est sur le segment MM′, il est appelé point intérieur à l'ellipse ;

- si N est extérieur au segment MM′, il est appelé point extérieur à l'ellipse.

Appelons M le point situé du côté de N par rapport à F. Les lignes brisées F′NF et F′MF donnent :

- pour un point N intérieur à l'ellipse :

$$F'N + NF < F'M + MF$$

soit $$NF' + NF < 2a$$

- pour un point N extérieur à l'ellipse :

$$F'N + NF > F'M + MF$$

soit $$NF' + NF > 2a.$$

Il n'y a donc que trois cas possibles :

N intérieur à l'ellipse	$\Leftrightarrow$	$NF' + NF < 2a$
N appartient à l'ellipse	$\Leftrightarrow$	$NF' + NF = 2a$
N extérieur à l'ellipse	$\Leftrightarrow$	$NF' + NF > 2a$

L'ensemble des points intérieurs à l'ellipse est appelé région intérieure à l'ellipse; l'ensemble des points extérieurs est appelé région extérieure à l'ellipse. Un point mobile décrivant une courbe continue ne peut passer de l'une des régions dans l'autre sans rencontrer l'ellipse.

12. Intérieur, extérieur de l'hyperbole.

Soit une hyperbole (H) et une droite (Δ) perpendiculaire en K à l'axe non focal.

L'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ équivalente à $x^2 = \frac{a^2}{q^2}(b^2 + y^2)$

montre qu'à toute valeur de y il correspond deux valeurs opposées de x, donc que la droite (Δ) coupe l'hyperbole en deux points M et M′ symétriques par rapport à K.

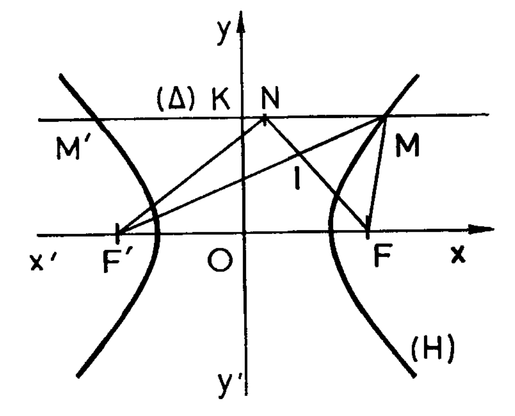


Fig. 12.

Tout point du segment MM′ (autre que M et M′) est appelé point extérieur à l'hyperbole.

Tout point de (Δ) hors du segment MM′ est appelé point intérieur à l'hyperbole.

Soit N un point du segment KM (N, M et F d'un même côté de l'axe non focal) et I l'intersection des droites MF′ et NF :

dans le triangle NF′I : $NF' < IF' + NI$;
dans le triangle MFI : $MF < MI + IF$;
par addition $NF' + MF < MF' + NF$
ou bien $NF' - NF < MF' - MF$
$NF' - NF < 2a$ (avec $NF' > NF$)

Si le point N est entre K et M′, on obtient :

$$NF - NF' < 2a \qquad (\text{avec } NF > NF')$$

donc pour tout point N **extérieur** à l'hyperbole :

$$|\mathbf{NF' - NF}| < \mathbf{2a}.$$

Si le point N est **intérieur** à l'hyperbole le raisonnement ci-dessus reste valable en échangeant M et N et l'on obtient :

$$|\mathbf{NF' - NF}| > \mathbf{2a}.$$

En résumé, il n'y a que trois possiblités :

N est extérieur à l'hyperbole	⇔	$\|NF' - NF\| < 2a$
N appartient à l'hyperbole	⇔	$\|NF' - NF\| = 2a$
N est intérieur à l'hyperbole	⇔	$\|NF' - NF\| > 2a$

L'ensemble des points intérieurs à l'hyperbole est appelé région intérieure à l'hyperbole ; l'ensemble des points extérieurs est appelé région extérieure. Un point mobile décrivant une courbe continue ne peut passer de l'une des régions dans l'autre sans rencontrer l'hyperbole.

Courbe d'équation $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$.

Dans tout ce chapitre les axes de coordonnées sont rectangulaires.

La fonction n'est pas définie pour les valeurs de x qui rendent négatif le trinôme $ax^2 + bx + c$; elle est définie pour toutes les

autres valeurs de x, et, dans ce cas, à une valeur de x il correspond deux valeurs opposées de y :

$$y_1 = \sqrt{ax^2 + bx + c} \quad \text{et} \quad y_2 = -\sqrt{ax^2 + bx + c}$$

la courbe représentative admet l'axe des x pour axe de symétrie.

Nous serons amenés à distinguer trois cas suivant que a est nul, négatif ou positif.

13. Premier cas : a = 0. Courbe d'équation $y^2 = bx + c$.

Si b $\neq$ 0, on peut écrire $y^2 = b\left(x + \frac{c}{b}\right)$.

Effectuons une translation des axes de coordonnées en prenant pour nouvelle origine le point O_1 de coordonnées :

$$x_1 = -\frac{c}{b}, \qquad y_1 = 0.$$

Les nouveaux axes étant O_1X et O_1Y, on a :

$$x = -\frac{c}{b} + X, \qquad y = Y.$$

L'équation de la courbe devient

$$Y^2 = bX.$$

C'est l'équation d'une parabole de sommet O_1, d'axe O_1X et de paramètre $\frac{|b|}{2}$.

Si $b > 0$, la concavité est tournée vers les X positifs ;
si $b < 0$, la concavité est tournée vers les X négatifs.

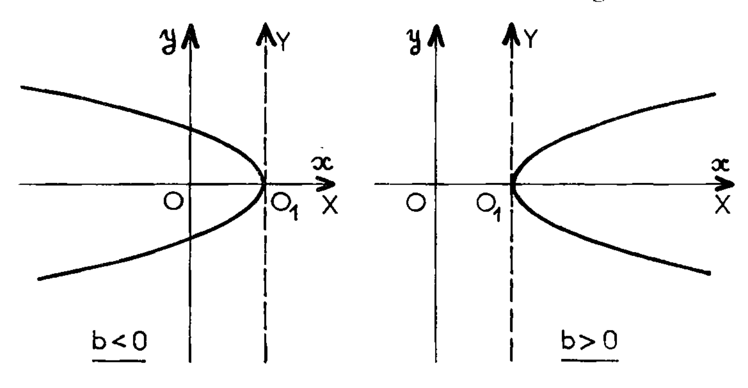


Fig. 13.

Si b = 0, on a $\qquad y^2 = c.$

Si $c > 0$, $\qquad y = \pm \sqrt{c}.$

La courbe se compose de *deux droites parallèles à l'axe* Ox d'ordonnées respectives $+\sqrt{c}$ et $-\sqrt{c}$.

Si $c = 0$, $\qquad y^2 = 0,$
la courbe se réduit à *deux droites confondues avec l'axe* Ox ;

Si $c < 0$, la fonction n'est pas définie.

14. Deuxième cas : a < 0 (ellipse).

Si $\mathbf{b^2 - 4ac < 0}$, le trinôme $ax^2 + bx + c$ est négatif quel que soit x, la fonction n'est pas définie.

si $\mathbf{b^2 - 4ac = 0}$ le trinôme est négatif, sauf pour $x = -\dfrac{b}{2a}$ la courbe représentative se réduit à un point unique

$$C\left(-\frac{b}{2a}, 0\right)$$

Si $\mathbf{b^2 - 4ac > 0}$, le trinôme admet deux racines distinctes x' et x''. La fonction est définie pour $x' \leqslant x \leqslant x''$.

L'équation peut s'écrire :

$$y^2 = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right].$$

Effectuons une translation d'axes en prenant pour nouvelle origine le point O_1 de coordonnées

$$x_1 = -\frac{b}{2a}, \qquad y_1 = 0 ;$$

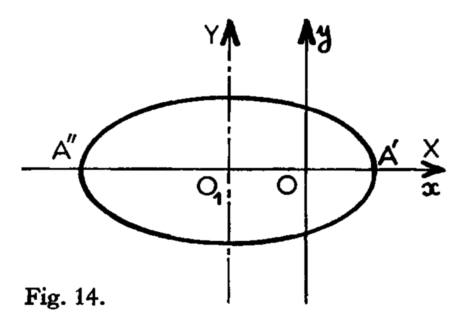


Fig. 14.

Les nouveaux axes étant O_1X et O_1Y on a

$$x = -\frac{b}{2a} + X \quad \text{et} \quad y = Y.$$

L'équation de la courbe devient

$$Y^2 = aX^2 + \frac{4ac - b^2}{a}$$

ou

$$\frac{X^2}{\dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}} - \frac{Y^2}{\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}} = 1.$$

$\dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ est positif et peut être posé égal à m^2,

$\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$ est négatif et peut être posé égal à $-n^2$.

L'équation devient $\dfrac{X^2}{m^2} + \dfrac{Y^2}{n^2} = 1.$

C'est *l'équation d'une ellipse de centre* O_1 *dont les axes ont pour longueurs respectives* $|2m|$ *et* $|2n|$, *dont les sommets* A' *et* A'' *situés sur* Ox *ont pour abscisses* $x = x'$ *et* $x = x''$.

si $m^2 > n^2$, l'axe O_1X est l'axe focal ; $(-1 < a < 0)$,

si $m^2 < n^2$, l'axe O_1X est l'axe non focal. $(a < -1)$.

si $m^2 = n^2$ (cas où $a = -1$) l'équation est celle d'un cercle et peut se mettre sous la forme $X^2 + Y^2 = m^2$.

D'ailleurs, l'équation proposée donnait directement $y^2 + x^2 - bx - c = 0$.

15. Troisième cas : a > 0 (hyperbole).

Si $\mathbf{b^2 - 4ac > 0}$, le trinôme admet deux racines réelles distinctes, la fonction est définie pour $x \leqslant x'$ et $x'' \leqslant x$.

En prenant pour origine le point $O_1\left(-\dfrac{b}{2a}, 0\right)$ on obtient comme précédemment :

$$\frac{X^2}{\dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}} - \frac{Y^2}{\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}} = 1$$

les quantités $\dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ et $\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$ étant toutes deux positives

on les représente respectivement par m^2 et n^2 ; l'équation devient :

$$\frac{X^2}{m^2} - \frac{Y^2}{n^2} = 1$$

c'est l'équation d'une hyperbole de centre O_1 admettant l'axe O_1X pour axe focal. Les sommets ont pour abscisses respectives $x = x'$ et $x = x''$.

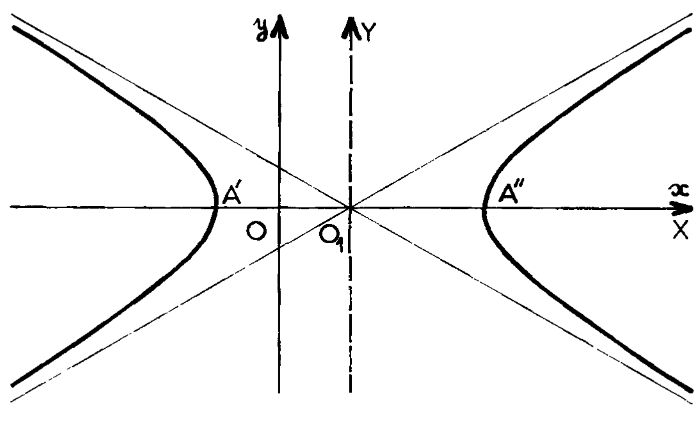


Fig. 15 a.

si $b^2 - 4ac = 0$ le trinôme ne peut être négatif, on peut écrire:

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

si l'on effectue la même translation que précédemment, on obtient :

$$Y^2 = aX^2$$

ou :

$$Y = \pm X\sqrt{a}$$

la courbe se compose de deux droites sécantes au point O_1, symétriques par rapport à O_1X.

Si $b^2 - 4ac < 0$, le trinôme est positif quel que soit x. On peut encore écrire :

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right]$$

et en effectuant la même translation que précédemment,

$$Y^2 = aX^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

ou :

$$\frac{Y^2}{\frac{4ac - b^2}{4a}} - \frac{X^2}{\frac{4ac - b^2}{4a^2}} = 1$$

$\frac{4ac - b^2}{4a}$ et $\frac{4ac - b^2}{4a^2}$ étant positifs on les représente respectivement par n^2 et m^2 et l'équation devient :

$$\frac{Y^2}{n^2} - \frac{X^2}{m^2} = 1$$

c'est l'équation d'une hyperbole de centre O_1, admettant O_1Y pour axe focal. Les sommets sont les points de coordonnées $X = 0$ et $Y = \pm n$.

Si $a = 1$, on aura $m^2 = n^2$, l'hyperbole est équilatère.

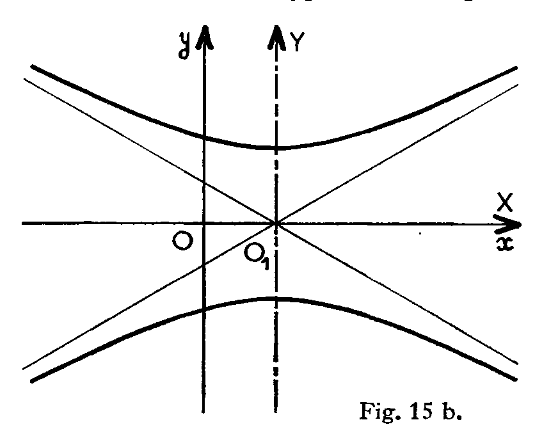


Fig. 15 b.

16. Tableau récapitulatif.

Le tableau suivant résume tous les cas possibles :

$a = 0$

$b \neq 0$		$Y^2 = b\ X$	parabole
$b = 0$	$c < 0$		aucun point
	$c = 0$	$y = 0$	l'axe $x'x$
	$c > 0$	$y = \pm \sqrt{c}$	deux droites parallèles à $x'x$

$\boxed{a < 0}$

$\Delta < 0$			aucun point
$\Delta = 0$			1 point unique $C(-b/2a, 0)$
$\Delta > 0$	$\dfrac{X^2}{\dfrac{\Delta}{4a^2}} + \dfrac{Y^2}{\dfrac{\Delta}{-4a}} = 1$	$-1 < a < 0$	ellipse Y'Y axe focal
		$a < -1$	ellipse X'X axe focal
	$a = -1$	$y^2 + x^2 - bx - c = 0$	cercle

$\boxed{a > 0}$

$\Delta = 0$	$y = \pm \sqrt{a}X$	2 droites sécantes
$\Delta > 0$	$\dfrac{X^2}{\dfrac{\Delta}{4a^2}} - \dfrac{Y^2}{\dfrac{\Delta}{4a}} = 1$	hyperbole X'X axe focal
$\Delta < 0$	$\dfrac{Y^2}{\dfrac{-\Delta}{4a}} - \dfrac{X^2}{\dfrac{-\Delta}{4a^2}} = 1$	hyperbole Y'Y axe focal

17. Tangente en un point d'une conique. (Méthode analytique).

Soit une conique (C) représentée par l'équation

$$y^2 = ax^2 + bx + c,$$

ou $\quad y = \varepsilon\sqrt{ax^2 + bx + c} \quad$ avec $\quad \varepsilon = \pm 1,$

Pour tout x rendant **strictement** positif le trinôme, la fonction y est dérivable et sa dérivée est égale à

$$y' = \frac{2ax + b}{2y}.$$

Il en résulte qu'en tout point d'ordonnée non nulle de la courbe (C), existe une tangente à la courbe.

Si $y \to 0$, avec $x \neq -\dfrac{b}{2a}$, y' devient infinie et la tangente en ces points (sommets de la courbe) devient parallèle à l'axe Oy.

Donc, en tout point M situé sur une conique (C) existe une tangente.

Remarque. — Nous laissons de côté les cas où la conique dégénère en un ensemble de deux droites sécantes ou parallèles.

Tangente à la parabole.

Soit (P) la parabole rapportée à son axe et à sa tangente au sommet et d'équation $y^2 = 2px$.

On aura $$2yy' = 2p.$$

En tout point M_0 de (P) où $y_0 \neq 0$ la tangente a pour coefficient directeur $y'_0 = \frac{p}{y_0}$.

L'équation de la tangente au point M_0 est donc

$$y - y_0 = \frac{p}{y_0}(x - x_0),$$

ou $$y_0 y - px = y_0^2 - px_0 = 2px_0 - px_0.$$

$$y_0 y - px = px_0.$$

enfin $$\boxed{y = \frac{p}{y_0}(x + x_0)}$$

Tangente à l'ellipse.

a) Soit (C) l'ellipse rapportée à ses axes de symétrie (repère orthonormé) et d'équation :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Pour $-a < x < a$, la fonction y est dérivable et

$$\frac{x}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} = 0.$$

Le coefficient directeur de la tangente au point $M_0\ (x_0, y_0)\ (y_0 \neq 0)$ est donné par

$$y'_0 = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}.$$

L'équation de la tangente en ce point est donnée par

$$y - y_0 = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}(x - x_0),$$

ou $$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2},$$

et, comme le point M_0 est sur l'ellipse

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

Remarque : si $x_0 = \pm a$, la tangente est parallèle à Oy et a pour équation $x = -a$ ou $x = a$.

Tangente à l'hyperbole.

Soit (C) l'hyperbole rapportée à ses axes de symétrie (repère orthonormé) et d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Pour $x < -a$ ou $x > a$, la fonction y est dérivable et l'on aura

$$\frac{x}{a^2} - \frac{yy'}{b^2} = 0,$$

Le coefficient directeur de la tangente au point $M_0(x_0, y_0)$ $(y_0 \neq 0)$ est

$$y'_0 = \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}.$$

L'équation de la tangente M_0T en ce point est

$$y - y_0 = \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}(x - x_0),$$

ou

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = \frac{x_0}{a^2} - \frac{y_0}{b^2}.$$

Le point M_0 étant sur l'hyperbole

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

Remarque : si $x_0 = -a$ ou $+a$, $y_0 = 0$ (sommets de la courbe) la tangente est parallèle à Oy et a pour équation :

$$x = -a \quad \text{ou} \quad x = +a.$$

EXERCICES

481. Ensemble des centres des cercles tangents à une droite fixe (D) et orthogonaux à un cercle fixe (Γ), dans le cas où (D) est tangente à (Γ).

482. Dans une ellipse d'axes $2a$ et $2b$, le rayon vecteur FM fait avec le grand axe l'angle φ.

1° Calculer, en fonction de φ et des éléments de l'ellipse, la longueur de ce rayon vecteur.

2° MFM′ étant une corde focale quelconque, démontrer que $\frac{1}{FM} + \frac{1}{FM'}$ est égale à une quantité constante.

3° Quelle est la corde focale de longueur minimale ?

483. Sur une ellipse de grand axe AA′ et de centre O, la position d'un point quelconque M est donnée par l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = \theta$

1° Calculer, en fonction de θ et des éléments de l'ellipse, la longueur du segment OM.

2° OM et OM′ étant perpendiculaires, évaluer $\frac{1}{OM^2} + \frac{1}{OM'^2}$ (M et M′ sont des points de l'ellipse).

3° Quelle est l'enveloppe de la corde MM′ vue du centre sous un angle droit ?

484. Utiliser les résultats des deux exercices précédents pour montrer que dans une ellipse, tout diamètre est moyen proportionnel entre la corde focale qui lui est parallèle et le grand axe.

485. On donne trois droites fixes et coplanaires : (Δ_1)e t (Δ_2) sont parallèles, (D) est perpendiculaire à (Δ_1) et (Δ_2). Soient P, Q_1 et Q_2 les projections orthogonales d'un point M (de leur plan) sur D, (Δ_1) et (Δ_2) respectivement.

Ensemble des points M tels que $MP^2 = MQ_1.MQ_2$.

On distinguera deux cas suivant que M est ou n'est pas entre les droites (Δ_1) et (Δ_2).

486. Un point M d'une hyperbole (H) se projette orthogonalement en *m* sur l'axe focal. La droite *m*M coupe une asymptote en Q. Si R et R′ sont les intersections de cette asymptote avec le cercle principal, montrer que les segments QR et QR′ sont égaux aux rayons vecteurs MF et MF′ de ce point.

487. Un point M quelconque d'une hyperbole se projette en P sur l'axe focal. De ce point P on mène les tangentes PC et PC′ au cercle principal ; de M on abaisse les perpendiculaires MD et MD′ sur PC et PC′. Montrer que le segment EE′, déterminé par ces perpendiculaires sur l'axe focal, a une longueur indépendante du point M.

488. Un point M décrit un cercle de centre O et de rayon R. La tangente en M coupe en H un diamètre fixe. On porte perpendiculairement à ce diamètre HP = HM.

Montrer que l'ensemble des points P est une hyperbole équilatère.

489. On donne un segment AA′ de milieu O. Ensemble des points M du plan, tels que la différence des angles en A et A′ du triangle MAA′ soit égale à un droit.

Montrer que la hauteur issue de M est tangente au cercle circonscrit au triangle MAA′.

490. On donne dans un plan une droite fixe (D) et deux points fixes A et A′ de cette droite. H étant la projection orthogonale sur (D) d'un point M, déterminer l'ensemble des points M tels que : $\dfrac{\overline{HM}^2}{\overline{HA}.\overline{HA'}} = k$ (*k* nombre relatif donné). Discuter suivant le signe de *k*.

491. Dans un cercle de diamètre AA′, on trace une corde variable PP′ perpendiculaire à AA′. Ensemble des points M communs aux droites AP et A′P′.

492. On appelle (C) tout cercle passant par deux points donnés A et A′, et MM′ le diamètre de (C) parallèle à AA′. Montrer que l'ensemble des points M et M′ est une hyperbole.

493. On transforme dans l'inversion (O, c^2) l'hyperbole équilatère de foyers F et F′ (FF′ $= 2c$) et de centre O.

M′ étant l'inverse d'un point M de l'hyperbole, établir la relation :

$$M'F.M'F' = 2a^2.$$

494. On donne un carré OACB de côté *a*, et on prolonge OA et OB d'une même longueur variable AA′ = BB′ = R ; du point C comme centre et avec cette même longueur pour rayon, on décrit un cercle qui coupe A′B′ en deux points M et M′.

Montrer que l'ensemble des points M et M′ est une hyperbole.

495. On donne deux droites Ox et Oy et un point fixe A de leur plan. Par ce point on fait passer une sécante variable qui coupe Ox en P et Oy en Q. Soit M le milieu de PQ et N le symétrique de A par rapport à M.
Ensemble des points N et M.

496. Une sécante quelconque coupe une parabole en M et M′, son axe en P et sa tangente au sommet en Q. Si M et M′ se projettent en H et H′ sur l'axe de la parabole, montrer que, S étant le sommet de la parabole, on a les relations :

$$1^o \quad SP^2 = \overline{SH}.\overline{SH'}$$

$$2^o \quad \overline{PQ}^2 = \overline{QM}.\overline{QM'}.$$

497. Trouver l'ensemble des centres des cercles passant par un point donné A et interceptant sur une droite donnée (D) un segment de longueur $2l$.

498. Trouver l'ensemble des points dont la différence des carrés des distances à un point donné et à une droite donnée est constante et égale à k^2.

499. Un triangle rectangle ABC pivote autour de son sommet A qui est fixe. Le sommet B décrit une droite fixe (Δ) et l'hypoténuse BC reste perpendicuiaire à cette droite (Δ). Lieu du milieu M de BC et du sommet C.

500. Étudier la variation des fonctions suivantes :

a) $y^2 = 4x^2 - 6x + 2,$
b) $y^2 = 1/9(x^2 - 6x + 5),$
c) $y^2 + 3x - 5 = 0,$
d) $y^2 = -x^2 - 5x + 6,$
e) $y^2 = -4x^2 + 7x - 3.$

Déterminer les éléments principaux : sommets, foyers, directrices et asymptotes de ces coniques.

501. Discuter suivant les valeurs du paramètre m, la nature des coniques suivantes :

a) $y^2 = (m - 1)x^2 - 2(m - 2)x + (m - 1),$
b) $y^2 = (2 - m)x^2 - (3m + 1)x + (2 - m).$

502. On considère dans le plan rapporté à un repère orthonormé xOy, le cercle C de centre $C(c, o)$ de rayon R, le point fixe $A(a, o)$ et sur l'axe Oy le point variable $M(o, m)$.

1° Déterminer les coordonnées du pôle P de la droite Oy par rapport au cercle (C) et l'équation de la polaire (Δ) du point M par rapport au cercle (C).

2° Cette polaire (Δ) rencontre la droite AM au point Q. Déterminer le lieu du point Q quand M décrit l'axe Oy.
Discuter la nature de ce lieu suivant la position du point M sur Oy.

503. On donne dans un plan rapporté à un repère orthonormé xOy, les points $A(a, o)$ et $B(b, o)$; un point variable $M(o, m)$ décrit l'axe Oy. On joint le point M aux points A et B ; la perpendiculaire menée de O à BM rencontre AM en un point P. Déterminer le lieu de ce point P et discuter sa nature suivant la position du point M.

504. On donne dans un plan rapporté à un repère orthonormé xOy, les points $A(a, o)$ et $A'(-a, o)$ et la droite (D) d'équation $x = d$. Un point M variable décrit la droite (D). La perpendiculaire à AM menée en A rencontre en P la droite A′M.

Déterminer le lieu de P quand M décrit la droite (D) et discuter sa nature suivant la position de (D) par rapport à A et A'.

505. On considère l'ellipse d'équation réduite

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1.$$

1° Déterminer l'équation des tangentes à cette conique aux points de la courbe d'abscisse $x = 2$.

2° Déterminer l'équation des tangentes à cette conique formant avec l'axe ox un angle égal à $\pi/3$. Déterminer les coordonnées de leur point de contact.

3° D'un point $M(x_1, y_1)$ on mène la droite de coefficient directeur m. Quelle relation doit vérifier m pour que cette droite soit tangente à l'ellipse ?

506. On considère la parabole d'équation

$$y^2 = 4x.$$

1° Déterminer l'équation des tangentes à cette parabole aux points d'abscisse $x = 3$.

2° Déterminer l'équation de la tangente à cette parabole parallèle à la première bissectrice et les coordonnées de son point de contact.

507. On considère l'hyperbole d'équation

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1.$$

1° Déterminer les équations des tangentes à cette courbe menées par les points de la courbe d'absisse $x = -7$.

2° Déterminer les coordonnées des points de contact des tangentes de coefficient directeur m. Quelle condition doit remplir m pour que ces tangentes existent?

508. *a)* On considère l'ellipse d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

D'un point $P(x_1, y_1)$ on mène une droite variable de pente m. Établir la relation que doit vérifier le coefficient m de cette droite pour qu'elle soit tangente à l'ellipse. En déduire le lieu des points P pour que les deux tangentes ainsi construites soient rectangulaires.

b) Même problème en remplaçant l'ellipse par l'hyperbole d'équation :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Condition que doivent vérifier a et b pour que le lieu existe.

c) Même question pour la parabole $y^2 = 2px$.

508 bis. On donne, dans un plan rapporté à un repère orthonormé xOy, les points $A(o, a)$ $B(o, -a)$ et $C(c, o)$. D'un point M variable on abaisse les perpendiculaires sur MH, MI et MJ sur les droites AB, BC et CA.

Déterminer le lieu des points M tels que $MH^2 = MI.MJ$.

Le lieu est formé de deux courbes distinctes dont on précisera la nature.

509. On considère l'ellipse (E) de foyers $F(c, o)$ et $F'(-c, o)$ définie en axes orthonormés par l'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$.

1° A tout point M de cette ellipse représentée par son affixe $z = x + iy$, on associe l'image M' d'un nombre complexe z' tel que $z^2 + z'^2 = c^2$.

Démontrer que
$$OM'^2 = MF.MF'.$$
et que la droite OM' est normale à la bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{MF}, \overrightarrow{MF'})$.

2° Établir les formules
$$|z - c|^2 + |z + c|^2 = 2(|z|^2 + c^2)$$
$$(|z - c| + |z + c|)^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2 + c^2)$$
$$MF + MF' = M'F + M'F'.$$
En déduire que M et M' sont extrémités de deux diamètres conjugués de (E) et que
$$OM^2 + OM'^2 = a^2 + b^2.$$

3° Soient I et I' les images des deux nombres complexes
$$u = z + iz' \qquad u' = z - iz'.$$
Prouver que
$$uu' = c^2,$$
$$|z - c| + |z + c| = |u| + |u'|,$$
$$MF + MF' = M'F + M'F' = OI + OI'.$$
Vérifier que le quadrangle FF'II' est harmonique.

510. On considère une ellipse (C) définie par l'équation
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$
Soient F_1 et F_2 ses foyers. Considérons un point M de (C), tel que l'angle F_1MF_2 des rayons vecteurs F_1M et F_2M soit égal à une valeur donnée φ.

1° Exprimer les quantités $\rho_1 = F_1M$ et $\rho_2 = F_2M$ en fonction de a, b et φ.

2° Exprimer les coordonnées x_0, y_0 du point M en fonction de a, b et φ.

3° On pose $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$, $\cos \varphi = \frac{1}{3}$; trouver l'angle que la tangente à (C), au point M correspondant, fait avec l'axe Ox. (Besançon, 1949.)

511. Soit une ellipse E, rapportée à ses axes Ox et Oy. Sur cette ellipse, on prend un point variable M, de coordonnées x et y.

1° Calculer en fonction de x, les rayons vecteurs $u = MF$ et $v = MF'$.

2° Calculer, en fonction de y, le rayon r du cercle C inscrit dans le triangle MFF' et le rayon r' du cercle C' exinscrit dans l'angle M (c'est-à-dire dont le centre I' est, comme le centre I de C, sur la bissectrice intérieure de l'angle FMF').

3° Démontrer que les cercles Γ et Γ', qui ont pour centre M et sont respectivement orthogonaux à C et à C', ont des rayons constants, que l'on calculera.

4° On appelle X, Y les coordonnées de I et X', et Y' les coordonnées de I'. Démontrer que
$$X = -X' = \frac{v - u}{2}.$$
Calculer ces quatre coordonnées en fonction de x et de y.

5° Calculer x et y en fonction de X, Y et former l'équation du lieu de I. Vérifier que ce lieu est une ellipse S, de grand axe FF'. Démontrer, de même, que le lieu de I' est une ellipse S', de petit axe FF'.

6° Calculer, en fonction de y, les coordonnées des deux points de rencontre de Oy avec le cercle circonscrit au triangle MFF'. Calculer également le rayon de ce cercle. (Besançon, 1930).

512. On considère un angle droit xOy et un segment PQ de longueur unité, dont l'extrémité P est sur Ox et l'extrémité Q sur Oy. On divise ce segment par les points L, M et N en quatre parties égales PL = LM = MN = NQ.

1° Calculer les distances de chaque point L, M, N à Ox et Oy en fonction de l'angle aigu OPQ = φ.

2° Quel est le lieu décrit par chacun des points L, M et N lorsque le segment PQ se déplace entre ses deux positions extrêmes ?

3° Sur PQ comme côté, on construit un triangle équilatéral PQR, tel que O et R se trouvent de part et d'autre de PQ. Trouver le lieu décrit par le sommet R de ce triangle. (Poitiers, 1933).

513. On donne un cercle C de centre O et une tangente D à ce cercle au point A.

Par un point M du plan, on mène la perpendiculaire MH à D et une tangente MT au cercle C.

1° Lieu des points M tels que MH = MT. Ce lieu est une courbe (Γ).

2° Les cercles de centre M et de rayon MT sont tangents à un cercle fixe.

3° On remplace la droite D par une droite D', parallèle à D. Déterminer un cercle C' ayant son centre O' sur AO et jouissant de la propriété suivante :

Tout cercle ayant son centre M sur (Γ) et tangent à D' coupe orthogonalement le cercle C'.

4° Montrer que lorsque C' existe, il est tangent en deux points à la courbe (Γ) (Lyon, 1933.

514. On donne dans le plan deux points A et B et une droite Δ perpendiculaire en C sur la droite AB.

On considère un angle droit mobile de sommet Σ, dont les côtés passent par A et B et qui coupent la droite Δ en T et S. Les perpendiculaires en T et S sur la droite Δ coupent les côtés de l'angle droit respectivement aux points L et M.

1° Lieux de M et L lorsque les points A et B sont confondus. Chercher les éléments principaux de ces lieux.

2° Lieu de M lorsque le point A se trouve sur Δ. Éléments principaux de ce lieu. Démontrer que le cercle lieu de Σ est bitangent en un point du lieu précédent.

3° Lieux de M et L lorsque les points A et B sont quelconques et le point C situé entre les points A et B.

Éléments principaux des lieux. Points communs et tangentes en ces points de ces lieux. (Maroc, 1945.)

515. Soit l'ellipse (E) d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

On se propose de déterminer l'intersection de cette ellipse avec un cercle (C) passant par les foyers F et F' d'abscisses respectives c et $-c$.

Ce cercle sera considéré comme ensemble des points M tels que (MF, MF') = α

1° M étant un point quelconque du cercle (C) exprimer $z = \operatorname{tg} \alpha$ en fonction de c et des coordonnées x et y de M.

Montrer que, si M est aussi sur l'ellipse, $z = \frac{2b^2cy}{c^2y^2 - b^4}$.

2° Variations et graphe de la fonction $z = f(y)$ lorsque M décrit l'ellipse. Il y a deux formes de courbes possibles suivant la valeur du rapport $\lambda = b/c$.

3° Déterminer le nombre de points d'intersection de l'ellipse (E) et du cercle (C). Préciser les conditions auxquelles doivent satisfaire λ et z pour que le problème admette quatre solutions.

4° Dans le cas des quatre points d'intersection, ceux-ci sont groupés de telle façon que deux d'entre eux, M_1 et M_2, ont des ordonnées de signes différents. Trouver une relation indépendante du cercle (C) entre ces deux ordonnées y_1 et y_2.

En supposant que les points M_1 et M_2 sont tous deux d'abscisse positive, que $y_1 > 0$ et que $|y_1| > |y_2|$, on pose $y_1 = b \sin \varphi_1$, $y_2 = b \sin \varphi_2$ et l'on cherche à déterminer y_1 et y_2 de manière que $\varphi_1 - \varphi_2 = \pi/2$. Montrer qu'il ne peut en être ainsi que si λ est inférieur à une valeur que l'on déterminera. On achèvera la détermination des valeurs y_1 et y_2 lorsque $\lambda = \frac{1}{2}$. (Maroc J. 56.)

516. On se propose d'étudier, suivant les valeurs du paramètre $m \geqslant 0$, la forme des courbes (C) représentant les équations

$$(1) \qquad y = \sqrt{m^2x^2 - 2x + 1}$$

1° Que peut-on dire de ces courbes par rapport aux courbes (C_1) représentant les équations :

$$(2) \qquad y^2 = m^2x^2 - 2x + 1$$

En déduire l'étude des courbes (C) suivant les valeurs de m.

a) On envisagera, en premier lieu, le cas $m = 0$.

b) Si $m > 0$, montrer que (2) peut s'écrire sous la forme

$$(3) \qquad y^2 = m^2(x - a)^2 + h$$

où a et h sont des quantités dépendant du paramètre m.

Que représente l'équation (3) suivant le signe de h ?

Cas particulier où $h = 0$.

Préciser à quelles valeurs de m ($m > 0$) correspondent ces résultats.

2° On suppose $m \neq 0$; retrouver les différentes formes des courbes (C) en étudiant algébriquement les variations de la fonction

$$y = \sqrt{m^2x^2 - 2x + 1}$$

Étude des asymptotes des courbes représentatives.

Montrer que toutes les courbes (C) passent par un même point.

(d'après Antilles, 61.)

517. Soient deux axes de coordonnées rectangulaires $x'Ox$ et $y'Oy$. On considère les triangles variables AOB ayant pour bissectrice intérieure l'axe Ox et pour côtés des segments OA et OB de longueur m et n respectivement ($m > n$). On suppose l'angle $\varphi = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OA})$ variant entre 0 et $\pi/2$.

1° Exprimer les coordonnées des points A et B et celles du milieu M de AB en fonction de m, n et φ.

Équation du lieu de M lorsque φ varie.

2° Si P est le point qui partage AB dans le rapport algébrique $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = -\lambda$ ($\lambda > 0$) calculer les coordonnées de P et trouver le lieu de ce point lorsque φ varie.

3° On mène par M la parallèle à OA qui coupe $x'x$ en E, $y'y$ en F. Montrer que les longueurs ME et MF sont constantes et retrouver géométriquement le lieu de M.

4° Par P on mène la parallèle à OA, qui coupe $x'x$ en G et $y'y$ en H. Montrer que les longueurs PG et PH sont constantes et retrouver géométriquement le lieu de P.

5° On fait subir à OM une rotation de centre O et d'angle φ ; OM vient en OM'. Lieu de M'. (d'après Côte d'Ivoire, 62.)

518. On donne un axe fixe $x'x$ et un point fixe O sur cet axe. A chaque point M du plan on associe le cercle (M) de centre M passant par O. Le diamètre de (M) parallèle à $x'x$ coupe le cercle (M) en deux points, I et I'.

1° Trouver les lieux géométriques de I et I' lorsque M décrit un cercle (Γ) de centre O.

2° Trouver les lieux géométriques de I et I' lorsque M décrit une droite (D) passant par O.

3° Trouver les lieux de I et I' lorsque M décrit une parabole de foyer O et d'axe $x'x$. (On étudiera séparément le lieu de I et celui de I').

4° On suppose maintenant, jusqu'à la fin du problème, que M décrit une droite fixe (Δ) perpendiculaire à $x'x$ en un point donné, ω, défini par $\overline{O\omega} = a$.

a) Quel est le lieu (H) de I et I' ? On pourra prendre des axes de coordonnées rectangulaires ayant pour origine le point ω.

b) Soit E le pôle de $x'x$ par rapport au cercle (M). Le cercle (C) circonscrit au triangle variable EII' coupe la droite (Δ) au point E et en un autre point variable, S. Montrer que S est le symétrique de ω par rapport à M.

c) Montrer que (C) coupe $x'x$ en deux points fixes, F et F', dont on précisera les abscisses. Quel rôle les points F et F' jouent-ils pour (H) ?

(d'après Métropole, 1962.)

CHAPITRE 32

LA PARABOLE.

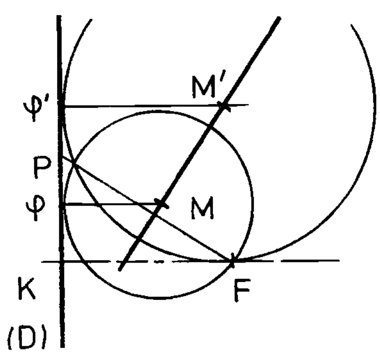
1. Tangente à la parabole.

Soient M et M′ deux points d'une parabole (P) de foyer F et de directrice (D). M et M′ sont les centres de cercles (M) et (M′) passant par F et tangents à la directrice (D) en φ et φ′ respectivement.

L'axe radical des cercles (M) et (M′) passe par F et coupe la directrice (D) en un point P milieu de φφ′.

Étudions le cas où M′ tend vers M en décrivant la parabole : le point P tend vers φ en décrivant la directrice, et la droite des centres MM′ qui est perpendiculaire à l'axe radical FP admet une position limite perpendiculaire à Fφ. Il en résulte que la ***parabole admet une tangente en chacun de ses points.***

On sait que la perpendiculaire à Fφ passant par M est la médiatrice de Fφ, donc le symétrique du foyer par rapport à la tangente est un point de la directrice.



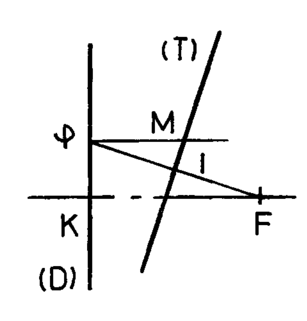


Fig. 1 a.

Réciproquement, si le symétrique du foyer par rapport à une droite (T) est un point de la directrice, on sait construire sur cette droite un point M (unique) de la parabole (φM ⊥ D) et

d'après le théorème direct, la droite (T) est la tangente en M à la parabole :

Une droite est tangente à la parabole si, et seulement si, le symétrique du foyer par rapport à cette droite est un point de la directrice.

Enveloppe de droites.

Une courbe (C) est appelée enveloppe d'un ensemble de droites (Δ) si toute droite (Δ) est tangente à la courbe (C) et si toute tangente à la courbe (C) est une droite (Δ).

Propriétés des tangentes à la parabole.

La propriété caractéristique des tangentes à la parabole que nous avons établie permet d'énoncer :

L'enveloppe des médiatrices des segments joignant un point fixe F à une droite fixe (D) est la parabole de foyer F et de directrice (D).

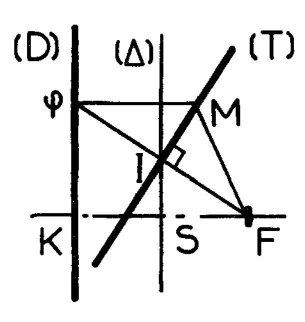


Fig. 1 b.

K étant la projection du foyer F sur la directrice, le milieu S du segment FK est le sommet de la parabole ; la tangente en ce point ou tangente au sommet est la médiatrice du segment FK : elle est l'homologue de la directrice dans l'homothétie $\left(F, \frac{1}{2}\right)$.

I étant la projection du foyer sur la tangente, on aura $\overrightarrow{FI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{F\varphi}$ ce qui montre que le point φ appartient à la directrice si, et seulement si, le point I appartient à la tangente au sommet, donc :

Une droite est tangente à la parabole si, et seulement si, la projection du foyer sur cette droite est un point de la tangente au sommet.

Cette propriété permet d'énoncer :

L'enveloppe des droites telles que la projection orthogonale d'un point F sur chacune d'elles soit sur une droite

(Δ) est la parabole de foyer F et de tangente au sommet (Δ).

ou encore :

l'enveloppe d'un coté d'un angle droit dont le sommet décrit une droite (Δ) et dont l'autre côté passe par un point fixe F, est la parabole de foyer F et de tangente au sommet (Δ).

La médiatrice du segment Fφ est aussi la bissectrice de $(\overrightarrow{MF}, \overrightarrow{M\varphi})$, donc :

Une droite est tangente à la parabole en M si, et seulement si, elle est bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{MF}, \overrightarrow{M\varphi})$, φ étant la projection du point M sur la directrice.

2. Sous-tangente, sous-normale.

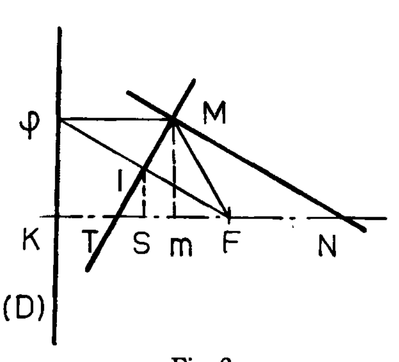


Fig. 2.

Appelons :

T l'intersection de la tangente en M et de l'axe,
N l'intersection de la normale en M et de l'axe,
m la projection orthogonale du point M sur l'axe :

le segment T*m* est la **sous-tangente**,

le segment *m*N est la **sous-normale**.

La normale MN est perpendiculaire à la tangente MT, ces deux droites sont les bissectrices de (MF, Mφ) donc le faisceau (M.φFTN) est harmonique.

TN, parallèle au rayon Mφ, est divisé en segments égaux par les autres rayons : TF = FN, donc

la tangente et la normale en M coupent l'axe en deux points symétriques par rapport au foyer.

φM et FT sont symétriques par rapport au milieu I de Fφ,

donc $$\overrightarrow{TI} = \overrightarrow{IM}$$

et en projetant orthogonalement sur l'axe :

$$\overrightarrow{TS} = \overrightarrow{Sm}$$

le sommet de la parabole est le milieu de la sous-tangente.

La symétrie par rapport à I donne également :

$$\overrightarrow{\varphi M} = \overrightarrow{TF}$$

$\overrightarrow{\varphi M}$ est équipollent à sa projection sur l'axe :

$$\overrightarrow{\varphi M} = \overrightarrow{Km}$$

et, avec $\overrightarrow{TF} = \overrightarrow{FN}$, on obtient :

$$\boxed{\overrightarrow{Km} = \overrightarrow{FN} = \overrightarrow{\varphi M} = \overrightarrow{TF}}$$

puis on remarque que : $\overrightarrow{Km} = \overrightarrow{FN} \Rightarrow \overrightarrow{KF} = \overrightarrow{mN}$

or, KF est le paramètre de la parabole, donc :
la sous-normale est égale au paramètre.

3. Tangente parallèle à une direction donnée (δ).

La parabole est donnée par son foyer F et sa directrice (D).

La perpendiculaire à (δ) issue de F coupe la directrice en un point φ unique ; la tangente cherchée est la médiatrice du segment Fφ.

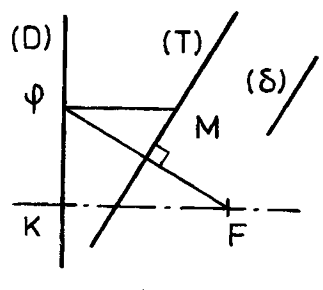


Fig. 3.

Le problème est impossible si la direction (δ) est perpendiculaire à la directrice, mais cette direction correspond à la direction limite des tangentes lorsque φ s'éloigne indéfiniment sur la directrice, ou lorsque M s'éloigne indéfiniment sur la parabole (direction asymptotique).

4. Tangentes issues d'un point donné P.

Pour qu'un point φ soit symétrique de F par rapport à une droite passant par P, il faut que PF = Pφ donc que le point φ appartienne au cercle de centre P et de rayon PF.

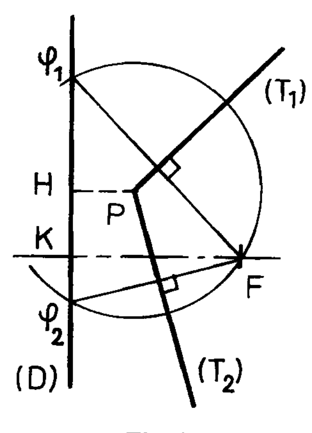


Fig. 4.

Il existe au plus deux points φ_1 et φ_2 communs à ce cercle et à la directrice, et les tangentes sont les médiatrices de $F\varphi_1$ et $F\varphi_2$.

PH étant la distance de P à la directrice :

- il y a deux solutions si le cercle coupe la directrice, donc si

$$PH < PF$$

c'est-à-dire si P est extérieur à la parabole.

- Il n'y a qu'une seule solution si le cercle est tangent à la directrice, donc si $PH = PF$

c'est-à-dire si P est un point de la parabole.

- Le problème est impossible si le cercle ne coupe pas la directrice, donc si $PH > PF$, c'est-à-dire si le point P est intérieur à la parabole.

5. Tangentes perpendiculaires.

Soient φ_1 et φ_2 les symétriques du foyer F par rapport à deux tangentes (T_1) et (T_2) qui se coupent en P : ces tangentes sont les bissectrices de $(\overrightarrow{P\varphi_1}, \overrightarrow{PF})$ et $(\overrightarrow{PF}, \overrightarrow{P\varphi_2})$

donc :
$$(PM_1, PF) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{P\varphi_1}, \overrightarrow{PF}) \quad \text{mod. } \pi$$
$$(PF, PM_2) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PF}, \overrightarrow{P\varphi_2})$$

par addition
$$(PM_1, PM_2) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{P\varphi_1}, \overrightarrow{P\varphi_2})$$

il en résulte :

$$(PM_1, PM_2) = \pi/2 \ (\text{mod. } \pi) \Leftrightarrow (\overrightarrow{P\varphi_1}, \overrightarrow{P\varphi_2}) = \pi \quad (\text{mod. } 2\pi)$$

c'est-à-dire que les tangentes sont perpendiculaires si, et seulement si, les points P, φ_1 et φ_2 sont alignés, donc si P est un point de la directrice :

La directrice de la parabole est le lieu géométrique des points communs à deux tangentes perpendiculaires.

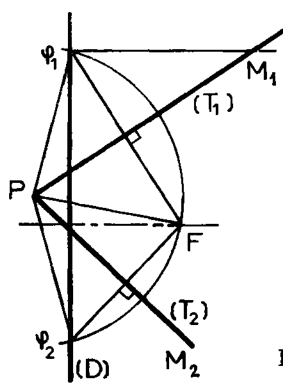
La symétrie par rapport aux tangentes donne :

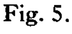
$$(FM_1, FP) = -(\varphi_1 M_1, \varphi_1 P) \quad \text{mod. } \pi$$
$$(FP, FM_2) = -(\varphi_2 P, \varphi_2 M_2)$$

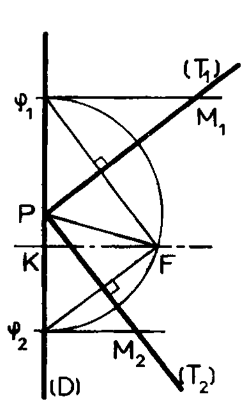
par addition $$(FM_1, FM_2) = -(\varphi_2 P, \varphi_1 P)$$

ou bien $$(FM_1, FM_2) = (P\varphi_1, P\varphi_2)$$

cette relation montre que les points M_1, F et M_2 sont alignés si, et seulement si, les points φ_1, P et φ_2 le sont aussi, et, si l'on tient compte du théorème précédent :




Fig. 5.



Les tangentes aux extrémités d'une corde focale se coupent sur la directrice et sont perpendiculaires.

6. Intersection d'une parabole et d'une droite.

La parabole est donnée par la directrice (D) et le foyer F.

Un cercle (M) passant par F est centré sur une droite (Δ) si, et seulement si, il passe aussi par F_1 symétrique de F par rapport à (Δ) : les points communs à la parabole et à la droite (Δ) sont donc aussi les centres des cercles passant par F et F_1 et qui sont tangents à la directrice (D). On sait construire de tels cercles (voir n° 17-6).

P étant le point commun aux droites (D) et FF_1, on mène la tangente PT à un cercle auxiliaire passant par F et F_1 puis on porte la longueur PT de part et d'autre du point P sur la droite (D) :

$$P\varphi_1 = P\varphi_2 = PT.$$

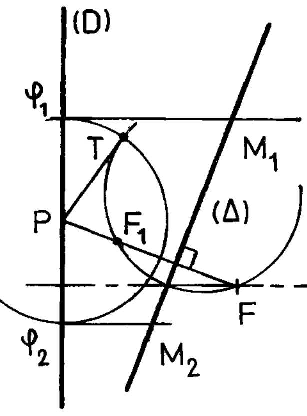


Fig. 6 a.

Les points φ_1 et φ_2 sont les points de contact de la droite (D) et des cercles cherchés. Les centres sont les intersections de (Δ) et des perpendiculaires à la directrice en φ_1 et φ_2 respectivement.

Discussion.

La construction précédente suppose quatre conditions :

1) F et F_1 sont distincts.
2) P existe, donc FF_1 n'est pas parallèle à la directrice.
3) de P on peut mener des tangentes aux cercles passant par F et F_1.
4) la perpendiculaire à la directrice coupe (Δ).

La condition (3) est réalisée, soit si le point F_1 est sur la directrice (3me cas particulier ci-dessous), soit si F et F_1 sont d'un même côté de la directrice : dans ce cas, et si les autres conditions sont réalisées, il existe deux points φ_1 et φ_2 sur (D), auxquels correspondent deux points M_1 et M_2 communs à la droite (Δ) et à la parabole.

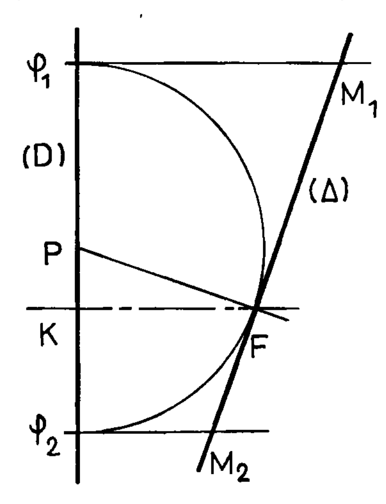


Fig. 6 b.

Premier cas particulier : la droite (Δ) passe par le foyer.

Dans ce cas, F et F_1 sont confondus. Un point M est alors centre d'un cercle du faisceau singulier dont (Δ) est la droite des centres et F le point de contact. P étant l'intersection de la directrice et de la perpendiculaire à (Δ) en F, la construction se poursuit comme dans le cas général, mais on remarque que PF est tangente aux cercles du faisceau, donc :
$P\varphi_1 = P\varphi_2 = PF$.

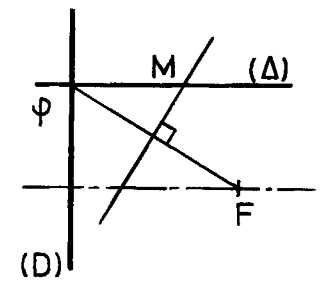


Fig. 6 c.

Deuxième cas particulier : la droite (Δ) est perpendiculaire à la directrice.

Dans ce cas, FF_1 est parallèle à la directrice et le point P est rejeté à l'infini, mais la construction est immédiate : M est l'intersection de la droite (Δ) et de la médiatrice de $F\varphi$, avec $\varphi = (D) \cap (\Delta)$.

La droite (Δ) et la parabole ont un point commun et un seul.

Troisième cas particulier : le point F_1 est sur la directrice.

Dans ce cas, on sait que la droite (Δ) est tangente à la parabole et le point de contact est sur la perpendiculaire en F_1 à la directrice.

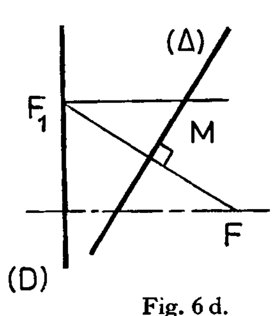


Fig. 6 d.

7. Problème.

Soit une parabole (P) dont le foyer O se projette en K sur la directrice D), et que l'on rapporte à un repère orthonormé d'origine O dont l'axe $x'x$ a la direction et le sens de $\overrightarrow{KO}$.

$M(x, y)$ est un point quelconque de la parabole, H sa projection orthogonale sur la directrice, $\vec{u}$ le vecteur unitaire de $\overrightarrow{OM}$, et r sa mesure algébrique.

x, r et $\vec{u}$ peuvent être considérés comme des fonctions de la variable $\theta = (\vec{i}, \vec{u})$.

Calculer la dérivée de $\overrightarrow{OM} = r\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ et utiliser cette dérivée pour montrer que la tangente en M à la parabole est bissectrice extérieure de OMH.

La dérivée demandée est :

$$(\overrightarrow{OM})' = r'\vec{u} + r\vec{u}' = x'\vec{i} + y'\vec{j}.$$

Si p est le paramètre de la parabole, la relation caractéristique $OM = HM$ devient : $r = p + x$

et, en dérivant : $r' = x'$.

Cette relation montre que les projections orthogonales de $(\overrightarrow{OM})'$ sur $\vec{u}$ et $\vec{i}$ ont même mesure, donc que $(\overrightarrow{OM})'$ est parallèle à la bissectrice de $(\vec{i}, \vec{u})$, or on sait que $(\overrightarrow{OM})'$ est porté par la tangente en M à la parabole, donc la tangente en M à la parabole est bissectrice extérieure de l'angle OMH.

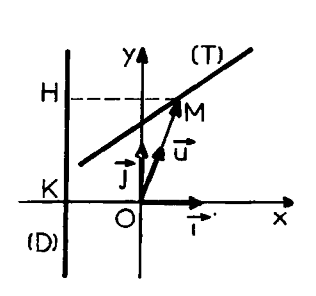


Fig. 7.

EXERCICES

519. Ensemble des foyers et des sommets des paraboles tangentes à une droite (T) donnée, en un point M donné, et dont l'axe est parallèle à une direction (δ) donnée.

520. Ensemble des foyers F des paraboles qui passent par un point M donné et admettent une directrice (D) donnée.

521. Ensemble des foyers des paraboles qui passent par un point M donné et admettent pour tangente au sommet une droite donnée.

522. On donne une tangente (T) à une parabole variable, le point de contact M et l'intersection B de (T) et de l'axe de la parabole.

Ensemble des sommets des paraboles.

Ensemble des foyers.

Enveloppe des directrices.

523. Construire la directrice d'une parabole :

1° On donne le foyer F et deux points M et M'.

2° On donne le foyer F, un point M et une tangente (T).

3° On donne le foyer F et deux tangentes (T) et (T').

4° On donne le foyer F, une tangente (T) et la direction de l'axe.

524. Déterminer le foyer F d'une parabole :

1° On donne la directrice (D), un point M et une tangente (T).

2° On donne la directrice (D) et deux tangentes (T) et (T').

3° On donne la directrice (D), une tangente (T) et son point de contact M.

525. Déterminer le foyer et la directrice d'une parabole connaissant deux tangentes et la tangente au sommet.

526. Déterminer le foyer et la directrice d'une parabole dont on donne la tangente au sommet (Δ), une tangente (T) et son point de contact M.

527. Déterminer le foyer et la directrice d'une parabole dont on donne une tangente (T), le point de contact M, l'axe $x'x$.

528. Déterminer le foyer F d'une parabole dont on donne la directrice (D) et deux points M et M'. Le point M étant fixe, dans quelle région doit se trouver le point M' pour que le problème soit possible ?

529. On considère les paraboles qui admettent le foyer F et la tangente (T).

1° Quel est le lieu du sommet A ?

2° Quelle est l'enveloppe de la directrice?

3° Construire celle de ces paraboles dont le point de contact avec (T) est un point M donné.

4° Construire celle de ces paraboles dont le point de contact avec (T) se projette en F sur l'axe.

530. On donne deux droites (D) et (T) sécantes en O, et l'on appelle (P) toute parabole de directrice (D) et tangente à (T).

1° Ensemble des foyers F et des sommets A des paraboles (P).

2° Montrer que les paraboles (P) admettent une seconde tangente fixe perpendiculaire à (T).

3° Déterminer celles de ces paraboles qui passent par un point donné M.

531. On appelle parabole (P) les paraboles qui ont pour foyer un point F donné et dont les directrices passent par un point donné A.

1° Construire les directrices des paraboles (P) qui passent par un second point donné M. Discuter.

2° Quel est l'ensemble des points M tels que deux paraboles (P) passant par M aient leurs axes perpendiculaires ?

532. Construire une parabole tangente en deux points M et M' à deux droites (T) et (T') perpendiculaires.

533. On considère les paraboles ayant pour sommet un point A et passant par un point M.

1° Ensemble des points *m*, projections orthogonales du point M sur l'axe.
2° Ensemble des points P intersections des tangentes en M et de l'axe.
3° Ensemble des points S, intersections des tangentes en M et en A.

534. La normale en M à une parabole de sommet A coupe l'axe en N et la tangente au sommet en B. Montrer que les cercles passant par A et B sont orthogonaux au cercle de diamètre MN.

535. D'un point P on mène les tangentes PM et PM' à une parabole de foyer F, et la droite PX parallèle à l'axe. Soit Q l'intersection de PX et de la directrice. Montrer que :

1° PX passe par le milieu du segment MM'.

2° FQ est perpendiculaire à MM'.

3° La droite MM' est parallèle à la tangente à la parabole au point A commun à PX et à la parabole.

536. Étant donnée une parabole de paramètre p, construire une corde focale de longueur $2l$.

537. Démontrer que, dans la parabole, le lieu des milieux des cordes parallèles à une direction donnée est une demi-droite parallèle à l'axe.

538. Par un point P de l'axe d'une parabole, mener une normale à cette courbe.

539. On donne une corde quelconque AB d'une parabole. Montrer que si la médiatrice de cette corde coupe l'axe au point N et si M est le milieu de AB, la projection orthogonale de MN sur l'axe est égale au paramètre.

540. Construire une parabole connaissant l'axe et deux points M et M'.

541. Deux paraboles ont même foyer F et leurs directrices (D) et (D') se coupent en P. Construire leur tangente commune et leurs points communs.

542. Construire les intersections de deux paraboles de même axe.

543. Enveloppe du côté OB d'un angle AOB de grandeur constante α, dont le côté OA passe par un point fixe A et dont le sommet O décrit une droite fixe (Δ).

544. Dans le plan de deux axes rectangulaires Ox et Oy, un cercle variable passant par le point O et le point fixe F de la bissectrice de l'angle xOy, recoupe Ox en P et Oy en Q. Par le point E diamétralement opposé à F, on mène parallèlement à OF la droite EM qui coupe PQ en M.

1° Ensemble des points M.
2° Enveloppe de la droite PQ.

545. On donne un cercle fixe (O) et une corde fixe AA' ; une corde mobile CC' se déplace de manière que son milieu I décrive AA'.

Déterminer :

1° L'enveloppe de la droite CC'. Préciser les bornes de l'arc décrit par le point de contact M.

2° L'ensemble des points P, intersections des tangentes en C et C' au cercle (O). Montrer que cet ensemble est un arc de cercle et préciser les extrémités de cet arc.

546. On donne une parabole de foyer F et deux perpendiculaires à l'axe en deux points A et B équidistants du sommet S de la parabole ; une tangente variable coupe ces deux droites en A' et B'.

Démontrer que $|AA'^2 - BB'^2| = 2\ SF.BA$.

547. Enveloppe des droites telles que la différence des carrés des distances de deux points fixes A et B à ces droites, soit constante.

548. Dans un cercle variable (O) passant par deux points fixes A et B, on mène le rayon OC qui fait avec OA l'angle constant AOC $= \alpha$. Montrer que la droite OC enveloppe une parabole de foyer A.

549. On donne une droite (D), un point A de cette droite, un point B hors de cette droite. Un cercle variable (ω) passe par A et B et coupe (D) en M. Déterminer l'enveloppe des tangentes en M au cercle (ω).

550. Soient M_1, M_2, M_3 trois points d'une parabole (dans cet ordre) ; les tangentes en M_1 et en M_2 se coupent en T, les tangentes en M_2 et en M_3 se coupent en T', les tangentes en M_1 et M_3 se coupent en P. Démontrer que :

$$\frac{M_1T}{TP} = \frac{PT'}{T'M_3}$$ (Théorème d'Apollonius.)

551. Un point M se déplace sur une parabole de sommet A. Il se projette en P sur l'axe, en Q sur la tangente au sommet.

1° Montrer que la perpendiculaire menée de Q sur AM coupe l'axe en un point fixe.

2° On mène par Q une perpendiculaire à la droite PQ qui coupe l'axe en E. Montrer que le point E est fixe et trouver l'enveloppe de PQ.

552. La normale en M à une parabole coupe l'axe en N. Ensemble des milieux des segments MN.

553. Ensemble des points d'où l'on peut mener à la parabole des normales rectangulaires.

554. Ensemble des milieux des cordes focales d'une parabole.

555. Ensemble des foyers des paraboles de sommet S donné, tangentes à une droite (T) donnée.

556. On considère les paraboles P qui ont pour foyer un point donné F et dont la directrice passe par un point donné O.

1° Déterminer le lieu géométrique des points de contact des tangentes issues de O aux paraboles P.

2° Par un point M du plan, il passe en général deux paraboles P ; où doit se trouver le point M pour que ces paraboles existent et soient distinctes ? Où doit se trouver le point M pour qu'elles soient confondues ?

3° Montrer que les paraboles P restent tangentes à une droite fixe.

4° Lieu géométrique des points M tels que les paraboles qui y passent fassent entre elles un angle donné θ ; cas où $\theta = \pi/2$. (Saïgon, 1934.)

557. On donne une droite Δ et un point F (non situé sur Δ), et on considère les paraboles de foyer F tangentes à Δ.

1° Que peut-on dire de leurs directrices ? Trouver le lieu de leur sommet.

2° Déterminer celles de ces paraboles qui passent par un point donné M. Discuter suivant la position du point M.

3° Trouver le lieu des points M tels que les deux paraboles passant par M soient égales (c'est-à-dire aient le même paramètre).

4° Trouver le lieu des points M tels que les directrices des deux paraboles passant par M soient rectangulaires. — Quel est dans ce cas l'angle des tangentes en M à ces deux paraboles ?

5° Inversement, le foyer F et le point M étant fixes, on considère les deux paraboles passant par M et tangentes à la droite variable Δ. Déterminer la courbe à laquelle la droite Δ doit rester tangente pour que les deux paraboles se coupent en M sous un angle aigu donné α.

558. Deux droites rectangulaires D et d se coupent en O ; A est un point de D, F un point de d. On considère la parabole (P) de foyer F et qui est tangente à la droite D en A.

1° Construire la directrice L et le sommet S de (P). Calculer son paramètre, connaissant $OA = a$ et $OF = b$.

2° F variant sur d, les autres données demeurant fixes, déterminer le lieu de S et l'enveloppe de L.

3° A variant sur D et les autres données, dont F, demeurant fixes, déterminer le lieu du point M de la parabole (P) où la tangente est parallèle à d. (D_1 étant la parallèle à D menée par F, on pourra chercher l'équation du lieu de M par rapport à des axes de supports d et D_1).

4° Dans la même hypothèse (A variable), construire les directrices des paraboles (P) qui passent par un point donné N. Discuter.

Lieu du point N pour que les directrices des deux paraboles passant par N fassent entre elles un angle donné α $(0 < \alpha < \pi)$.

(Égypte, 1949.)

559. On considère une parabole définie par son foyer F, sa directrice D. Une sécante variable Δ, passant par F, coupe D en P.

1° Construire les points d'intersection M et M′ de Δ et de la parabole et les tangentes en ces points. Où se coupent-elles ? Quel angle forment-elles ? Montrer que le cercle Γ de diamètre MM′ est tangent à D.

2° Construire la polaire de F par rapport à Γ. Quelle est son enveloppe quand Δ varie ?

3° De P on mène à Γ la tangente autre que D. Quelle est son enveloppe ? Quel est le lieu de son point de contact avec Γ ?

4° Définir le milieu I de MM′ au moyen de Γ, D, Δ et trouver son lieu, quand Δ varie. Ce lieu est une parabole, dont on placera le foyer et la directrice.

5° Démontrer que Γ déjà tangent à D est aussi tangent à un cercle fixe. En déduire qu'il existe un point ayant même puissance par rapport aux cercles Γ.

(Lille, 1948.)

560. Soient Δ et Δ' deux droites situées dans un même plan et A un point fixe de Δ.

On considère un cercle variable tangent en A à Δ et qui coupe Δ' en deux points B et C.

1° Montrer que les bissectrices de l'angle A du triangle ABC sont fixes et que les bissectrices des angles B et C restent tangentes à une parabole.

2° Soient A', B', C' les pieds des hauteurs du triangle ABC issues respectivement de A, B, C.

Prouver que le centre du cercle circonscrit au triangle A'B'C' reste situé sur une droite fixe.

3° Montrer que les hauteurs BB' et CC' restent tangentes à une parabole dont le foyer F est le symétrique de A par rapport à Δ'. (Strasbourg, 1931.)

561. Soient un angle droit xOy et un point P à l'intérieur.

1° Montrer qu'il existe une parabole de foyer P tangente à Ox et à Oy. Construire les points de contact A et B avec Ox et Oy. Montrer que P est situé sur AB. Comparer les directions de OP et de l'axe de la parabole par rapport à Ox et Oy.

2° On considère les diverses paraboles tangentes à Ox en un point donné A et à Oy en un point variable B. Lieu du foyer F de ces paraboles.

On désigne OA par a et l'angle aigu AOF par θ. Calculer le paramètre p de la parabole (distance de F à la directrice) en fonction de a et de θ. Étudier et représenter graphiquement sa variation en prenant $u = \sin \theta$ comme variable. Maximum de p.

3° La perpendiculaire à Ox en A coupe la parabole du 1° en un second point A'. Construire géométriquement A'. Calculer AA' en fonction de a et de θ. Montrer que AA' $=$ 4 OB.

4° Montrer que lorsque θ varie, A restant fixe, la tangente à la parabole en A' rencontre la droite Ox en un point fixe C.

A quelle courbe sont tangentes les différentes normales en A' à la parabole ?

562. 1° Démontrer que si deux points d'une parabole sont alignés avec le foyer, les tangentes en ces deux points se coupent sur la directrice. Énoncer et démontrer la réciproque.

2° Étant donné deux droites rectangulaires OX, OY, déterminer la parabole tangente à ces deux droites en deux points donnés A, B, par la construction de son foyer et de sa directrice. Montrer que son axe est parallèle à une médiane du triangle OAB.

3° On projette un point variable M de la droite AB, en P sur OX et en Q sur OY. Montrer que le cercle MPQ a deux points fixes et en déduire que la droite PQ reste tangente à une parabole fixe (P). A-t-on ainsi toutes les tangentes à (P) ?

4° OX et OY restant fixes, on fait pivoter la droite AB autour d'un point fixe S, pris hors de OX et de OY. La parabole (P) du n° 3 varie. Montrer qu'elle reste tangente à une droite fixe (D). Si T est le point de contact, variable, de (P) avec (D), montrer que les droites ST et AB sont également inclinées sur OX. Réciproquement, T étant donné sur (D), déterminer la droite AB qui définit une parabole (P) tangente à (D) en T.

563. D'un point T extérieur à la parabole $y^2 = 2px$, on mène les deux tangentes à cette parabole ; soient M et M' les points de contact, K et K' les projections du foyer F sur TM et TM'. On sait que K et K' sont sur Oy.

Préciser la position relative des points T, F et ω, ce dernier point étant le centre du cercle FKK'.

A) On suppose que K et K' varient de telle sorte que leur milieu I reste fixe. Démontrer.

1° Que T décrit une demi-droite issue d'un point que l'on recherchera.

2° Que MM′ reste parallèle à une direction fixe que l'on construira. Construire T lorsqu'en outre MM′ passe par F.

B) On suppose maintenant que K et K′ varient de telle sorte que le rapport de leurs ordonnées soit constant. On posera $\overline{OK} = t$ et $\overline{OK'} = \lambda t$ (donc λ est constant et t variable).

1° Calculer les ordonnées de M et de T et vérifier qu'elles sont proportionnelles à t.

2° Calculer le rapport des abscisses de M et de T.

3° En conclure que le lieu de T est une parabole homothétique de la parabole donnée. Soit $f(\lambda)$ le rapport d'homothétie. Étudier les variations de cette fonction $f(\lambda)$; montrer que pour les valeurs de λ qui rendent $f(\lambda)$ maximal ou minimal, le lieu de T est évident.

Montrer que les tangentes en T à la parabole lieu de T passe par le milieu I du segment KK′. (Maroc, 34.)

564. 1° Étant données une parabole (P) et une sécante (D) de cette parabole, on sait que la détermination des points M′, M″ où cette sécante coupe la parabole, se ramène à la construction des cercles passant par deux points et tangents à une droite. Déduire de cette construction le lieu géométrique décrit par le milieu K de M′M″ lorsque la droite (D) se déplace parallèlement à elle-même, la parabole (P) restant fixe.

2° Soient $T\alpha$, $T\beta$ les tangentes menées par un point T à la parabole (P) ; soient A et B leurs points de contact respectifs et F le foyer de la parabole. Montrer que les triangles AFT, TFB sont semblables. En déduire le lieu décrit par le point F lorsque (P) varie de manière que les droites $T\alpha$, $T\beta$ restent fixes, le point A étant fixe sur $T\alpha$ et le point B décrivant la droite $T\beta$.

3° Construire le foyer d'une parabole dont on donne trois tangentes ainsi que le point de contact de l'une d'elles.

Construire le foyer et la directrice d'une parabole dont on donne deux tangentes TA, TB et leurs points de contact respectifs A et B.

Calculer le paramètre p de cette parabole en fonction des longueurs $TA = a$ et $TB = b$ dans le cas particulier où l'angle ATB est droit. (Espagne, 1948.)

565. Une parabole (P) a pour foyer F et pour directrice (Δ). L est le milieu d'une corde fixe M_1M_2 de (P) et λ, m_1, m_2 les projections orthogonales de L, M_1 et M_2 sur (Δ).

1° Montrer que $F\lambda$ est perpendiculaire à M_1M_2.

2° N étant un troisième point de (P), on désigne par n sa projection orthogonale sur (Δ), par n_1 et n_2 les milieux de nm_1 et nm_2 et par n' le symétrique de n par rapport à F. Montrer que $(NM_1, NM_2) = (n'm_1, n'm_2) \bmod. \pi$.

3° Construire les points d'intersection de (P) avec un cercle (C) de centre O passant par M_1 et M_2.

Montrer qu'il peut exister deux points d'intersection N_1 et N_2 généralement distincts de M_1 et M_2 et que, pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que le point O soit sur une certaine demi-droite O_1X que l'on déterminera. Que peut-on dire du cercle (C_1) de centre O_1 passant par M_1 et M_2 ?

4° Montrer que, lorsque O décrit O_1X, N_1N_2 se déplace parallèlement à une direction fixe et qu'une bissectrice de (M_1M_2, N_1N_2) est parallèle à l'axe de la parabole.

J étant le milieu de N_1N_2 et I le milieu de JL, démontrer que I est sur l'axe de (P). (Aix, 1951.)

566. Dans tout ce qui suit on appellera paraboles (P) toutes les paraboles du plan dont les directrices sont parallèles à une direction fixe donnée.

1° Ensembles des foyers et des sommets des paraboles (P) dans les deux cas suivants :

a) (P) est tangente à une droite donnée, en un point donné ;

b) (P) est tangente à deux droites données.

Déterminer le foyer et la directrice de (P) tangente à trois droites données. Lieu du foyer de (P) passant par deux points donnés.

2° Montrer que deux paraboles (P) données par leurs foyers et leurs directrices sont homothétiques et construire le centre d'homothétie. En déduire que toutes les paraboles du plan sont des courbes semblables et déterminer le centre de similitude de deux paraboles quelconques données.

Où se trouve le centre d'homothétie de deux paraboles (P) tangentes à une même droite ? Déterminer les tangentes communes à deux paraboles (P) données.

Quel est le centre d'homothétie de deux paraboles (P) tangentes en un point donné ?

En déduire les lieux trouvés dans les cas *a)* et *b)* de la section 1°. (Dijon, 1952.)

567. On appelle parabole (P) les paraboles admettant pour directrice une droite fixe (D) et passant par un point fixe A.

1° Quel est l'ensemble des foyers F des paraboles (P) ? Montrer que l'ensemble des sommets S de (P) est une conique, dont on déterminera, sans calculs, les sommets et les foyers.

2° La tangente et la normale en A à la parabole (P) coupent son axe respectivement en T et en N. Ensembles des points T et N.

3° La droite AF recoupe (P) en B. Trouver l'ensemble (π) des points B et montrer que (P) et (π) sont tangents en B.

4° Construire la parabole (P) qui passe par un second point donné M [On montrera que M doit être intérieur à la courbe (π)]. (Dakar, 1959.)

CHAPITRE 33

TANGENTES AUX CONIQUES BIFOCALES

1. Tangente à l'ellipse.

L'ellipse est donnée par le foyer F et le cercle directeur (F′).

Soient M et M′ deux points de l'ellipse : ils sont les centres de cercles (M) et (M′) tangents au cercle directeur en φ et φ'.

Faisons tendre M′ vers M : la tangente à l'ellipse en M, si elle existe, est la limite de la droite MM′.

On connaît le centre radical des cercles (F′), (M) et (M′) : c'est un point P commun aux tangentes à (F′) en φ et φ'. Le point P appartient à la bissectrice de $(\overrightarrow{F'\varphi}, \overrightarrow{F'\varphi'})$ qui, à la limite, est confondue avec la droite $F'\varphi$.

Le point P appartient aussi à la tangente en φ au cercle (F′), donc, à la limite le point P est en φ.

La droite des centres, MM′, est perpendiculaire à l'axe radical FP des cercles (M) et (M′), à la limite elle est la perpendiculaire à $F\varphi$ menée de M, et l'on sait que cette perpendiculaire est aussi la médiatrice de $F\varphi$.

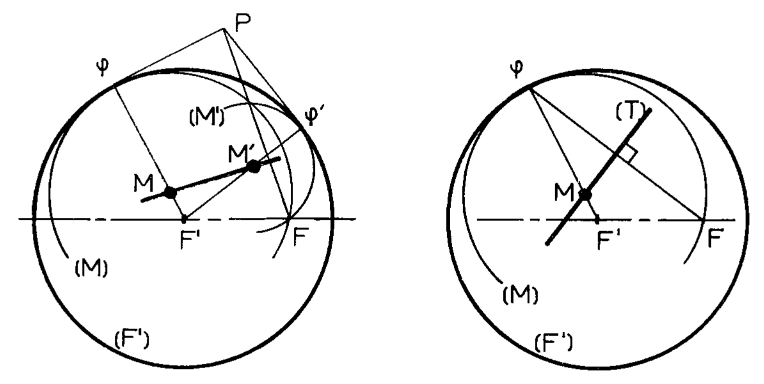


Fig. 1.

On peut énoncer :

Une ellipse admet une tangente en chacun de ses points, et le symétrique du foyer par rapport à la tangente est un point du cercle directeur relatif à l'autre foyer.

Réciproquement, à un point φ donné sur le cercle (F′), il correspond un point M unique de l'ellipse : ce point appartient à la droite F′φ et à la médiatrice de Fφ, or, d'après le théorème direct, cette médiatrice est la tangente en M à l'ellipse, donc :

Une droite est tangente à l'ellipse si, et seulement si, le symétrique d'un foyer par rapport à cette droite appartient au cercle directeur relatif à l'autre foyer.

2. Propriétés des tangentes à l'ellipse.

La propriété qui vient d'être établie permet d'énoncer :

L'enveloppe des médiatrices des segments joignant les différents points d'un cercle (F′) à un point fixe F intérieur au cercle (F′) est l'ellipse de foyer F et de cercle directeur (F′).

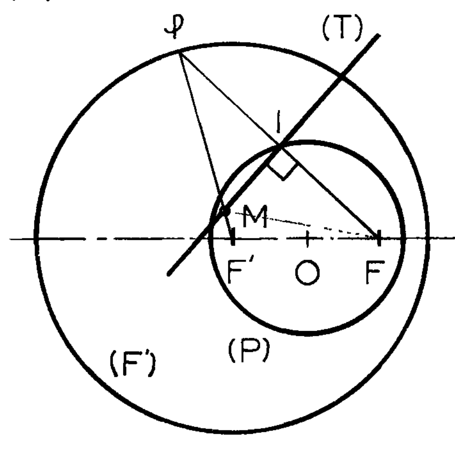


Fig. 2 a.

Le milieu I de Fφ est aussi la projection orthogonale du foyer F sur la tangente. La relation $\overrightarrow{FI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{F\varphi}$ montre que I appartient à l'homologue du cercle directeur (F′) dans l'homothétie $\left(F, \frac{1}{2}\right)$, c'est-à-dire au cercle principal (P).

Réciproquement, si la projection orthogonale I du foyer F sur une droite (T) appartient au cercle principal, l'homothétie (F, 2) montre que le symétrique du foyer F par rapport à cette droite appartient au cercle directeur (F′), donc que la droite (T) est tangente à l'ellipse.

Nous énoncerons :

Une droite est tangente à l'ellipse si, et seulement si, la projection orthogonale d'un foyer sur cette droite appartient au cercle principal.

Cette propriété peut aussi s'énoncer :

L'enveloppe des droites, telles que la projection orthogonale d'un point F sur chacune d'elles soit sur un cercle (P), est l'ellipse de foyer F et de cercle principal (P) si le point F est intérieur au cercle (P).

ou encore :

L'enveloppe d'un côté d'un angle droit dont le sommet décrit un cercle (P), et dont l'autre côté passe par un point fixe F intérieur au cercle (P), est l'ellipse de foyer F admettant (P) pour cercle principal.

La tangente (T) étant médiatrice de Fφ est bissectrice de l'angle FMφ. Le point M est sur le segment F$'\varphi$, donc les angles FMφ et FMF$'$ sont de part et d'autre de MF ; on en déduit que la tangente (T) est bissectrice extérieure de l'angle FMF$'$.

La tangente en M étant unique, ainsi que la bissectrice extérieure de l'angle FMF$'$, on peut énoncer :

Une droite est tangente à l'ellipse en un point M si, et seulement si, elle est bissectrice extérieure de l'angle des rayons vecteurs du point M.

De cette propriété on peut déduire :

1) Une droite est normale à l'ellipse en un point M si, et seulement si, elle est bissectrice intérieure de l'angle des rayons vecteurs du point M.

2) La tangente et la normale à l'ellipse en un point M forment, avec les rayons vecteurs du point M, un faisceau harmonique.

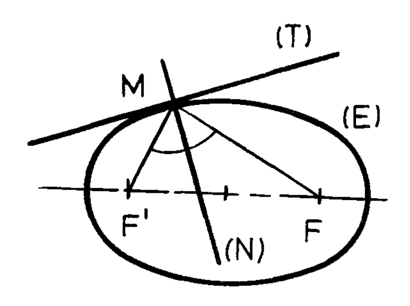


Fig. 2 b.

3. Tangente à l'hyperbole.

L'hyperbole (H) est donnée par le foyer F et le cercle directeur (F').

Soient M et M' deux points d'une même branche de l'hyperbole : ils sont les centres de cercles (M) et (M') tangents au cercle directeur en φ et φ'.

Faisons tendre M' vers M : la tangente à l'hyperbole en M, si elle existe, est la limite de la droite MM'.

On connaît le centre radical des cercles (F') ,(M) et (M') : c'est un point P commun aux tangentes à (F') en φ et φ'.

Le point P appartient à la bissectrice de $(\overrightarrow{F'\varphi}, \overrightarrow{F'\varphi'})$ qui, à la limite, est confondue avec la droite Fφ.

Le point P appartient aussi à la tangente en φ au cercle (F'), donc, à la limite le point P est en φ.

La droite des centres MM' est perpendiculaire à l'axe radical FP des cercles (M) et (M') ; à la limite elle est la perpendiculaire à Fφ menée de M, et l'on sait que cette perpendiculaire est aussi la médiatrice de Fφ.

On peut donc énoncer :

Une hyperbole admet une tangente en chacun de ses points et le symétrique du foyer par rapport à la tangente est un point du cercle directeur relatif à l'autre foyer.

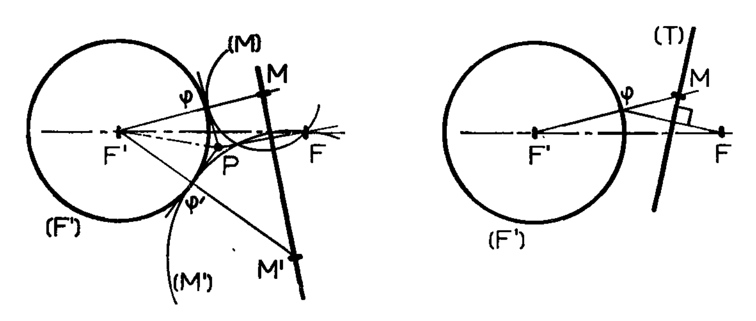


Fig. 3.

Réciproquement, à un point φ donné sur le cercle directeur (F'), il correspond un point M unique de l'hyperbole ; ce point

appartient à la droite $F'\varphi$ et à la médiatrice de $F\varphi$, or, d'après le théorème direct, cette médiatrice est la tangente en M à l'hyperbole.

Dans le cas où le point φ est aussi le point de contact avec (F') d'une tangente issue de F, le point M est rejeté à l'infini, mais on sait que la médiatrice de $F\varphi$ est asymptote à l'hyperbole : les asymptotes sont les limites des tangentes en M à l'hyperbole lorsque le point M s'éloigne indéfiniment.

Nous énoncerons :

Une droite est tangente à l'hyperbole si, et seulement si, le symétrique du foyer par rapport à cette droite appartient au cercle directeur relatif à l'autre foyer.

4. Propriété des tangentes à l'hyperbole.

La propriété précédente peut aussi s'énoncer :

L'enveloppe des médiatrices des segments joignant les différents points d'un cercle (F') à un point fixe F extérieur à ce cercle, est l'hyperbole de foyer F et de cercle directeur (F').

Le milieu I de $F\varphi$ est aussi la projection du foyer F sur la tangente. La relation $\overrightarrow{FI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{F\varphi}$ montre que I appartient à l'homologue du cercle directeur (F') dans l'homothétie $\left(F\ ;\ \frac{1}{2}\right)$, c'est-à-dire au cercle principal (P).

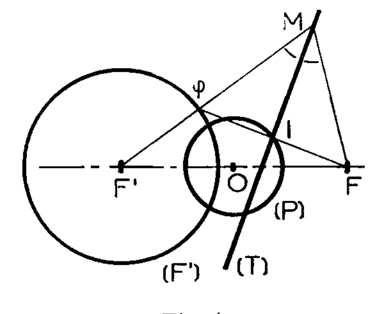


Fig. 4.

Réciproquement, si la projection du foyer F sur une droite (T) appartient au cercle principal, l'homothétie (F, 2) montre que le symétrique du foyer F par rapport à cette droite appartient au cercle directeur (F'), donc que la droite (T) est tangente à l'hyperbole.

Nous énoncerons :

Une droite est tangente à l'hyperbole si, et seulement si, la projection d'un foyer sur cette droite appartient au cercle principal.

Cette propriété peut aussi s'énoncer :

L'enveloppe des droites telles que la projection orthogonale d'un point F sur chacune d'elles soit sur un cercle (P), est une hyperbole de foyer F et de cercle principal (P) si le point F est extérieur au cercle (P).

ou encore :

L'enveloppe d'un côté d'un angle droit dont le sommet décrit un cercle (P), et dont l'autre côté passe par un point fixe F extérieur à ce cercle, est l'hyperbole de foyer F admettant le cercle (P) pour cercle principal.

La tangente (T) étant médiatrice de Fφ est bissectrice de l'angle FMφ. Le point M est extérieur au segment F'φ, donc les angles FMφ et FMF' sont d'un même côté de MF ; on en déduit que la tangente (T) est bissectrice intérieure de l'angle FMF'.

La tangente en M étant unique, ainsi que la bissectrice intérieure de l'angle FMF', on peut énoncer :

Une droite est tangente à l'hyperbole en un point M si, et seulement si, elle est bissectrice intérieure de l'angle des rayons vecteurs du point M.

De cette propriété on peut déduire :

1) Une droite est normale à l'hyperbole en un point M si, et seulement si, elle est bissectrice extérieure de l'angle des rayons vecteurs du point M.

2) La tangente et la normale à l'hyperbole en un point M forment, avec les rayons vecteurs du point M, un faisceau harmonique.

5. Projection orthogonale de deux points sur une droite.

Soient I et I' les projections orthogonales de deux points F et F', sur une droite (Δ), O le milieu de FF' et J le symétrique de I par rapport à O.

Le triangle JII′ est rectangle en I′, donc inscriptible dans le cercle de diamètre IJ et de centre O.

La puissance de F′ par rapport à ce cercle est :

$\overline{F'I'} \cdot \overline{F'J} = F'O^2 - OI^2$

et puisque FI est symétrique de F′J par rapport à O :

$\overline{F'I'} \cdot \overline{FI} = OI^2 - FO^2$ (1)

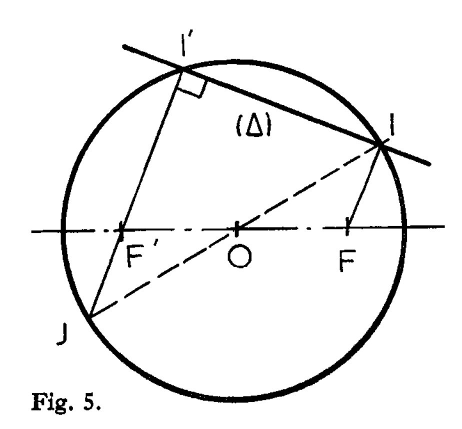


Fig. 5.

6. Propriété des tangentes à une conique à centre.

Une droite (T) est tangente à une conique à centre si, et seulement si, la projection orthogonale de l'un des foyers sur cette droite appartient au cercle principal (P), soit avec les notations ci-dessus, si OI $= a$.

La relation (1) devient $\overline{F'I'} \cdot \overline{FI} = a^2 - c^2$

dans le cas de l'ellipse : $\overline{F'I'} \cdot \overline{FI} = b^2$

dans le cas de l'hyperbole : $\overline{F'I'} \cdot \overline{FI} = -b^2$

On en déduit que ce produit est positif dans le cas de l'ellipse, donc que les deux foyers sont d'un même côté d'une tangente quelconque.

Ce produit est négatif dans le cas de l'hyperbole, donc les deux foyers sont de part et d'autre d'une tangente quelconque.

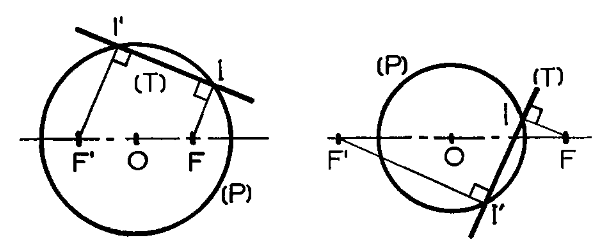


Fig. 6.

7. Tangentes parallèles à une direction donnée (δ) : ellipse.

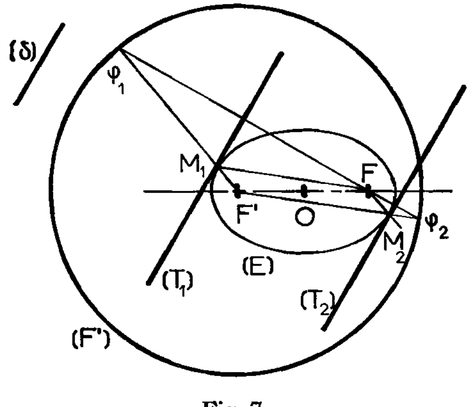


Fig. 7.

L'ellipse est donnée par le cercle directeur (F′) et le foyer F.

Le symétrique du foyer F par rapport à la tangente cherchée appartient au cercle directeur (F′) et à la droite passant par F et perpendiculaire à la direction donnée (δ). Cette perpendiculaire coupe le cercle (F′) en deux points φ_1 et φ_2. Il existe deux tangentes parallèles à (δ) : ce sont les médiatrices de $F\varphi_1$ et $F\varphi_2$ respectivement.

Les triangles $\varphi_1F'\varphi_2$, φ_1M_1F, $FM_2\varphi_2$ sont isocèles et ont leurs angles respectivement égaux, ce qui montre que le quadrilatère $M_1F'M_2F$ est un parallélogramme ayant pour centre le milieu O de FF′.

On peut donc énoncer :

Une ellipse admet deux tangentes parallèles à une direction donnée, les points de contact de ces tangentes sont symétriques par rapport au centre de l'ellipse.

8. Tangentes parallèles à une direction donnée (δ) : hyperbole.

L'hyperbole est donnée par le cercle directeur (F′) et le foyer F.

Le symétrique du foyer F par rapport à la tangente cherchée appartient au cercle directeur (F′) et à la perpendiculaire à (δ) issue de F.

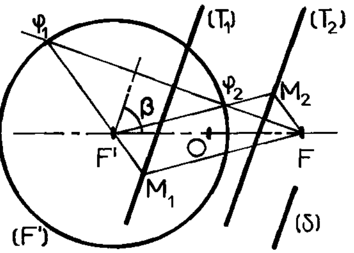


Fig. 8 a.

1) si cette perpendiculaire à (δ) ne coupe pas le cercle (F′) il n'existe aucune tangente parallèle à (δ).

2) Si cette perpendiculaire à (δ) coupe le cercle (F′) en deux points φ_1 et φ_2 distincts, il existe deux tangentes parallèles à (δ) : ce sont les médiatrices de $F\varphi_1$ et $F\varphi_2$ respectivement.

Si l'on désigne par β l'angle aigu de F′F et de (δ), ce cas est réalisé si $FF'.\cos\beta < 2a$, donc si $\cos\beta < a/c$.

Dans ce eas, les triangles $\varphi_1F'\varphi_2$, φ_1M_1F, φ_2M_2F sont isocèles et ont leurs angles respectivement égaux, ce qui montre que M_1F et $F'M_2$ sont parallèles ainsi que M_2F et $F'M_1$, donc que le quadrilatère $M_1F'M_2F$ est un parallélogramme ayant pour centre le milieu O de F′F.

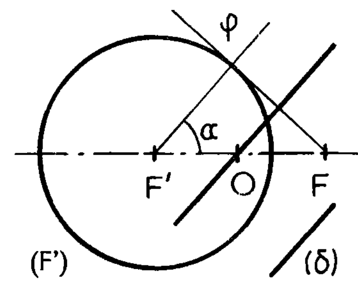


Fig. 8 b.

3) Si la perpendiculaire à (δ) issue de F est tangente au cercle (F′) en φ, on sait que la médiatrice de $F\varphi$ est une asymptote à l'hyperbole ce qui correspond à la limite d'une tangente lorsque le point de contact s'éloigne indéfiniment. Ce cas est réalisé si $\cos\beta = \cos\alpha = a/c$.

9. Tangentes issues d'un point donné : ellipse.

L'ellipse (E) est donnée par le cercle directeur (F′) et le foyer F.

Une droite (T) est tangente à l'ellipse si, et seulement si, le symétrique φ du foyer F par rapport à la droite (T) est sur le cercle directeur (F′).

La droite (T), médiatrice de $F\varphi$ passe par P si, et seulement si, $P\varphi = PF$, donc

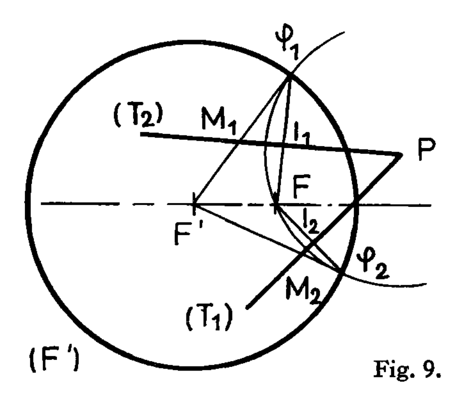


Fig. 9.

un point φ, s'il existe, appartient à l'intersection du cercle (F′) et du cercle (P, PF).

Il existe un point φ unique si le cercle (P, PF) est tangent au cercle (F′), donc si le point P est un point de l'ellipse.

Il existe deux points φ si ces deux cercles se coupent donc si :

$$|PF - 2a| < PF' < PF + 2a$$

ce qui s'écrit :

$$\begin{cases} PF + 2a > PF' & \text{ou} & PF' - PF < 2a & (1) \\ PF - 2a < PF' & & PF - PF' < 2a & (2) \\ 2a - PF < PF' & & PF + PF' > 2a & (3) \end{cases}$$

les relations (1) et (2) sont vérifiées $\forall$P, car dans tout triangle FPF′ on a :

$$|PF' - PF| < FF' = 2c$$

à fortiori : $$|PF' - PF| < 2a.$$

L'inéquation (3) est vérifiée si, et seulement si, P est extérieur à l'ellipse : il existe alors deux tangentes issues de P, ce sont les médiatrices des segments $F\varphi_1$ et $F\varphi_2$.

La construction des tangentes issues de P montre que la droite PF′ est bissectrice de l'angle des rayons vecteurs ($F'M_1$, $F'M_2$). (Premier théorème de Poncelet).

Si on appelle I_1 et I_2 les milieux des segments $F\varphi_1$ et $F\varphi_2$, I_1I_2 est parallèle à $\varphi_1\varphi_2$. Le triangle PI_1I_2 est inscriptible dans le cercle de diamètre PF, donc les côtés PI_1 et PI_2, la hauteur PF′ et le diamètre PF forment deux couples de droites isogonales. Les angles (PM_1, PM_2) et (PF′, PF) ont donc mêmes bissectrices. (Deuxième théorème de Poncelet).

10. Tangentes issues d'un point P donné : hyperbole.

L'hyperbole est donnée par le cercle directeur (F′) et le foyer F.

Une droite (T) est tangente à l'hyperbole si, et seulement si, le symétrique φ du foyer F par rapport à la droite (T) appartient au cercle directeur (F′).

La droite (T) médiatrice de $F\varphi$ passe par P si, et seulement si, $P\varphi = PF$; un point φ s'il existe, appartient donc à l'intersection du cercle (F′) et du cercle (P, PF).

Il existe un point φ unique si le cercle (P, PF) est tangent au cercle (F′), donc si le point P appartient à l'hyperbole.

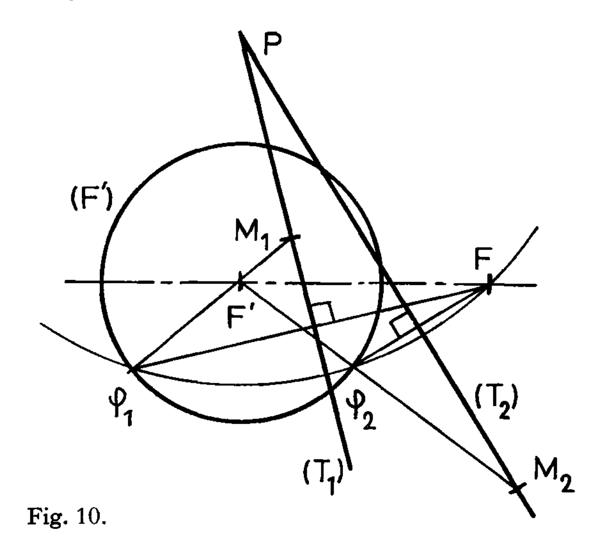


Fig. 10.

Il existe deux points φ si les deux cercles se coupent, donc si :

$$|PF - 2a| < PF' < PF + 2a$$

ce qui s'écrit :

$$\begin{cases} 2a - PF < PF' \\ PF - 2a < PF' \\ PF' < PF + 2a \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} PF + PF' > 2a & (1) \\ PF - PF' < 2a & (2) \\ PF' - PF < 2a & (3) \end{cases}$$

La relation (1) est vérifiée $\forall P$, car dans tout triangle FPF′ on a :

$$PF + PF' > FF'$$

soit

$$PF + PF' > 2c > 2a$$

Les relations (2) et (3) sont équivalentes à

$$|PF - PF'| < 2a$$

elles sont vérifiées si, et seulement si, P est extérieur à l'hyperbole. Il existe alors deux tangentes issues de P : ce sont les médiatrices des segments $F\varphi_1$ et $F\varphi_2$.

La construction des tangentes issue de P montre que la droite PF′ est bissectrice de l'angle des rayons vecteurs ($F'M_1$, $F'M_2$). (Premier théorème de Poncelet).

Si on appelle I_1 et I_2 les milieux des segments $F\varphi_1$ et $F\varphi_2$, I_1I_2 est parallèle à $\varphi_1\varphi_2$. Le triangle PI_1I_2 est inscriptible dans le cercle de diamètre PF, donc les côtés PI_1 et PI_2, la hauteur PF′ et le diamètre PF forment deux couples de droites isogonales. Les angles (PM_1, PM_2) et (PF′, PF) ont donc mêmes bissectrices. (Deuxième théorème de Poncelet).

11. Angle de deux tangentes à l'ellipse ou à l'hyperbole.

Deux tangentes issues d'un point P sont les médiatrices de $F\varphi_1$ et $F\varphi_2$, donc les bissectrices de $(\overrightarrow{PF}, \overrightarrow{P\varphi_1})$ et $(\overrightarrow{PF}, \overrightarrow{P\varphi_2})$ et l'on a :

$$(PF, PM_1) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PF}, \overrightarrow{P\varphi_1}) \qquad \text{mod } \pi$$

$$(PF, PM_2) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PF}, \overrightarrow{P\varphi_2})$$

par différence : $$(PM_1, PM_2) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{P\varphi_1}, \overrightarrow{P\varphi_2})$$

or PF′ est bissectrice de $(\overrightarrow{P\varphi_1}, \overrightarrow{P\varphi_2})$ donc :

$$(PM_1, PM_2) = (P\varphi_1, PF') = (PF', P\varphi_2) \qquad \text{mod. } \pi$$

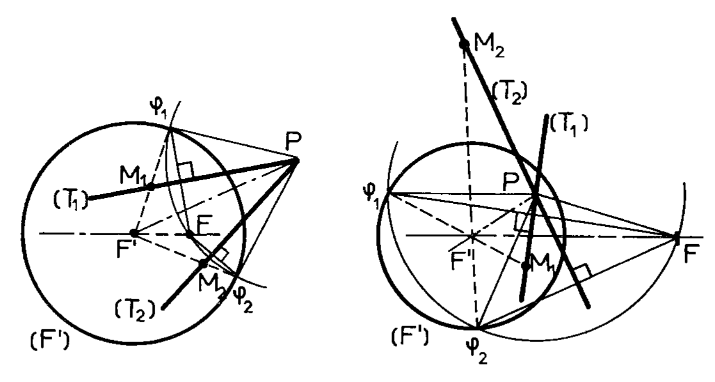


Fig. 11.

12. Cercle orthoptique ou cercle de Monge.

Les tangentes issues de P sont perpendiculaires entre elles si :

$$(PM_1, PM_2) = (P\varphi_1, PF') = \pi/2 \qquad \text{mod. } \pi$$

donc si le triangle φ_1PF' est rectangle en P, c'est-à-dire si :

$$F'\varphi_1^2 = P\varphi_1^2 + PF'^2$$

avec $P\varphi_1 = PF$ $\qquad 4a^2 = PF^2 + PF'^2$

O étant le milieu de FF′, on aura :

$$PF^2 + PF'^2 = 2\,OP^2 + 2\,OF^2 = 2\,OP^2 + 2c^2$$

la relation précédente devient :

$$OP^2 = 2a^2 - c^2$$

ce qui montre que l'ensemble des points P, d'où l'on peut mener deux tangentes perpendiculaires entre elles, est le cercle de centre O et de rayon $R = \sqrt{2a^2 - c^2}$.

Ce cercle est appelé cercle orthoptique ou cercle de Monge.

13. Problème.

Soit une ellipse de centre O définie par ses foyers F_1 et F_2 et la longueur $2a$. $M(x, y)$ est un point quelconque de l'ellipse, $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ les vecteurs unitaires de $\overrightarrow{F_1M}$ et $\overrightarrow{F_2M}$, r_1 et r_2 leurs mesures algébriques.

x, r_1, r_1, $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ peuvent être considérés comme des fonctions de la variable $\theta = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$. Utiliser la dérivée de la somme vectorielle :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OF_1} + \overrightarrow{F_1M} = \overrightarrow{OF_2} + \overrightarrow{F_2M}$$

pour montrer que la tangente à l'ellipse est bissectrice extérieure de l'angle F_1MF_2.

La somme vectorielle s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OF_2} + r_1\vec{u}_1 = \overrightarrow{OF_2} + r_2\vec{u}_2$$

que l'on dérive :

$$(\overrightarrow{OM})' = r'_1\vec{u}_1 + r_1\vec{u}'_1 = r'_2\vec{u}_2 + r_2\vec{u}'_2$$

la relation $F_1M + F_2M = 2a$ caractéristique des points de l'ellipse s'écrit :

$$r_1 + r_2 = 2a$$

et en dérivant : $r'_1 + r'_2 = 0$

soit : $r'_1 = -r'_2$.

Fig. 13.

Cette relation montre que les projections orthogonales de $(\overrightarrow{OM})'$ sur $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ ont des mesures opposées, donc que $(\overrightarrow{OM})'$ est parallèle à la bissectrice extérieure de $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$; or on sait que $(\overrightarrow{OM})'$ est porté par la tangente à l'ellipse il en résulte que la tangente à l'ellipse est bissectrice extérieure de F_1MF_2.

14. Intersection d'une ellipse et d'une droite.

L'ellipse est donnée par son cercle directeur (F') et le foyer F.

Un cercle passant par F est centré sur la droite (Δ) si, et seulement si, il passe aussi par F_1 symétrique de F par rapport à (Δ) donc s'il appartient au faisceau à points de base F et F_1. Chercher les points communs à la droite (Δ) et à l'ellipse revient donc à chercher les centres des cercles qui sont tangents au cercle (F') et appartiennent au faisceau. On sait construire de tels cercles (n° 17-7).

On trace un cercle auxiliaire (C) passant par F et F_1 et qui coupe le cercle (F′) en I et I′. Si les droites FF_1 et II′ se coupent en un point **P** extérieur au cercle (F′), on trace $P\varphi_1$ et $P\varphi_2$ tangentes à ce cercle : φ_1 et φ_2 sont les points de contact du cercle (F′) et des cercles cherchés. Les centres M_1 et M_2 sont les points de (Δ) alignés respectivement avec F′ et φ_1 ou F′ et φ_2.

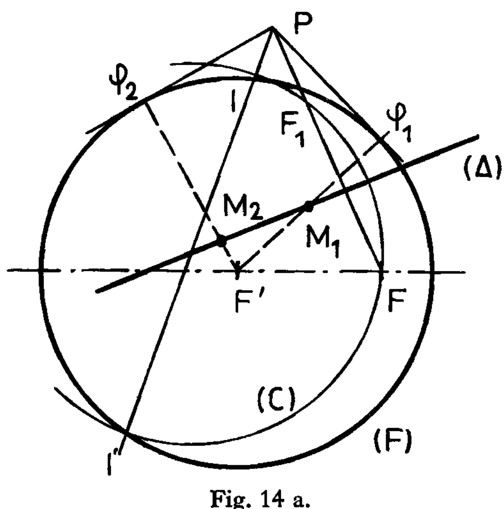


Fig. 14 a.

Discussion. La construction précédente suppose que 4 conditions sont réalisées :

1) F et F_1 sont distincts.
2) P existe, donc II′ et FF_1 ne sont pas parallèles.
3) Il existe une ou plusieurs tangentes à (F′) issues de P.
4) F′φ coupe la droite (Δ).

La condition (4) est réalisée si P existe, puisque F′φ et (Δ) sont respectivement perpendiculaires aux droites sécantes Pφ et PF.

La condition (3) est réalisée soit si le point P est sur le cercle (F′) (voir 3me cas particulier), soit si le point P est extérieur au cercle (F′) ce qui a lieu si, et seulement si, F_1 est intérieur au cercle (F′) (voir nº 17-7).

Dans ce dernier cas, et si les autres conditions sont réalisées, il existe deux tangentes $P\varphi_1$ et $P\varphi_2$ auxquelles correspondent deux points M_1 et M_2 communs à la droite (Δ) et à l'ellipse.

1er cas particulier ; (Δ) passe par F. (fig. 14 b).

Dans ce cas F et F_1 sont confondus. Les cercles (M) appartiennent au faisceau singulier dont l'axe radical est la perpendiculaire à la droite (Δ) en F. On détermine le point P à l'aide d'un cercle auxiliaire et la construction se poursuit comme dans le cas général, mais on remarque que :

1) le point P existe sauf si (Δ) passe en outre par F′ ;

2) le point P est extérieur au cercle (F′) car :
$\overline{PI} \cdot \overline{PI'} = PF^2 \Rightarrow$ P extérieur à II′.

3) $PF = P\varphi_1 = P\varphi_2$ ce qui donne immédiatement les points de contact sur le cercle (P, PF).

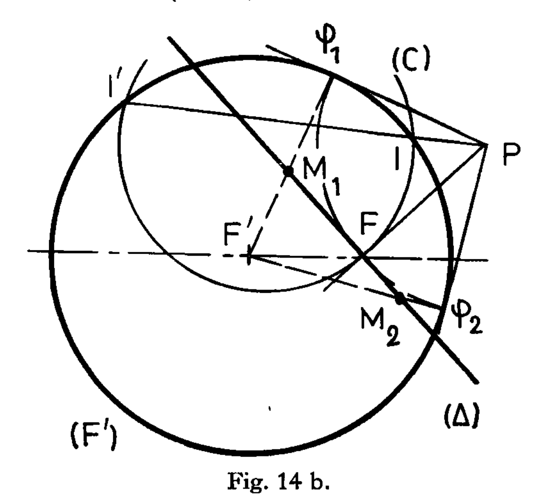


Fig. 14 b.

2me cas particulier : II′ est parallèle à FF_1 (fig. 14 c).

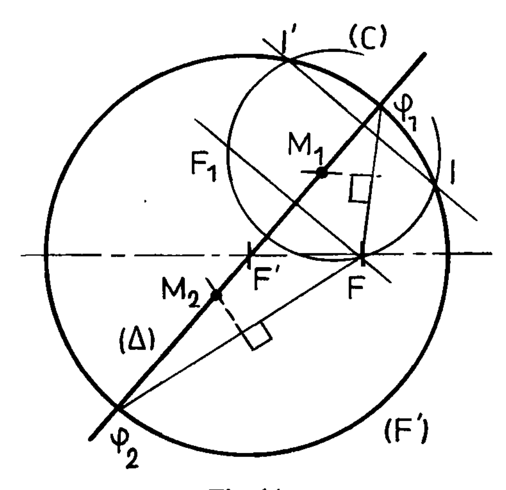


Fig. 14 c.

Dans ce cas, les cercles (C), (F′) et (M) n'admettent pas de centre radical, ce qui n'a lieu que si leurs centres sont alignés. Le point de contact d'un cercle (M) et du cercle (F′) est alors sur la droite des centres (Δ) ce qui détermine immédiatement les deux points de contact φ_1 et φ_2. Les centres M_1 et M_2 sont les intersections de (Δ) et des médiatrices de $F\varphi_1$ et $F\varphi_2$ respectivement.

3me cas particulier : F_1 est sur le cercle (F′) (fig. 14 d).

On sait que dans ce cas la droite (Δ) est tangente à l'ellipse. Le point de contact est aligné avec F_1 et F′.

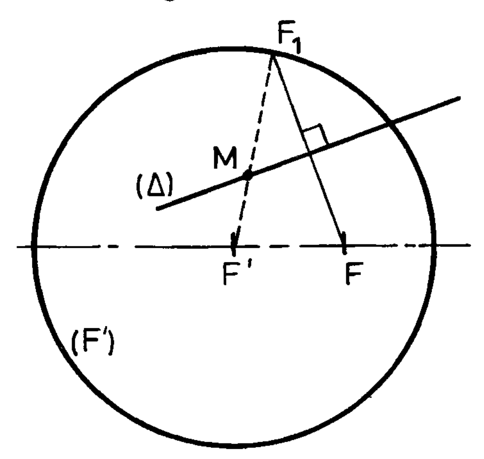


Fig. 14 d.

15. Intersection d'une hyperbole et d'une droite.

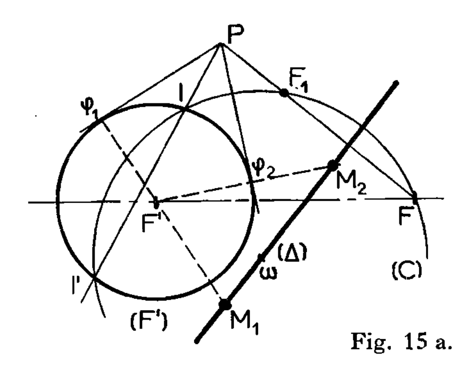


Fig. 15 a.

L'hyperbole (H) est donnée par son cercle directeur (F′) et son foyer F.

Un cercle passant par F est centré sur la droite (Δ) si, et seulement si, il passe aussi par F_1 symétrique de F par rapport à (Δ), donc s'il appartient au faisceau à points de base F et F_1. Chercher les points communs à la droite (Δ) et à l'hyperbole revient donc à chercher les centres des cercles qui sont tangents

au cercle (F′) et appartiennent au faisceau. On sait construire de tels cercles.

On trace un cercle auxiliaire (C) passant par F et F_1 et qui coupe le cercle (F′) en I et I′. Si les droites FF_1 et II′ se coupent en un point P extérieur au cercle (F′), on trace $P\varphi_1$ et $P\varphi_2$ tangentes à ce cercle : φ_1 et φ_2 sont les points de contact du cercle (F′) et des cercles cherchés. Les centres M_1 et M_2 sont les points de (Δ) alignés respectivement avec F′ et φ_1 ou F′ et φ_2.

Discussion. La construction précédente suppose que 4 conditions sont réalisées :

1) F et F_1 sont distincts.
2) P existe, donc II′ et FF_1 ne sont pas parallèles.
3) Il existe une ou plusieurs tangentes à (F′) issues de P.
4) F′φ coupe la droite (Δ).

La condition (3) est réalisée soit si le point P est sur le cercle (F′) (voir 3me cas particulier), soit si le point P est extérieur au cercle (F′) ce qui a lieu si, et seulement si, F_1 est extérieur au cercle (F′) (voir n° 17-7).

Dans ce dernier cas, et si les autres conditions sont réalisées, il existe deux tangentes $P\varphi_1$ et $P\varphi_2$ auxquelles correspondent deux points M_1 et M_2 communs à la droite (Δ) et à l'hyperbole.

1er cas particulier : (Δ) passe par F (fig. 15 b).

Dans ce cas F et F_1 sont confondus. Les cercles (M) appartiennent au faisceau singulier dont l'axe radical est la perpendiculaire à la droite (Δ) en F. On détermine le point P à l'aide d'un cercle auxiliaire et la construction se poursuit comme dans le cas général, mais on remarque que :

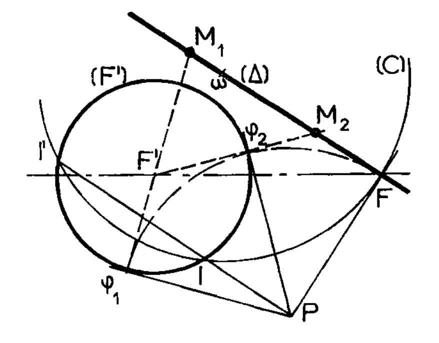


Fig. 15 b.

1) le point P existe, sauf si (Δ) passe en outre par F′.

2) le point P est extérieur au cercle (F′) car $\overline{PI}.\overline{PI'} = PF^2$.

3) $PF = P\varphi_1 = P\varphi_2$ ce qui donne immédiatement les points de contact sur le cercle (P, PF).

2me cas particulier : II′ est parallèle à FF_1 (fig. 15 c).

Dans ce cas les cercles (C), (F′) et (M) n'admettent pas de centre radical, ce qui n'a lieu que si leurs centres sont alignés.

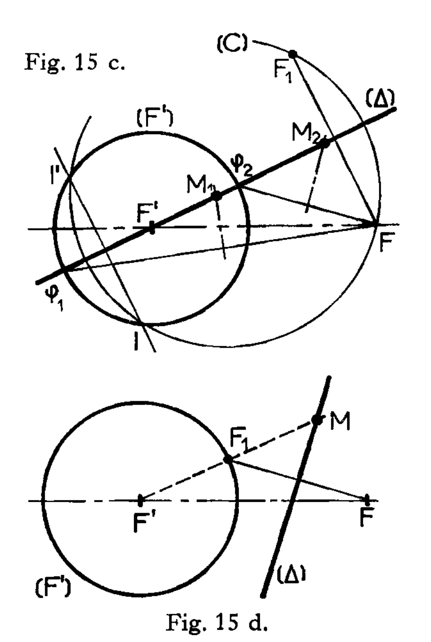


Fig. 15 c.

Fig. 15 d.

Le point de contact d'un cercle (M) et du cercle (F') est alors sur la droite des centres (Δ) ce qui détermine immédiatement les deux points de contact φ_1 et φ_2. Les centres M_1 et M_2 sont les intersections de (Δ) et des médiatrices de $F\varphi_1$ et $F\varphi_2$ respectivement.

3me cas particulier : F_1 est sur le cercle (F'). (fig. 15 d).

On sait que dans ce cas la droite (Δ) est tangente à l'hyperbole. Le point de contact est aligné avec F_1 et F'.

4me cas particulier : **(Δ) est parallèle à l'une des droites F'φ.**

Ceci a lieu si F, F_1, P et φ sont alignés, (fig. 15 e), dans ce cas, au point φ il ne correspond aucun point de l'hyperbole. On sait que la droite (Δ) est alors parallèle à l'une des asymptotes.

Si de plus F_1 est sur le cercle (F') on sait que (Δ) est l'une des asymptotes de l'hyperbole : les points communs à (Δ) et à l'hyperbole sont rejetés à l'infini.

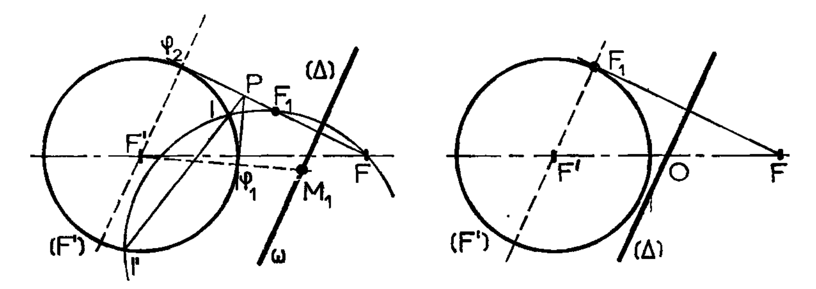


Fig. 15 e.

16. Transformée d'un cercle par polaires réciproques.

Soient, dans un plan, un cercle (O) de rayon R et un cercle (C). Cherchons la transformée (Γ) du cercle (C) dans la transformation par polaires réciproques de cercle directeur (O).

A étant un point variable du cercle (C) et (*a*) sa polaire par rapport au cercle (O), la transformée (Γ) est l'enveloppe de (*a*) (ch. 29, nº 4).

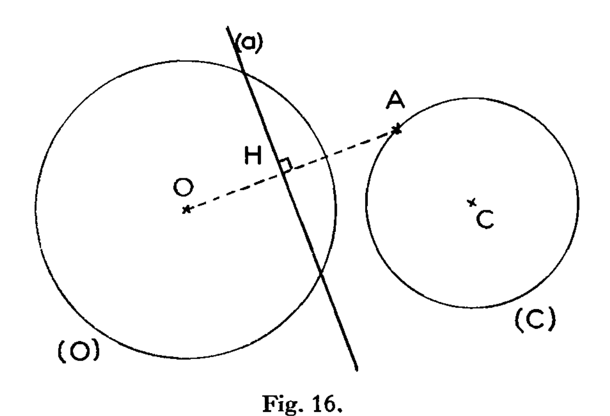


Fig. 16.

La polaire (*a*) est perpendiculaire à OA en un point H tel que :

$$\overline{OH} \cdot \overline{OA} = R^2.$$

L'ensemble des points H est donc l'inverse du cercle (C) dans l'inversion [O, R^2].

• Si **(C) passe par O**, l'inverse de (C) est une droite (Δ). L'enveloppe de (*a*) est une **parabole** de foyer O, admettant (Δ) pour tangente au sommet.

• Si (C) **ne passe pas par O,** l'inverse de (C) est un cercle (C′).

L'enveloppe de (*a*) est une conique de foyer O, admettant (C′) pour cercle principal.

Si O *est intérieur a* (C), il est aussi intérieur à (C′) : la conique est une **ellipse** ;

Si O *est extérieur a* (C), il est aussi extérieur à (C′) : la conique est une **hyperbole**.

Théorème. — ***Dans une transformation par polaires réciproques, la transformée d'un cercle est une conique admettant pour foyer le centre du cercle directeur de la transformation.***

Remarques.

1° Un point de la transformée (Γ) est le pôle par rapport à (O) d'une tangente à (C). Donc, si une de ces tangentes passe par O, le pôle correspondant est rejeté à l'infini. Ce qui détermine immédiatement les asymptotes de (Γ) : ce sont les perpendiculaires menées du centre C' sur les tangentes à (C) passant par O.

2° (C) et (Γ) étant réciproques, il est immédiat que la transformée d'une conique par rapport à *un cercle directeur centré au foyer* est un cercle (C).

EXERCICES

568. Déterminer le cercle principal d'une conique, connaissant une tangente (D), un foyer F et le centre C.

F et (D) étant donnés, comment faut-il choisir O pour que la conique soit une ellipse, une hyperbole ? Lieu de O pour que la conique soit une hyperbole équilatère.

569. Ensemble des centres des ellipses tangentes à deux droites données (T) et (T') et admettant pour foyer un point F donné.

Lieu du second foyer F'.

Reprendre les mêmes questions dans le cas de l'hyperbole.

570. Ensemble des centres des ellipses tangentes à une droite (T) donnée, admettant pour foyer un point F donné, et dont le grand axe a une longueur donnée $2a$.

Lieu du second foyer F'.

Reprendre les mêmes questions dans le cas de l'hyperbole.

571. Construire une ellipse (on indiquera les foyers et un cercle directeur) :

1° On donne un foyer F, un point M de la courbe, les longueurs $2a$ et $2b$ des axes.

2° On donne un foyer F, une tangente (T) et les longueurs $2a$ et $2b$ des axes.

3° On donne les foyers F et F' et une tangente (T).

4° On donne un foyer F, deux tangentes (T) et (T') et l'excentricité e.

5° On donne un foyer F, une tangente (T) le point de contact M et l'excentricité e.

Reprendre les mêmes questions dans le cas de l'hyperbole.

572. Construire une ellipse (ou une hyperbole). On indiquera les foyers et un cercle directeur.

1° On donne le cercle principal, et deux tangentes (T) et (T').

2° On donne le foyer F, deux tangentes (T) et (T') et le point de contact M de l'une d'elles.

3° On donne un foyer F, une tangente (T), son point de contact M et l'une des longueurs $2a$ ou $2c$.

4° On donne le foyer F, une tangente (T), la direction de l'axe focal et la longueur $2a$.

573. Construire une ellipse (on indiquera les foyers et un cercle directeur)

1° On donne un foyer F et trois tangentes (T_1), (T_2) et (T_3).

2° On donne un foyer F, deux tangentes (T_1) et (T_2) et un point M.

3° On donne un foyer F, une tangente (T) et deux points M et M'.

4° On donne un foyer F et trois points M_1, M_2, M_3.

Reprendre les mêmes questions dans le cas de l'hyperbole.

574. Construire une ellipse (indiquer les foyers et un cercle directeur)

1° On donne une extrémité B du petit axe, un foyer F et une tangente (T).

2° On donne une extrémité B du petit axe, un foyer F et un point M.

575. La normale à une ellipse en un point M coupe l'axe focal en N. F étant l'un des foyers, montrer que les distances FN et FM sont dans un rapport constant quand M décrit l'ellipse.

576. Les rayons vecteurs MF et MF' d'un point quelconque M d'une ellipse coupent en P et P' la parallèle à la tangente en M menée par le centre O. Montrer que FP = F'P'.

577. La perpendiculaire menée par le centre O d'une ellipse à la tangente en un point M de cette courbe coupe les rayons vecteurs MF et MF' aux points P et P'. Ensembles des points P et P'.

578. On projette orthogonalement le foyer F d'une ellipse en P et Q sur la tangente et la normale en un point M quelconque de cette ellipse. Montrer que la droite PQ passe par un point fixe.

579. Construire un triangle ABC de périmètre $2p$ connaissant la base BC et le pied de la bissectrice intérieure AD de l'angle A.

580. On mène les tangentes à l'ellipse aux extrémités d'une corde focale MF'M' ; ces tangentes se coupent au point T et rencontrent l'axe non focal aux points Q et Q'. Montrer que le cercle circonscrit au triangle TQQ' passe par le second foyer.

581. La tangente et la normale en un point M d'une ellipse coupent respectivement l'axe focal en T et N, l'axe non focal en T' et N'.

1° Montrer que le cercle MT'N' passe par les foyers.

2° Montrer que les cercles (MTN) et (MT'N') sont orthogonaux.

582. Le sommet d'un angle de grandeur constante FMN $= \alpha$ décrit un cercle fixe (O) tandis que le côté MF passe par un point fixe F. Enveloppe du second côté MN. On distinguera plusieurs cas suivant la position du point F.

583. Enveloppe des côtés d'un triangle inscrit dans un cercle fixe ayant pour orthocentre un point fixe H intérieur au cercle. Même question si H est extérieur au cercle.

584. Enveloppe des cordes d'un cercle qui sont vues d'un point fixe sous un angle droit. On distinguera deux cas suivant la position du point fixe.

585. On donne une ellipse de centre O, d'axes $2a$ et $2b$. On considère un point M de la courbe d'ordonnée $\overline{PM}$. La tangente à l'ellipse en M coupe le grand axe en T et le petit axe en T', la normale à l'ellipse en M coupe ces axes en N et N' respectivement. Calculer, en fonction des éléments de l'ellipse et des coordonnées x et y du point M, les valeurs $\overline{ON}$, $\overline{ON'}$, $\overline{OT}$, $\overline{OT'}$ et $\overline{PN}$.

586. La tangente en M à une hyperbole rencontre l'axe non focal en P. Ce point P se projette en Q et Q' sur les rayons vecteurs MF et MF'.

1° Comparer les segments QF et Q'F'.

2° Montrer que la droite QQ' passe par un point fixe quand M varie sur l'hyperbole.

587. Déterminer les foyers d'une hyperbole connaissant ses asymptotes et un point.

588. On considère les ellipses E qui admettent pour foyer un point donné A, pour longueur du grand axe une longueur donnée $2a$, et qui sont tangentes à une droite donnée D.

1° Lieu du second foyer F.

2° Déterminer celles des ellipses E qui passent par un point donné M. Discuter suivant les positions de M le nombre de solutions. Sur quelle courbe U autre que E doit se trouver M pour que le problème n'ait qu'une solution ?

3° Vérifier que si M est sur U, l'ellipse E qui passe par M est tangente en ce point à U.

4° Déterminer celles des ellipses E qui sont tangentes à une droite donnée L. Discuter suivant la position de L (ou si l'on veut du symétrique de A par rapport à L). A quelle courbe doit être tangente L pour que le problème n'ait qu'une solution ?

589. Étant donnés un cercle (C) et un point fixe A intérieur à ce cercle, on prend un point variable M sur ce cercle.

1° Enveloppe de la médiatrice de AM.

2° AM coupe le cercle en un deuxième point M'. Enveloppe de la médiatrice de AM'. Comment sont disposés les points de contact des médiatrices de AM et de AM' sur leur enveloppe ?

3° On considère sur le cercle un point N tel que l'angle des rayons AM et AN soit égal à $+\frac{\pi}{2}$. Les médiatrices des segments AM et AN se coupent en un point P dont on demande le lieu géométrique.

4° La perpendiculaire abaissée de A sur MN coupe celle-ci en un point Q dont on demande le lieu. Déterminer l'enveloppe de la droite MN.

590. Soient deux points fixes A et B distants de d. On considère les ellipses E passant par B, de foyer A, de grand axe $2a$ constant ($2a > d$).

1° Lieux du deuxième foyer F de ces ellipses et du centre de gravité du triangle ABF. Où doivent se trouver les foyers de deux ellipses E se coupant en B à angle droit ?

2° Soit C le deuxième point de rencontre de l'ellipse E et de BF. Démontrer que le lieu de C est une ellipse de foyer A et que la tangente en C à cette ellipse est la même que la tangente en C à l'ellipse E.

3° Déterminer les ellipses tangentes à une droite D. Discuter. Démontrer que les droites D tangentes à deux ellipses E se coupant en B à angle droit sont tangentes à une ellipse de foyers A et B.

4° On suppose $a = d$. Soit 2α l'angle de la tangente BT en B à l'ellipse E avec AB. Calculer, en fonction de tg α, le rayon du cercle inscrit dans le triangle ABF et étudier ses variations quand α varie de 0 à $\pi/4$. (Alger, 1947.)

591. On considère un cercle (C) de centre O et de rayon R, un diamètre Ox de ce cercle et deux points F et F' situés sur la circonférence et symétriques par rapport à Ox.

1° Si A est le milieu de FF', montrer que le lieu des points M du plan tels que

$$\overline{MA}^2 = MF.MF'$$

est une conique (γ) de foyers F et F'. Quelle est la nature de cette conique ?

2° Soit M un point de (γ) non situé sur Ox et tel que la normale à (γ) en M passe par O. Montrer que les quatre points M, O, F et F' sont sur un même cercle (C').

Calculer OM à l'aide du théorème de Ptolémée.

3° En déduire que la conique (γ) reste tangente à un cercle fixe, quand F et F' se déplacent sur (C) et restent symétriques par rapport à Ox ? (Rennes, 1934.)

592. 1° On considère l'hyperbole équilatère d'équation $x^2 - y^2 = a^2$. Montrer que, si A et A' sont les sommets, m la projection de M sur AA', cette hyperbole est le lieu des points M tels que $\overline{mM}^2 = \overline{mA}.\overline{mA'}$.

2° On considère un cercle (C) de centre C, qui varie en passant constamment par deux points fixes A et A'. O est le milieu de AA'. Soit MM' le diamètre du cercle (C) parallèle à AA'. Trouver le lieu (H) des points M et M' lorsque (C) varie.

3° Soit Q le pôle de AA' par rapport au cercle (C). Montrer que le cercle (Γ) circonscrit au triangle QMM' passe par le symétrique Q' de O par rapport à C.

En déduire que le cercle (Γ) coupe la droite AA' en deux points F et F' tels que OF = OF' = OA$\sqrt{2}$.

Que représentent pour (H) les points F et F' et la droite MQ ?

4° Montrer que MQ et MO forment avec les parallèles aux asymptotes de (H) menées par M un faisceau harmonique.

En déduire que la tangente en M à (H) coupe les asymptotes en deux points symétriques par rapport à M. (Strasbourg, 1948.)

593. Soit l'hyperbole équilatère (H) dont l'équation est

$$xy = k \quad (k > 0).$$

1° Exprimer, en fonction des abscisses a, b, c, d, de quatre points A, B, C, D de cette hyperbole, la condition pour que les cordes AD et BC soient orthogonales ; de ces quatre points, l'un quelconque est alors l'orthocentre du triangle formé par les trois autres ; si une hyperbole équilatère passe par les trois sommets d'un triangle, elle passe par son orthocentre ; si un triangle rectangle est inscrit dans une hyperbole équilatère, la hauteur relative à l'hypoténuse est tangente à cette hyperbole au sommet de l'angle droit.

2° Cette dernière propriété ramène la construction des intersections d'une hyperbole équilatère et d'un cercle ayant une de ses cordes BC pour diamètre à la construction de tangentes de direction donnée à cette hyperbole. Rappeler, sans démonstration, les conditions de possibilité. De deux cercles ayant pour diamètres des cordes BC et AD rectangulaires de cette hyperbole, un seul, celui de diamètre BC par exemple, la coupe en deux autres points T' et T'' diamétralement opposés sur cette hyperbole. Former l'équation qui donne les abscisses t', t'' de ces points en fonction des abscisses b, c de B et C ; discuter.

3° Si D est l'orthocentre d'un triangle ABC, les cercles de diamètres BC et AD sont orthogonaux.

4° On considère les deux familles de cordes de (H) respectivement parallèles à deux directions fixes rectangulaires. Démontrer que les cercles ayant pour diamètres les cordes de l'une des familles ont même axe radical. Préciser la disposition relative des deux familles de cercles. En déduire que, si un triangle ABC, d'orthocentre D, est inscrit dans une hyperbole équilatère, le centre de celle-ci est sur le cercle de diamètre IJ (I milieu de BC, J milieu de AD) qui passe par les pieds des hauteurs du triangle. (Aix-Marseille, 1951.)

594. 1° Soit une ellipse ayant le point F pour foyer et le cercle (C) pour cercle directeur relatif au foyer F'. Montrer que la condition *le petit axe a pour longueur 2b* équivaut à celle-ci *la puissance de* F *par rapport a* (C) *a la valeur* $-4b^2$.

2° On considère dans la suite les ellipses (E) qui admettent le point F donné pour foyer, la longueur $2b$ donnée pour longueur de petit axe et qui passent par un point donné P. Le second foyer F' et le cercle directeur (C) sont alors variables.

Montrer que le cercle (C) reste tangent à un cercle fixe (Γ) et, par inversion, qu'il reste aussi tangent à une droite fixe (Δ) qu'on précisera.

Tout cercle tangent à la fois à (Γ) et (Δ) est-il le cercle directeur d'une ellipse (E) ?

Quel est le lieu du second foyer F' des ellipses (E) ?

3° Parmi les ellipses (E), quelle est l'ellipse (E_m) dont la longueur $2a$ du grand axe est minimale ? Évaluer l'excentricité e de (E_m) en fonction de b et de la longueur $PF = x > 0$.

Peut-il y avoir un cercle parmi les ellipses (E) ?

4° Étudier la variation de la fonction $y = e(x)$ quand x croît de 0 à $+\infty$, b restant constant. Tracer la courbe représentative de cette variation.

Montrer que si λ est un nombre compris entre 0 et 1, la fonction y prend la valeur λ pour deux valeurs positives x_1 et x_2 de la variable x ; quelle relation indépendante de λ existe-t-il entre x_1 et x_2 ?

CHAPITRE 34

CONIQUES ET AFFINITÉ ORTHOGONALE

1. Ellipse homologue du cercle principal.

L'équation de l'ellipse rapportée à ses axes est :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

L'équation du cercle principal rapporté aux mêmes axes est :

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

A tout x pris dans l'intervalle $(-a,\ a)$, il correspond deux points de l'ellipse, dont les ordonnées sont :

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

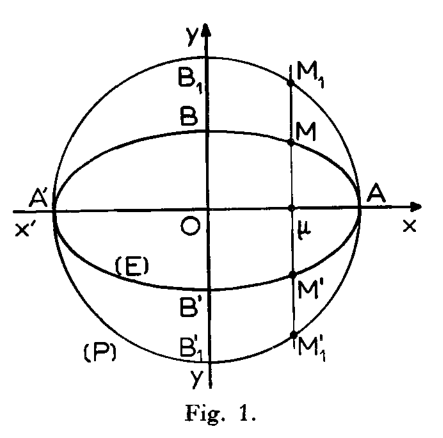


Fig. 1.

et deux points du cercle principal dont les ordonnées sont :

$$y = \pm \sqrt{a^2 - x^2}$$

ceci montre que ***l'ellipse est l'homologue de son cercle principal dans deux affinités orthogonales d'axe $A'A$ et de rapport $+ b/a$ ou $- b/a$.***

2. Ellipse homologue du cercle secondaire.

L'équation de l'ellipse rapportée à ses axes est :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

l'équation du cercle secondaire, de centre O, de rayon b rapporté aux mêmes axes est : $x^2 + y^2 = b^2$.

A tout y pris dans l'intervalle $(-b, b)$ il correspond deux points de l'ellipse dont les abscisses sont :

$$x = \pm \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}$$

et deux points du cercle secondaire dont les abscisses sont :

$$x = \pm \sqrt{b^2 - y^2}.$$

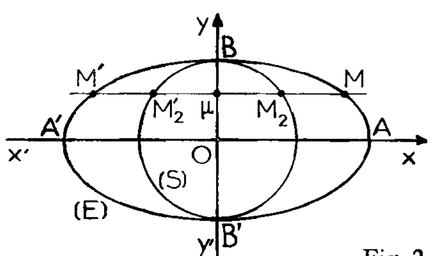


Fig. 2.

Ceci montre que ***l'ellipse est l'homologue de son cercle secondaire dans deux affinités orthogonales d'axe B'B et de rapport + b/a ou — b/a.***

3. Projection d'un cercle sur un plan.

Soit, dans un plan (π_1) un cercle (C) de centre O, de rayon R, que l'on projette sur un plan (π) qui passe par O, coupe le cercle (C) en A' et A, et fait avec le plan (π_1) un angle aigu α.

On rapporte les plans (π_1) et (π) à des repères orthonormés d'origine O, dont l'axe $x'x$ passe par A et A', dont les axes, y'_1y_1 dans le (π_1) et $y'y$ dans le plan (π), sont orientés de telle sorte que $M_1 \in (\pi_1)$ et sa projection orthogonale M sur le plan (π) aient des ordonnées de même signe.

Un point $M_1(x_1, y_1)$ a donc pour projection le point $M(x, y)$ tel que

$$\begin{cases} x = x_1 \\ y = y_1 \cos \alpha. \end{cases}$$

Le point M appartient au cercle (C) si ses coordonnées vérifient l'équation :

$$x_1^2 + y_1^2 = R^2$$

ce qui entraîne la relation :

$$x^2 + \frac{y^2}{\cos^2 \alpha} = R^2$$

soit :

$$\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2 \cos^2 \alpha} = 1.$$

Cette équation montre que l'ensemble des points M est l'ellipse dont le grand axe est A'A et dont le petit axe a pour longueur 2R cos α.

Si l'on projette le cercle (C) sur un plan (π') ne passant pas par O, il existe un plan (π) passant par O et parallèle à (π') ; les projections du cercle (C) sur ces deux plans sont homologues dans une translation, donc sont égales.

Il en résulte que ***la projection orthogonale d'un cercle sur un plan est en général une ellipse.***

Cette ellipse se réduit à un segment si les plans sont perpendiculaires ; elle est un cercle égal au cercle (C) si les plans sont parallèles.

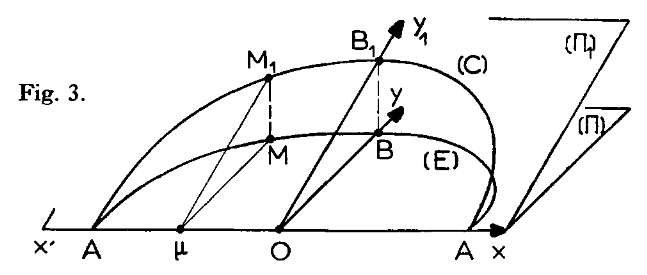


Fig. 3.

4. Aire de l'ellipse.

On a établi dans le cours de première que l'aire de la projection d'un polygone plan sur un plan est égale au produit de l'aire de ce polygone par le cosinus de l'angle du plan du polygone et du plan de projection.

Cette propriété reste vraie dans le cas d'un polygone dont le nombre de côtés augmente indéfiniment, et à la limite pour un cercle (P) de rayon a, dont la projection est une ellipse (E) de demi-axes a et b, l'angle α du plan du cercle et du plan de l'ellipse étant défini par $\cos \alpha = b/a$.

On obtient :

$$\text{Aire}_{(E)} = \text{Aire}_{(P)} \cdot \cos \alpha$$

$$\text{Aire}_{(E)} = \pi a^2 \cdot \frac{b}{a}$$

$$\text{Aire}_{(E)} = \pi ab.$$

L'aire d'une ellipse de demi-axes a et b est égale à πab.

5. Construction de l'ellipse.

On donne le cercle principal, l'axe A′A et la longueur b. On peut placer les sommets B et B′ et, sur le cercle principal, leurs homologues B_1 et B'_1 dans l'affinité (AA′, a/b).

A tout point M_1 du cercle principal, on peut faire correspondre un point M de l'ellipse par l'une des constructions suivantes :

1) B_1M_1 coupe l'axe A′A en I ; M est l'intersection de IB (homologue de IB_1) et de μM_1 perpendiculaire à AA′ (fig. 5 **a**).

2) On trace le cercle (O, b) qui coupe OM_1 en N. M est l'intersection de la parallèle à AA′ issue de N et de μM_1 perpendiculaire à AA′ (fig. 5 b).

En effet, les parallèles déterminent les rapports :

$$\frac{\mu M}{\mu M_1} = \frac{ON}{ON_1} = \frac{b}{a}$$

ce qui montre que M est l'homologue du point M_1.

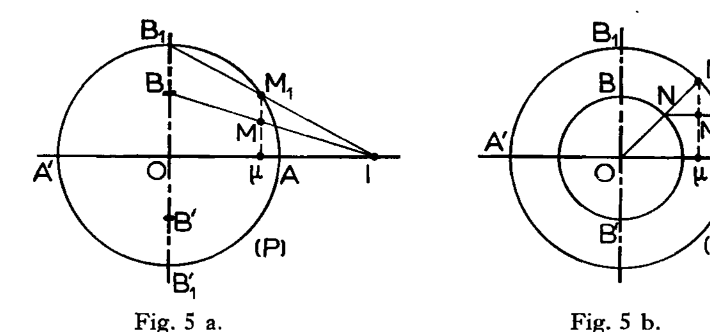


Fig. 5 a. Fig. 5 b.

6. Intersection d'une ellipse et d'une droite.

L'ellipse est donnée par son cercle principal (P) et ses axes A′A et B′B.

On peut construire la droite (D_1) homologue de la droite (D) donnée dans l'affinité orthogonale (A′A, a/b) qui transforme l'ellipse en son cercle principal (P).

S'il existe des points communs à l'ellipse et à la droite (D), ils ont pour homologues les points communs au cercle principal (P) et à la droite (D_1).

Exemple, sur la figure, la droite (D_1) coupe le cercle (P) en M_1 et M'_1 ; les points M et M′ cherchés sont déterminés sur la droite (D) par μM_1 et $\mu' M'_1$ respectivement.

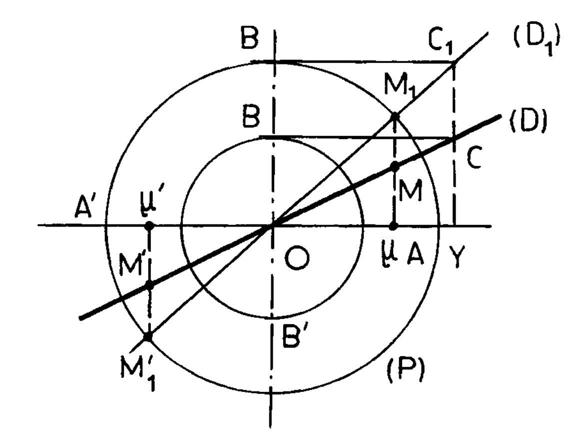


Fig. 6.

7. Tangentes issues d'un point donné.

L'ellipse est donnée par son cercle principal et ses axes A′A et B′B.

On peut construire T_1 homologue du point T donné, dans l'affinité orthogonale (A′A, a/b) qui transforme l'ellipse (E) en son cercle principal (P). (La figure utilise la droite TB et le point double I).

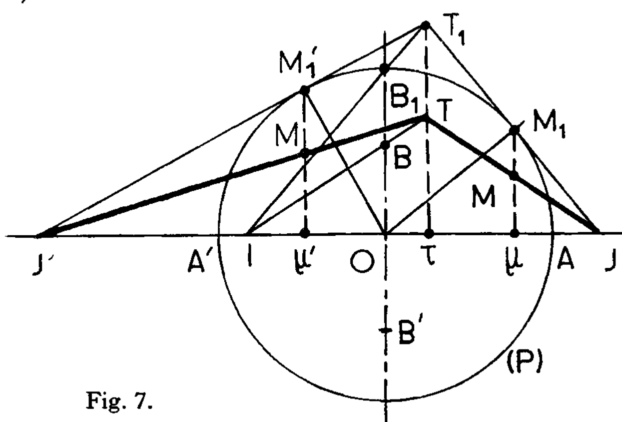


Fig. 7.

Les tangentes cherchées, si elles existent, ont pour homologues les droites issues de T_1 et tangentes au cercle (P). Les points de contact sont homologues.

Exemple, sur la figure, il existe deux droites T_1M_1 et $T_1M'_1$ tangentes au cercle (P), elles coupent l'axe d'affinité en J et J'. Les tangentes cherchées sont TJ et TJ' ; les points de contact sont M et M' situés sur μM_1 et $\mu' M'_1$ respectivement.

Il y a deux, une ou zéro tangentes suivant que le point T_1 est extérieur au cercle (P), sur ce cercle ou à l'intérieur de ce cercle.

8. Tangentes parallèles à une direction donnée (δ).

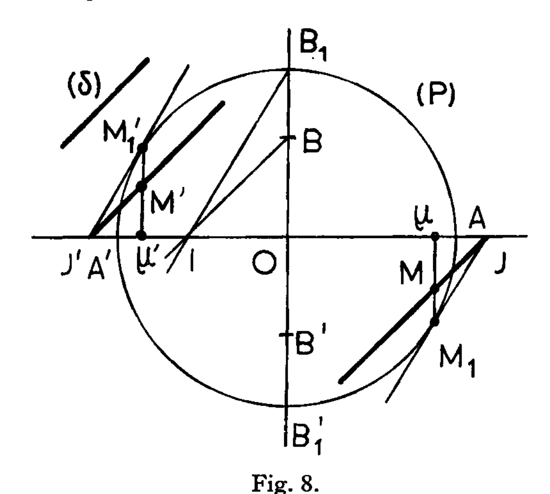


Fig. 8.

L'ellipse est donnée par ses axes A'A et B'B.

On construit l'homologue (δ_1) de la direction (δ) dans l'affinité orthogonale (A'A, a/b) qui transforme l'ellipse en son cercle principal (P).

Sur la figure, BI, parallèle à (δ), a pour homologue B_1I qui détermine la direction (δ_1).

Les tangentes cherchées ont pour homologues les droites parallèles à (δ_1) et tangentes au cercle (P). Les points de contact sont homologues.

Sur la figure, les droites JM_1 et $J'M'_1$ sont parallèles à (δ_1) et tangentes au cercle (P). Elles coupent l'axe A'A en J et J' qui sont des points doubles. JM et J'M' sont les parallèles à (δ) issues de J et J'. Les points de contact M et M' sont respectivement sur μM_1 et $\mu' M'_1$.

9. Segment dont les extrémités glissent sur deux axes perpendiculaires.

Soient un segment PQ de longueur constante $(a + b)$ et un point M de ce segment tel que $QM = a$, $MP = b$. Les points P et Q glissent respectivement sur des axes $x'x$ et $y'y$ perpendiculaires entre eux (fig. 9 a).

Le point M_1 tel que $\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{QM}$ décrit le cercle de centre O et de rayon a.

Les droites M_1M et OQ sont parallèles, donc M_1M est perpendiculaire à $x'Ox$ en un point μ.

Une homothétie de centre μ donne les rapports :

$$\frac{\overline{\mu M}}{\overline{\mu M_1}} = -\frac{\overline{MP}}{\overline{OM_1}} = -\frac{b}{a}.$$

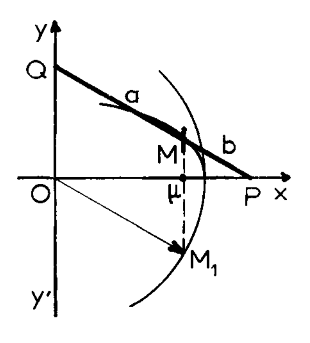


Fig. 9 a.

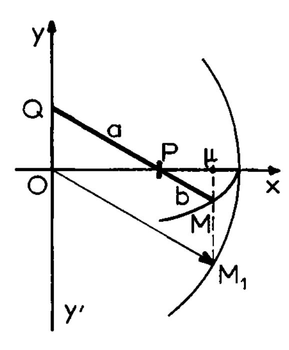


Fig. 9 b.

Il en résulte que le point M est l'homologue du point M_1 dans l'affinité orthogonale $(x'x, -b/a)$ donc que le point M décrit une ellipse dont l'axe $A'A = 2a$ est porté par $x'x$, et l'axe $B'B = 2b$ est porté par $y'y$.

On construit sur ce principe des appareils appelés « ellipsographes » destinés au tracé des ellipses.

Si le point M aligné avec P et Q est extérieur au segment PQ et tel que $QM = a$, $PM = b$, les résultats subsistent, mais le rapport d'affinité est $+ b/a$ (fig. 9 b).

10. Segments déterminés sur une sécante par une hyperbole équilatère et ses asymptotes.

Soit une hyperbole équilatère rapportée à ses asymptotes, dont l'équation est $xy = a^2/2$.

Une sécante coupe l'hyperbole en deux points M et M' dont les projections sur les axes sont P et P', Q et Q' respectivement (voir figure). On aura :

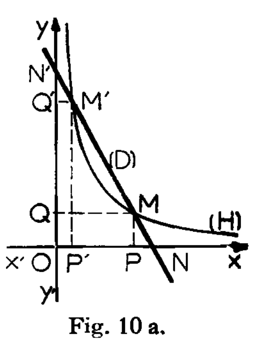


Fig. 10 a.

$$\overline{PM} \,.\, \overline{QM} = \overline{P'M'} \,.\, \overline{Q'M'}$$

soit : $$\frac{\overline{PM}}{\overline{P'M'}} = \frac{\overline{Q'M'}}{\overline{QM}} \qquad (1)$$

N et N' étant les intersections de la droite (D) et des axes, les parallèles donnent les rapports :

$$\frac{\overline{PM}}{\overline{P'M'}} = \frac{\overline{NM}}{\overline{NM'}} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{Q'M'}}{\overline{QM}} = \frac{\overline{M'N'}}{\overline{MN'}}$$

donc, avec (1) : $$\frac{\overline{NM}}{\overline{NM'}} = \frac{\overline{M'N'}}{\overline{MN'}}$$

ce qui entraîne : $$\frac{\overline{NM'} - \overline{NM}}{\overline{NM}} = \frac{\overline{MN'} - \overline{M'N'}}{\overline{M'N'}} \quad \text{ou} \quad \frac{\overline{MM'}}{\overline{NM}} = \frac{\overline{MM'}}{\overline{M'N'}}$$

et enfin : $$\overline{NM} = \overline{M'N'}$$

Cette relation montre que les segments MM' et NN' ont même milieu.

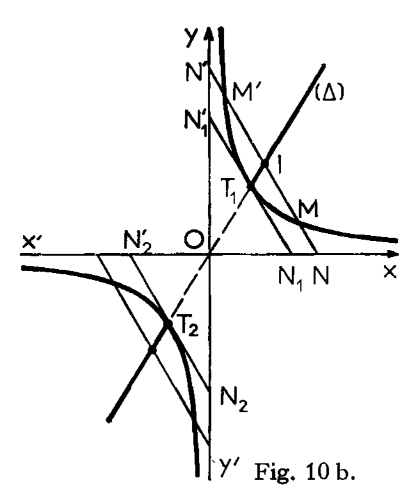


Fig. 10 b.

Conséquences.

1) Si une sécante (D) se déplace parallèlement à une direction fixe, les milieux I des segments MM' se correspondent deux à deux dans des homothéties de centre O, donc sont alignés avec le point O.

Les milieux des cordes parallèles à une direction donnée appartiennent à une droite (Δ) passant par le centre de l'hyperbole.

2) La propriété reste valable si M et M' sont confondus, c'est-à-dire si la droite (D) est tangente à l'hyperbole : le point de contact appartient à la droite (Δ) et il est le milieu du segment NN'.

3) L'ensemble des points I, milieux des cordes parallèles à la direc-

tion donnée, est la réunion de deux demi-droites portées par (Δ), intérieures à l'hyperbole, ayant pour origine les points de contact des tangentes parallèles à la direction donnée.

11. Aire du triangle déterminé par une tangente variable et les asymptotes de l'hyperbole équilatère.

Si la droite (D) reste tangente à l'hyperbole et varie en direction, l'aire du triangle ONN' est :

Aire ONN' $= \frac{1}{2}$ ON.ON'

le point de contact T(x, y) étant le milieu de NN', on a

$x = \frac{1}{2}\overline{ON}$ et $y = \frac{1}{2}\overline{ON'}$

et puisque T appartient à l'hyperbole, $xy = \frac{a^2}{2}$

par conséquent :

aire ONN' $= a^2$.

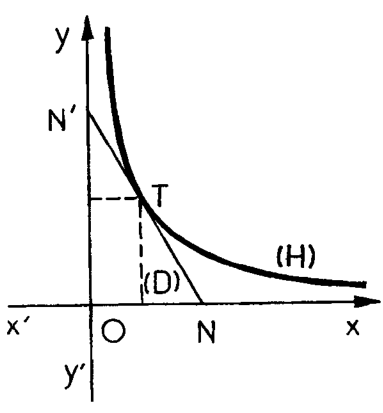


Fig. 11.

L'aire du triangle déterminé par une tangente variable et les asymptotes de l'hyperbole équilatère est constante et égale à a^2.

12. Hyperbole homologue d'une hyperbole équilatère.

Soit (H) une hyperbole rapportée à ses axes ; son équation est

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Il existe une hyperbole équilatère (H_1) ayant mêmes sommets A et A', et dont l'équation est

$$x^2 - y^2 = a^2.$$

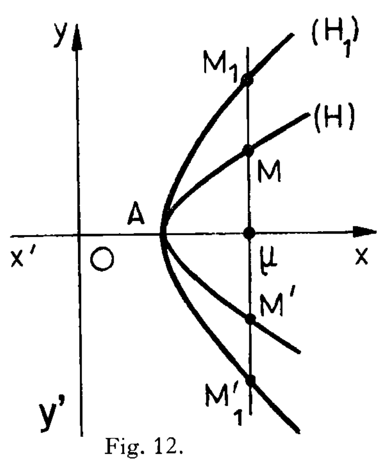


Fig. 12.

A toute valeur de x, extérieure à l'intervalle $(-a, a)$ il correspond :

- deux points M et M' de l'hyperbole (H) dont les ordonnées sont :

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

- deux points M_1 et M'_1 de l'hyperbole (H_1), dont les ordonnées sont :

$$y_1 = \pm \sqrt{x^2 - a^2}$$

ces relations montrent que l'hyperbole (H) est l'homologue de (H_1) dans deux affinités orthogonales d'axe A'A et de rapport $+\frac{b}{a}$ ou $-\frac{b}{a}$.

13. Conséquences.

Les propriétés qui ont été établies pour une hyperbole équilatère et qui sont conservées dans l'affinité orthogonale sont vraies pour toute hyperbole, en particulier :

1) les segments déterminés sur une sécante par une hyperbole et ses asymptotes ont même milieu ;

2) les milieux des cordes parallèles à une direction donnée (D) sont alignés sur une droite (Δ) passant par le centre de l'hyperbole.

3) les points de contact des tangentes parallèles à la direction (D) sont sur cette droite (Δ).

Les aires de deux triangles homologues dans une affinité orthogonale sont dans le rapport d'affinité, par conséquent :

4) l'aire du triangle déterminé par une tangente à l'hyperbole et par les asymptotes, est constante et a pour mesure **ab**.

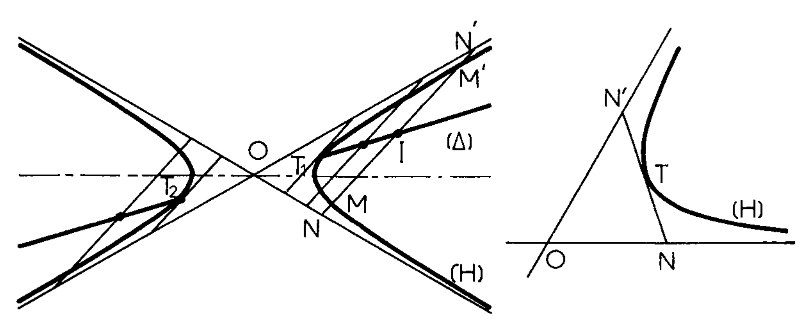


Fig. 13 a. Fig. 13 b.

14. Équation de l'hyperbole rapportée à ses asymptotes.

On oriente les asymptotes de façon que l'abscisse et l'ordonnée d'un point M de l'hyperbole aient même signe.

Soient N et N′ les intersections des asymptotes et de la tangente au point M, P la projection de M sur l'axe $x'x$ parallèlement à $y'y$, et P′ la projection de M sur l'axe $y'y$ parallèlement à la direction $x'x$.

On connaît deux expressions de l'aire du triangle ONN′

$$\text{aire ONN}' = \frac{1}{2}\,\text{ON.ON}'\sin 2\alpha = ab$$

or $\sin\alpha = \dfrac{b}{c}$ et $\cos\alpha = \dfrac{a}{c}$;

donc $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \dfrac{2ab}{c^2}$

M étant le milieu de NN′, on aura :

$$\overline{\text{OP}} = x = \frac{1}{2}\overline{\text{ON}}$$

$$\overline{\text{OP}'} = y = \frac{1}{2}\overline{\text{ON}'}$$

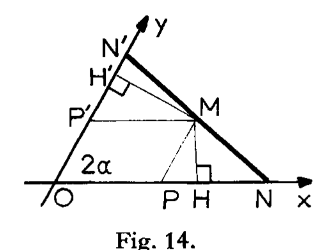


Fig. 14.

on obtient :

$$\text{aire ONN}' = \frac{1}{2}.2x.2y\,\frac{2ab}{c^2} = ab$$

soit : $$\boxed{xy = \frac{c^2}{4}}$$

qui est l'équation de l'hyperbole rapportée à ses asymptotes.

15. Produit des distances d'un point de l'hyperbole aux asymptotes.

H et H′ étant les projections du point N sur les axes $x'x$ et $y'y$, on aura :

$$\text{HM} = \text{PM}\sin 2\alpha \quad \text{et} \quad \text{H'M} = \text{P'M}\sin 2\alpha$$

donc : $$\text{HM.H'M} = \text{PM.P'M}\sin^2 2\alpha$$

avec $\text{PM.P'M} = xy = \dfrac{c^2}{4}$ et $\sin 2\alpha = \dfrac{2ab}{c^2}$

on obtient : $$\text{HM . H'M} = \frac{a^2b^2}{c^2}.$$

Le produit des distances d'un point de l'hyperbole aux asymptotes est constant et a pour valeur $\boldsymbol{\dfrac{a^2b^2}{c^2}}$.

On remarquera que l'ensemble des points dont le produit des distances à deux droites sécantes est constant, est la réunion de deux hyperboles admettant ces droites pour asymptotes.

EXERCICES

595. La tangente en un point M quelconque d'un cercle (O) coupe en A′ et B′ les tangentes aux extrémités A et B d'un diamètre de ce cercle. Montrer que l'ensemble des points communs aux droites AB′ et A′B est une ellipse.

596. M étant un point mobile d'un cercle (O) de diamètre AB, on trace le cercle de centre M tangent à AB en H et coupant le cercle (O) aux points D et E.

Montrer que l'ensemble des points P communs aux droites MH et DE est une ellipse.

597. On donne une ellipse de grand axe AA′ et un point M variable de cette ellipse. Montrer que l'ensemble des points H, orthocentres des triangles AMA′, est une ellipse.

598. On donne, dans un plan, un cercle (O) et une droite (D). Un point M quelconque de (O) se projette en H sur (D). Montrer que l'ensemble des milieux I des segments MH est une ellipse.

599. On donne dans un plan deux points fixes A et B, et un point M quelconque qui se projette en H sur la droite AB. Montrer que l'ensemble des points M tels que : $\frac{HM^2}{\overline{HA}.\overline{HB}} = -k^2$ (k nombre relatif donné) est une ellipse.

600. Construire une ellipse (on déterminera les sommets)

1° On donne le grand axe AA′ et un point de l'ellipse.

2° On donne les axes de symétrie et deux points M et M′ de l'ellipse.

601. Construire une ellipse (on déterminera les sommets)

1° On donne les axes de symétrie et deux tangentes.

2° On donne le grand axe AA′ et une tangente.

602. Deux tangentes PM et PM′ à une ellipse de centre O se coupent en P. Montrer que la droite PO est médiane du triangle PMM′.

603. On donne une ellipse de grand axe AA′ et une corde MM′ quelconque de cette ellipse. Montrer que les droites AM′ et A′M, AM et A′M′ se coupent sur une même perpendiculaire à AA′.

604. Transformer, par affinité orthogonale, les propriétés suivantes du cercle :

1° Un diamètre d'un cercle divise en deux parties égales les cordes qui lui sont perpendiculaires.

2° Si un point C du cercle se projette orthogonalement en M sur un diamètre AB, la relation $\overline{AM}.\overline{MB} = MC^2$ est vérifiée.

3° Si deux rayons rectangulaires se projettent orthogonalement en OM et ON sur un diamètre AB, la relation $OM^2 = \overline{AN}.\overline{NB}$ est vérifiée.

605. La tangente et la normale en un point M d'une ellipse coupent les axes de cette ellipse respectivement en T et T′, N et N′. Si OP est un demi-diamètre parallèle à TT′,

montrer que la relation $\overline{MN}.\overline{MN'} = -\overline{MT}.\overline{MT'} = OP^2$ est vérifiée.

606. Montrer qu'il existe une infinité de triangles inscrits dans une ellipse donnée et admettant le centre de cette ellipse pour centre de gravité. Montrer que tous ces triangles sont circonscrits à une même ellipse et ont même aire.

607. On donne une ellipse de grand axe AA', de petit axe BB', et un point M quelconque de cette ellipse. La parallèle à BB' issue de M coupe le cercle principal en P et P_1 ; la parallèle à AA' issue de M coupe le cercle secondaire en P' et P'_1.

1° Montrer que le centre O, les points P_1 et P'_1 sont alignés.

2° Montrer que l'axe radical des cercles de diamètres PP' et $P_1P'_1$ est la tangente en M à l'ellipse.

608. Entre les asymptotes d'une hyperbole équilatère, inscrire une tangente PQ de longueur donnée $2l$.

609. Enveloppe d'une droite mobile MN qui détermine avec deux droites fixes un triangle OMN tel que OM.ON $= k$ (k nombre arithmétique donné).

610. A) Une tangente à un cercle de rayon R rencontre respectivement en T et T' les tangentes aux extrémités C et C' du même diamètre. Démontrer la relation

$$\overline{CT}.\overline{C'T'} = R^2.$$

Énoncer et démontrer la proposition réciproque.

B) Soient A et A' les extrémités du grand axe d'une ellipse, B et B' les extrémités du petit axe. On pose AA' $= 2a$ et BB' $= 2b$.

1° Une tangente à l'ellipse rencontre respectivement en M et M', N et N', les tangentes en A, A', B, B' à cette ellipse. En utilisant la propriété établie dans la question A, démontrer que l'on a

$$\overline{AM}.\overline{A'M'} = b^2.$$

Réciproque.

2° Les points N et N' sont conjugués harmoniques par rapport à M et M' et l'on a

$$\overline{BN}.\overline{B'N'} = a^2.$$

Réciproque.

3° F étant l'un des foyers de l'ellipse, démontrer que les droites FM et FM' sont rectangulaires et que ce sont les bissectrices des droites FN et FN'. Réciproque.

(Bordeaux.)

611. Une ellipse a ses axes de symétrie de longueur $2a$ et $2b$ portés respectivement par les axes de coordonnées Ox et Oy.

1° Rappeler, sans démonstration, comment on peut déduire la tangente en un point M de l'ellipse de la tangente en un point m de même abscisse du cercle ayant pour diamètre le grand axe de l'ellipse. Rappeler, sans démonstration, comment on peut déduire la tangente en M à l'ellipse de la tangente en un moint m' de même ordonnée du cercle ayant pour diamètre le petit axe de l'ellipse.

La tangente à l'ellipse au point d'abscisse x, d'ordonnée y, coupe Ox en T, Oy en T'. Démontrer les formules

$$OT = \frac{a^2}{x}, \quad OT' = \frac{b^2}{y}.$$

2° Calculer en fonction de x le carré de la longueur TT'. Étudier la variation de $\overline{TT'}^2 = u$ en fonction de $v = x^2$; en déduire la variation de TT' en fonction de x quand x varie de 0 à a. Construire le point M correspondant à la longueur minimale de TT'.

3° On considère l'ellipse comme engendrée par un point M fixe sur un segment de droite UV de longueur constante dont les extrémités U et V décrivent respectivement Ox et Oy. Déterminer la position de la droite UV pour laquelle elle est tangente à l'ellipse. (Sao Paulo, 1949.)

612. On donne une ellipse de grand axe $AA' = 2a$, de petit axe $BB' = 2b$. D'un point C de la droite A'A on mène une tangente CD à l'ellipse et la tangente CD' au cercle principal, du même côté que CD par rapport à A'A. Soient M et M' les points de contact de ces tangentes respectivement avec l'ellipse et le cercle principal, et D et D' les points de rencontre des tangentes avec la droite BB'. Soient φ et φ' les angles aigus que font respectivement ces tangentes avec AA'.

1° Trouver la relation qui lie $\operatorname{tg} \varphi$ et $\operatorname{tg} \varphi'$.

2° Trouver, en fonction de a et φ', l'aire du triangle OCD' et l'aire du triangle OCD en fonction de a, b et φ.

3° Étudier la variation de l'aire OCD quand φ varie. Construire la tangente CD qui correspond au minimum de l'aire OCD.

4° F et F' désignant les foyers de l'ellipse, calculer les angles F et F' du triangle MFF', dans le cas où l'aire du triangle OCD est minimale. (Egypte, S 51.)

613. On considère le cercle (C) de diamètre $A'A = 2a$ et de centre O. A tout point M_1 de (C) projeté orthogonalement en H sur A'A, on associe le point M du segment HM_1 tel que $\overline{HM_1}^2 = 2\ \overline{HM}^2$.

1° Connaissant M_1 et la tangente en M_1 à (C), donner une construction géométrique de M et du point T où la tangente en M au lieu (E) de M rencontre A'A.

La tangente MT coupe en S la perpendiculaire en A à A'A. Montrer que OS passe par le milieu de AM. Construire le pôle, M', de MT par rapport au cercle (C). Établir que le rapport $\overline{HM_1}/\overline{HM'}$ garde une valeur constante et que la tangente en M' au lieu (E') de M' est la polaire de M par rapport à (C).

Écrire les équations de (E) et (E') lorsque le diamètre A'A est pris pour axe Ox et le diamètre perpendiculaire pour axe Oy. Placer soigneusement sur la figure les sommets et les foyers des ellipses (E) et (E').

2° On prend sur la tangente (D) en A au cercle (C) un point variable P. Soient L le point où PA' rencontre à nouveau le cercle (C) et K la projection orthogonale de L sur A'A. La droite AI, qui joint A au milieu I de KL, coupe A'P en M et la droite AL coupe en M' la perpendiculaire MH à A'A.

Montrer que le rapport $\dfrac{\overline{HM}^2}{\overline{HA}.\overline{HA'}}$ reste constant quand P décrit (D). Quelle est la valeur de cette constante ? En déduire les lieux géométriques (E) et (E') de M et M' et les identifier avec ceux trouvés au 1°.

3° Trouver le lieu du point d'intersection Q de AM et A'M'. Construire le pôle S de AL par rapport au cercle (C) et montrer que OS passe par le milieu de AM. En déduire le lieu de rencontre de la tangente en L au cercle (C) et de la tangente en M au lieu de M. (Alger, 1955, partiel.)

614. On donne un repère orthonormé $x'Ox$, $y'Oy$ et le cercle (O) de centre O et de rayon R.

1° On appelle cercle (C) tout cercle ayant pour diamètre une corde quelconque PQ du cercle (O) ; on appelle C le centre d'un tel cercle, ρ son rayon.

Montrer qu'un cercle (C) est caractérisé par cette propriété : la puissance de son centre C par rapport au cercle (O) est $-\rho^2$.

2° On suppose dans toute la suite du problème que le centre C appartient à $x'Ox$ et l'on pose $\overline{OC} = \lambda$.

a) Former l'équation qui détermine λ quand (C) passe en un point donné S, de coordonnées x, y. Montrer que le problème admet une solution unique si S appartient à une ellipse (E) qu'on obtiendra par son équation, et dont on précisera les sommets et les foyers. Dans quelle région, limitée par l'ellipse, doit se trouver S pour que le problème admette deux solutions ?

b) On se place dans le cas où le problème admet deux solutions C_1 et C_2 d'abscisses λ_1 et λ_2, et on demande que les cercles (C_1) et (C_2) soient orthogonaux en S : former l'équation de l'ensemble des points S correspondants et préciser la nature et les éléments de cet ensemble.

3° Parmi les cercles (C) dont le centre C est sur $x'Ox$, on se borne désormais à ceux qui, en outre, coupent $y'Oy$.

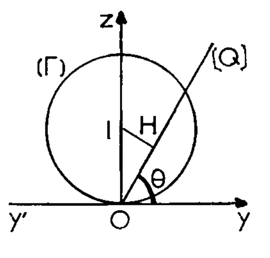
a) Préciser l'ensemble des centres C de ces cercles ;

b) Soient I et J les points où (C) coupe $y'Oy$, U et V les symétriques de I et J par rapport au diamètre PQ, U' et V' les points où les segments IU et JV coupent respectivement le cercle (O) ; montrer que $\overline{IU}$ et $\overline{IU'}$ gardent un rapport constant ; reconnaître l'ensemble des points U et V.

c) Montrer que les tangentes en U à (C) et en U' à (O) se coupent sur $y'Oy$; quelle propriété en résulte-t-il pour les cercles (C) de cette troisième partie ?

(Métropole, 1963.)

615. Un plan (V), que l'on prendra comme plan de figure, est rapporté à deux axes perpendiculaires $y'Oy$, $z'Oz$, le demi-axe Oy étant dirigé vers la droite. I étant un point fixe de Oz, défini par $\overline{OI} = R$ $(R > 0)$ on désigne par (Γ) le cercle de centre I et de rayon R et par (S) la sphère admettant ce cercle pour grand cercle ; dans le plan (P) tangent à (S) en O, on trace un axe $x'Ox$ perpendiculaire à $y'Oy$ (voir figure).



Un plan variable (Q) pivote autour de $x'Ox$ et coupe la sphère (S) suivant un cercle (C), dont la projection orthogonale sur (P) est une ellipse (E). On désigne par H le centre de (C), par ω le centre de (E) et par θ l'angle yOH. Dans les questions 1° et 2° on se bornera à étudier le cas où l'angle θ est aigu $(0 < \theta < \pi/2)$. Le plan (P) sera rapporté aux deux axes rectangulaires $x'Ox$, $y'Oy$.

(Le demi-axe Ox est supposé perpendiculaire en O au plan de figure et dirigé vers l'avant ; le plan (Q) est représenté par sa trace.)

1° *a)* Calculer, en fonction de R et θ le rayon r du cercle (C), les demi-axes a, b $(a \geqslant b)$, de (E) et la distance $FF' = 2c$ des foyers de (E). Montrer que les directrices (Δ) et (Δ') de (E) sont fixes.

Par la suite, on désignera par F celui des foyers de (E) dont l'abscisse est positive.

b) On rabat le plan (V) sur le plan (P) autour de la droite $y'Oy$. Montrer que, dans ce rabattement, le triangle $O\omega H$ se rabat suivant l'un des triangles $O\omega F$, $O\omega F'$. Quel est le rabattement du point I ? Déterminer le lieu des points F, F' quand θ varie de 0 à $\pi/2$.

2° *a)* Soit m_0 un point de (P) d'ordonnée positive. En utilisant la manière dont (E) a été définie, trouver combien d'ellipses (E) passent par m_0.

b) On désigne par (E') une ellipse située dans le plan (P), admettant le point O pour sommet de l'axe non focal, et les droites (Δ) et (Δ') précédemment déterminées pour directrices. L'ellipse (E') peut-elle être considérée comme la projection d'un cercle (C) de la sphère (S) ?

c) Une ellipse (E) peut-elle être considérée comme la projection d'un cercle de (S) autre que le cercle (C) qui a servi à la définir ?

3° On désigne par A celui des sommets de l'axe focal de (E) dont l'abscisse est positive.

a) Calculer en fonction de R et θ les coordonnées x, y de A. Exprimer y^2 en fonction de x et de R. En déduire les variations de y^2, puis de y, quand x varie de 0 à R. Construire la courbe représentative (L). Utiliser cette courbe (L) pour construire le lieu de A quand l'angle $\theta = yOH$ varie de 0 à π ; représenter sur la même figure le lieu du deuxième sommet A', de l'axe focal de (E).

b) On admet que l'aire limitée par (C) et l'aire limitée par (E) sont liées par la même relation que l'aire d'un polygone du plan (Q) et l'aire de sa projection orthogonale sur le plan (P). Utiliser ce principe pour calculer l'aire z limitée par (E). Exprimer z au moyen de R et de $u = \cos\theta$. Étudier les variations de la fonction z de la variable u ainsi obtenue.

Pour quelles valeurs de θ ($0 < \theta < \pi$) l'ellipse (E) a-t-elle l'aire la plus grande possible ? Quelle est la valeur de ce maximum ? (Métropole, 1960.)

CHAPITRE 35

DIRECTRICES D'UNE CONIQUE

1. Existence d'une directrice.

Il résulte des nos 33-3 et 33-5 que l'équation d'une conique à centre rapportée à ses axes peut se mettre sous la forme : $a^2y^2 =$

$$(a^2 - c^2)(a^2 - x^2)$$

soit $y^2 =$

$$a^2 - c^2 + \frac{c^2}{a^2}x^2 - x^2 \qquad (1)$$

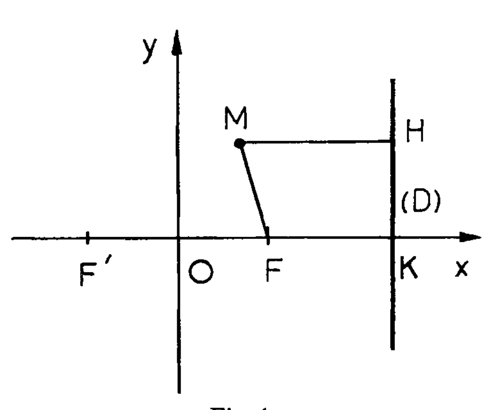


Fig. 1.

Appelons (D) la polaire F $(c, 0)$ par rapport au cercle principal de centre O, de rayon a ; (D) coupe l'axe focal en K tel que :

$$\overline{OK} = \frac{a^2}{\overline{OF}} \quad \text{ou} \quad \overline{OK} = \frac{a^2}{c}$$

M(x, y) étant un point quelconque et H sa projection orthogonale sur la droite (D), on aura :

$$\overrightarrow{MH}\left(\frac{a^2}{c} - x, 0\right) ; \text{ MH}^2 = \left(\frac{a^2}{c} - x\right)^2$$

$$\overrightarrow{MF}(c - x, -y) ; \text{ MF}^2 = c^2 - 2cx + x^2 + y^2 \qquad (2)$$

Si un point M appartient à la conique (C), l'équation (1) est vérifiée, et (2) devient :

$$\text{MF}^2 = c^2 - 2cx + x^2 + \left(a^2 - c^2 + \frac{c^2}{a^2}x^2 - x^2\right)$$

ou

$$\text{MF}^2 = \frac{c^2}{a^2}\left(\frac{a^2}{c} - x\right)^2$$

ce qui montre que $\frac{MF^2}{MH^2} = \frac{c^2}{a^2}$ ou $\boxed{\frac{MF}{MH} = \frac{c}{a} = e}$.

Le rapport des distances d'un point M de la conique au foyer F et à la droite (D) est indépendant du point M, il est égal à l'excentricité.

Réciproquement, si un point M est tel que $\frac{MF}{MH} = \frac{c}{a}$ ($a \neq 0$, $c \neq 0$, $c \neq a$), on aura : $MF^2 = \frac{c^2}{a^2} MH^2$

ou : $$c^2 - 2cx + x^2 + y^2 = \frac{c^2}{a^2}\left(\frac{a^2}{c} - x\right)^2$$
en effectuant :
$$y^2 = a^2 - c^2 + \frac{c^2}{a^2}x^2 - x^2$$
ce qui montre que le point M appartient à la conique (C).

Si la conique (C) est une parabole de foyer F et de directrice (D), on sait directement qu'un point M appartient à la parabole si, et seulement si, le rapport de ses distances au foyer F et à la directrice (D) est égal à 1. Nous dirons que l'excentricité de la parabole est $e = \frac{MF}{MH} = 1$.

On peut alors énoncer :

Une conique est l'ensemble des points dont le rapport des distances à un point fixe (foyer) et à une droite fixe (directrice) est constant.

Ce rapport constant est appelé excentricité de la conique.

si $e < 1$, la conique est une ellipse ;
si $e = 1$, la conique est une parabole ;
si $e > 1$, la conique est une hyperbole.

La directrice d'une conique à centre est la polaire du cercle-point F par rapport au cercle principal.

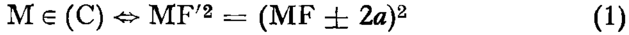
Dans le cas d'une conique bifocale, la symétrie montre qu'il existe une seconde directrice associée au foyer F′. Son abscisse est $\overline{OK'} = -\frac{a^2}{c}$.

On sait que la polaire du point F par rapport au cercle principal est l'homologue dans l'homothétie (F, 2) de l'axe radical du cercle-

point F et du cercle principal. Cette même homothétie montre que ***la directrice (D) est l'axe radical du cercle-point F et du cercle directeur (F').***

2. Démonstration géométrique.

Un point M appartient à la conique à centre (C), si et seulement si, il est centre d'un cercle passant par F et tangent au cercle (F'), ce qui s'écrit :



$$M \in (C) \Leftrightarrow MF'^2 = (MF \pm 2a)^2 \qquad (1)$$

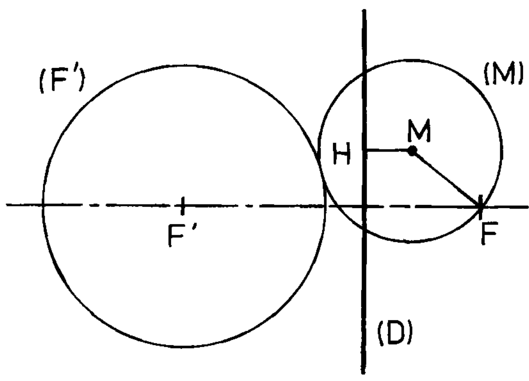


Fig. 2.

Nous connaissons deux expressions de la différence des puissances d'un point M par rapport au cercle (F') et au cercle-point F :

$$\mathscr{P}M/(F') - \mathscr{P}M/(F) = (MF'^2 - 4a^2) - MF^2$$

ou si H est la projection orthogonale de M sur l'axe radical :

$$\mathscr{P}M/(F') - \mathscr{P}M/(F) = 2\overline{F'F} \,.\, \overline{HM}$$

de ces deux expressions on tire :

$$MF'^2 - MF^2 - 4a^2 = 2\overline{F'F}.\overline{HM} \qquad (2)$$

Si un point M appartient à la conique, (1) est vérifié et (2) devient : $(MF \pm 2a)^2 - MF^2 - 4a^2 = 2\overline{F'F} \,.\, \overline{HM}$

donc : $$\pm 4a\, MF = 4c\, \overline{HM}$$

d'où $$\boxed{\frac{MF}{\overline{MH}} = \frac{c}{a}}$$

Inversement, soit un point M tel que $\frac{MF}{MH} = \frac{c}{a}$ avec $MH = \frac{a}{c} MF$, la relation (2) devient :

$$|MF'^2 - MF^2 - 4a^2| = 2\ F'F \cdot \frac{a}{c}\ MF$$

avec $F'F = 2c$: $\qquad MF'^2 - MF^2 - 4a^2 = \pm\ 4a.MF$

que l'on écrit : $\qquad MF'^2 = (MF \pm 2a)^2$

ce qui montre, d'après (1), que M est un point de la conique.

Si la conique est une parabole, et H la projection orthogonale d'un point M sur la directrice, on sait directement que :

$$M \in (P) \Leftrightarrow \frac{MF}{MH} = 1.$$

donc, dans tous les cas :

Une conique est l'ensemble des points dont le rapport des distances à un point fixe (foyer) et à une droite fixe (directrice) est constant. Ce rapport constant est l'excentricité de la conique.

3. Position de la directrice.

Dans le cas de l'ellipse :

$\frac{c}{a} < 1$ et $OK = \frac{a^2}{c}$ entraînent $OK > a$, ce qui montre que les directrices sont extérieures à la courbe.

Dans le cas de l'hyperbole :

$\frac{c}{a} > 1$ et $OK = \frac{a^2}{c}$ entraînent $OK < a$, ce qui montre que les directrices sont extérieures à la courbe

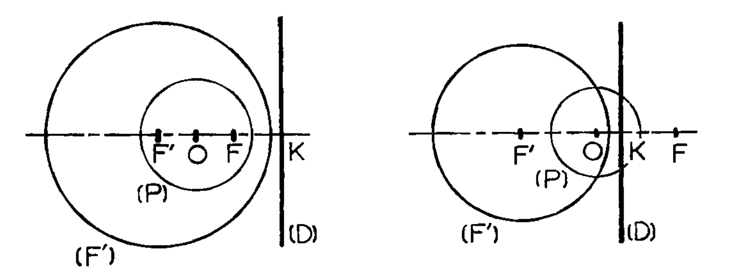


Fig. 3 a.

On sait que la directrice d'une parabole est elle aussi extérieure à la courbe :

Les directrices d'une conique sont extérieures à la conique.

Cas de l'hyperbole : (fig. 3b)

Si du foyer F on mène les tangentes FG et FG' au cercle principal, les points de contact G et G' appartiennent à la polaire de F par rapport à ce cercle, donc à la directrice (D), or on sait que ces points G et G' appartiennent aux asymptotes de l'hyperbole, donc :

les points communs aux directrices et aux asymptotes d'une hyperbole appartiennent au cercle principal.

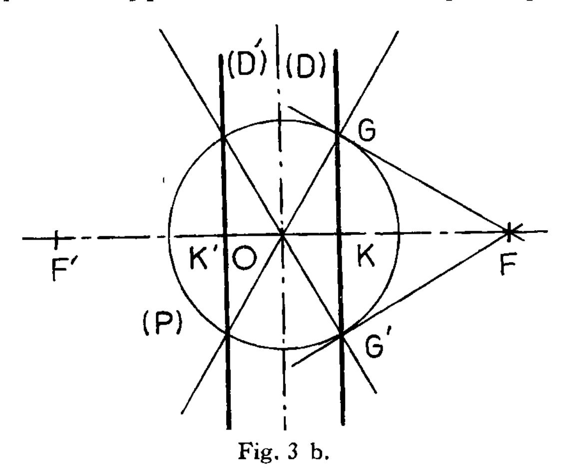


Fig. 3 b.

4. Sécante à la conique.

Soient M et M' deux points d'une conique (C) se projetant orthogonalement en H et H' sur la directrice (D) associée au foyer F (fig. 4 a).

on a : $$\frac{MF}{MH} = \frac{M'F}{M'H'} = e \quad \text{donc} \quad \frac{MF}{M'F} = \frac{MH}{M'H'}. \qquad (1)$$

Si la sécante MM' coupe la directrice en P, une homothétie de centre P donne : $$\frac{MH}{M'H'} = \frac{PM}{PM'};$$

de ces deux relations on tire : $$\frac{PM}{PM'} = \frac{MF}{M'F}; \qquad (2)$$

ce qui montre que FP est l'une des bissectrices de l'angle F du triangle MFM'.

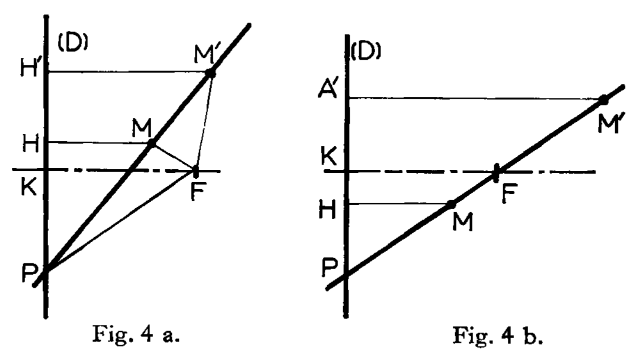


Fig. 4 a. Fig. 4 b.

M et M' sont de part et d'autre de (D) s'ils appartiennent à deux branches distinctes d'une hyperbole et dans ce cas FP est bissectrice intérieure de MFM'.

M et M' sont d'un même côté de (D) s'ils appartiennent à une ellipse, ou à une parabole, ou à une même branche d'une hyperbole, et alors FP est bissectrice extérieure de MFM'.

Si une sécante non focale coupe une conique en M et M' et coupe en P la directrice associée au foyer F, FP est l'une des bissectrices de l'angle MFM'.

Cas particulier : sécante focale (fig. 4 b).

Le raisonnement précédent n'est plus valable si la droite MM' passe par le foyer, mais alors les relations (1) et (2) donnent : $\frac{FM}{FM'} = \frac{PM}{PM'}$ ce qui montre que la division (FPMM') est harmonique.

Le foyer et la directrice associée divisent harmoniquement une sécante focale.

5. Tangente à une conique.

Reprenons la figure 4a dans le cas où M et M' appartiennent soit à une ellipse, soit à une parabole, soit à une même branche d'une hyperbole, donc où FP est bissectrice extérieure de MFM' et étudions le cas où M' tend vers M en décrivant la conique.

La bissectrice intérieure de MFM′ est une droite FQ perpendiculaire à FP ; à la limite, FQ est confondue avec FM ; donc l'angle MFP est droit et MP est la tangente en M à la conique.

Le segment de tangente compris entre le point de contact et la directrice est vu du foyer associé sous un angle droit.

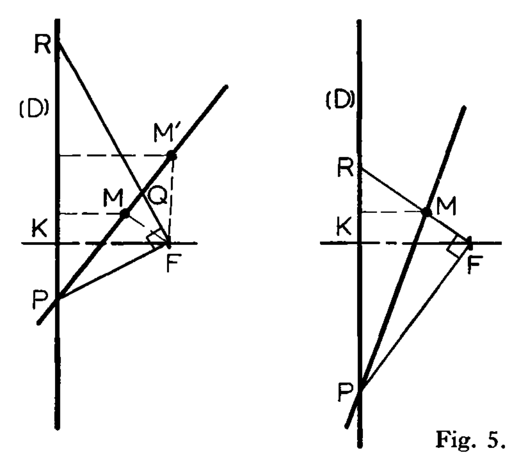


Fig. 5.

Réciproquement, si une droite rencontre la conique en M et coupe la directrice en (P′) tel que MFP′ soit droit, le point P′ coïncide avec le point P, donc la droite MP′ est la tangente en M à la conique :

Une droite qui rencontre une conique en M et coupe la directrice en P est tangente à la conique si, et seulement si, le segment MP est vu du foyer associé sous un angle droit.

6. Tangentes aux extrémités d'une corde focale.

Si les tangentes en des points M_1 et M_2 coupent la directrice en un même point P, l'égalité

$$\widehat{M_2FP} = \widehat{M_2FP} = 1 \text{ droit}$$

montre que M_1, M_2 et F sont alignés sur la perpendiculaire à FP en P.

Fig. 6.

Réciproquement, si M_1, F et M_2 sont alignés, les tangentes en M_1 et M_2 coupent la directrice en un même point P qui est sur la perpendiculaire à M_1M_2 issue de F.

Deux tangentes à une conique se coupent sur la directrice si, et seulement si, les points de contact sont les extrémités d'une corde passant par le foyer associé.

EXERCICES

616. On considère tous les arcs de cercles passant par deux points fixes A et B. Ensemble des points M situés au tiers de l'arc AB à partir de A.

617. Ensemble des centres des cercles (γ) qui passent par un point donné A et coupent une droite donnée (D) sous un angle constant.

618. Sur un segment fixe AB, on construit les triangles ABC tels que $A = 2B$. Par le pied D de la bissectrice intérieure AD, on mène la parallèle à AB qui recoupe AC au point E. Ensembles des points E et C.

619. Le sommet A d'un triangle isocèle AMB reste fixe ($AM = MB$). Le sommet B décrit une droite fixe (D) et le côté MB reste parallèle à une direction fixe. Ensemble des sommets M.

620. Dans une hyperbole, les projections P et Q d'un foyer F sur les asymptotes sont sur la directrice relative à ce foyer. Le sommet A est équidistant des droites FP et PQ.

Application. — Quelle est l'enveloppe des asymptotes des hyperboles qui ont même foyer F et même directrice associée (D) ?

621. On joint un foyer F à un point M variable sur une conique. La droite FM rencontre en M′ la directrice (D) relative à F. Démontrer que la différence $\frac{1}{\overline{FM}} - \frac{1}{\overline{FM'}}$ est constante.

622. On considère une conique dont le foyer est F et la directrice associée (D). Par un point M, variable sur (D) on mène les tangentes à cette conique. Démontrer que la droite PP′ qui joint les projections de F sur ces tangentes passe par un point fixe.

623. Montrer que les directrices des coniques ayant un foyer donné et passant par deux points donnés, passent par un point fixe. Discuter le genre de la conique suivant la position de la directrice variable. Lieu du second foyer.

624. On considère les coniques qui ont une directrice donnée (D) et qui sont tangentes à une droite donnée (T) en un point donné A. Trouver le lieu du foyer F associé à (D), et distinguer le genre de la conique suivant la position de F sur son lieu.

625. On considère les coniques qui passent par deux points A et B et admettent pour directrice la droite (D). Lieu du foyer F relatif à cette directrice. Discuter le genre de la conique.

626. Lieu des foyers des coniques admettant

1° la tangente (T), la directrice (D) et l'excentricité e ;

2° La directrice (D) et l'asymptote (P).

627. Montrer que les points d'intersection de deux coniques ayant une directrice commune sont sur un même cercle.

628. Par un point M d'une hyperbole, on mène la perpendiculaire MP à une directrice (D) et la parallèle à une asymptote qui coupe la directrice en Q. Démontrer la relation MF = MQ, F étant le foyer associé à la directrice (D).

629. Lieu des foyers des hyperboles dont on donne les deux points M et N et les directions des asymptotes.

630. Construire la directrice d'une conique relative à un foyer donné F, connaissant :

1° deux points M et N, la tangente en l'un d'eux ;
2° un point M et une asymptote (Δ) ;
3° un point M et le sommet A ;
4° deux points M et N et l'excentricité e ;
5° trois points M_1, M_2 et M_3.

631. Construire le foyer F d'une conique relatif à une directrice donnée (D) connaissant :

1° trois points M_1, M_2, M_3 de la courbe ;
2° deux points M et N et la tangente en l'un d'eux ;
3° deux points M et N et l'excentricité e ;
4° deux points M et N et la direction d'une asymptote ;
5° un point M et une asymptote (Δ).

632. Construire les foyers d'une conique connaissant :

1° deux points M et N et les directrices (D) et (D') ;
2° une directrice (D), une asymptote (Δ) et l'une des longueurs $2a$ ou $2c$ de l'axe ou de la distance focale ;
3° la directrice (D), un point et le centre O.

633. Construire une conique connaissant :

1° la directrice (D), deux tangentes et l'excentricité ;
2° la directrice (D), un point M et le sommet A.

634. Construire une hyperbole connaissant les deux directrices (D) et (D') une direction asymptotique et un point A.

635. On considère les coniques qui passent par deux points donnés A, B et qui ont pour directrice une droite donnée D.

1° Quel est le lieu du foyer associé à la directrice donnée ?

2° Étudier la nature de la conique correspondante quand le foyer décrit son lieu.

3° Construire les tangentes en A et B à la conique qui correspond à une position donnée du foyer sur son lieu.

4° Construire le deuxième point d'intersection de la conique qui correspond à une position donnée du foyer F sur son lieu avec les droites AF et BF.

(Rio de Janeiro, 1950.)

636. On donne deux points fixes A et F.

1° Ensemble des points de contact T des tangentes issues de A aux coniques dont F est l'un des foyers et dont la directrice associée passe par A.

On appelle coniques (C) celles des coniques précédentes qui ont une excentricité donnée.

2° Combien passe-t-il de coniques (C) par un point M donné du plan ? (On construira les directrices associées à F. Discussion.

3° Ensemble des points M pour lesquels la question précédente admet une seule solution.

4° Ensemble des points M pour lesquels la construction du 2° donne deux directrices passant par A et faisant un angle donné 2α.

5° Ensemble des sommets des coniques (C) situés sur l'axe focal.

(Caen, 1950.)

637. On considère les ellipses (E) qui ont une directrice donnée (D), une excentricité donnée $e < 1$, et qui passent par un point donné M.

1° Quel est le lieu des foyers F, relatifs à (D), des ellipses (E) ?

2° Construire les ellipses (E) admettant pour tangente en M une droite donnée MT.

3° Construire les ellipses (E) passant par un second point donné N. Discuter la possibilité du problème selon la position de N.

4° La discussion du 3° fait apparaître une ellipse (S). Si N est sur (S), il existe une seule ellipse (E) passant par N. Montrer qu'elle est tangente à (S) en N.

(Istambul, 1948.)

638. Un angle de grandeur constante pivote dans son plan autour de son sommet F ; ses côtés rencontrent en A et B un axe fixe (Δ).

1° En prenant pour origine sur (Δ) le pied C de la perpendiculaire FC montrer que les abscisses des points A et B sont liées par une relation indépendante de la position de l'angle.

2° Si M est le centre du cercle circonscrit au triangle FAB, et MP la perpendiculaire sur (Δ), calculer le rapport $\frac{MF}{MP}$; en déduire le lieu de M.

Montrer que ce cercle est tangent à un cercle fixe (F′) que l'on déterminera. Cas où $\alpha = \pi/2$.

3° Calculer la puissance du point C par rapport au cercle (F′).

4° Par A on mène AD perpendiculaire sur FA et qui coupe FB en D. De même BE perpendiculaire sur BF coupe FA en E. Lieu des points D et E. Soit N le centre du cercle circonscrit au quadrilatère ADBE. Montrer que le lieu de N peut être considéré comme la projection orthogonale d'une courbe égale au lieu de M.

639. On considère une ellipse (E) d'excentricité e, de foyer F et de directrice associée (D). On désignera par *a* le demi grand axe, par *b* le demi petit axe, par c la demi-distance focale de cette ellipse. H sera la projection orthogonale de F sur (D).

1° On définit chaque point M de l'ellipse par l'angle $\theta = (\overrightarrow{FH}, \overrightarrow{FM})$ et par la longueur $r = FM$.

Exprimer *r* en fonction de e, de θ et du demi grand axe *a* de l'ellipse.

2° FM coupe la directrice (D) en un point I et recoupe l'ellipse en un point N.

Montrer que la somme $\frac{1}{FM} + \frac{1}{FN}$ garde une valeur constante, qu'on calculera en fonction de *a* et de *b*, lorsque M décrit l'ellipse.

On considère les cercles de diamètre MN et de diamètre FI. Que peut-on dire de ces deux cercles ? Comment se transforment-ils dans une inversion de pôle F et de puissance $\overline{FH}^2$? Déterminer le centre et calculer le rayon du cercle (C′) inverse du cercle (C) de diamètre MN. Quel est le lieu du centre de (C′) lorsque M décrit l'ellipse E ?

3° A chaque point M de l'ellipse on fait correspondre le point M′ du cercle principal situé du même côté que M par rapport au grand axe sur la perpendiculaire menée de M à ce grand axe. O désignant le centre de l'ellipse, on pose

$$\alpha = (\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OM'}).$$

Trouver la relation qui lie α et θ (on pourra, par exemple, écrire l'égalité vectorielle $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{FM} + \overrightarrow{MM'}$ et projeter sur l'axe OH).

Montrer que cette égalité peut se mettre sous la forme

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}.$$

Rendre cette expression calculable par logarithmes en posant $e = \cos \varphi$.

(A. O. F., 1951.)

640. Soient, dans un plan, un segment de droite OA de longueur $3a$ et sa médiatrice (Δ). On considère l'hyperbole (H) de sommet A qui admet O pour foyer et (Δ) pour directrice associée à ce foyer.

1° Trouver l'excentricité de (H). Calculer, en prenant O pour origine des abscisses le long de la droite OA et le sens de O vers A comme sens positif, l'abscisse du centre ω de cette hyperbole. Trouver l'angle que font les asymptotes avec la droite OA.

2° Une droite quelconque (L) passant par O coupe (Δ) en I, et (H) en U et V. Démontrer que AU et AV sont les bissectrices de l'angle OAI ; on désignera par U′ et V′ les projections orthogonales de U et V sur (Δ), par U″ et V″ les symétriques de U et V par rapport à (Δ).

3° Le milieu M de UV se projette orthogonalement en M′ sur (Δ). Comparer dans les divers cas de figure les longueurs MA et MM′. Trouver le lieu (K) décrit par le point M lorsque la droite (L) pivote autour du point O. Montrer que ce lieu et l'homologue de (H) dans l'une ou l'autre de deux transformations simples.

4° Soit P un point arbitraire de (H), distinct du point A ; on désigne par P′ la projection orthogonale du point P sur (Δ), et par P″ le symétrique de P par rapport à (Δ).

On trace le cercle (C) circonscrit au triangle OAP ; soit C le centre de ce cercle. Démontrer que les angles de droites (CO, CP) et (CO, Δ) vérifient la relation

$$(CO, CP) = \frac{2}{3}(CO, \Delta).$$

En déduire que le cercle (C) coupe de nouveau l'hyperbole (H) en deux points Q, R formant avec P un triangle équilatéral. (Toulouse, 1950.)

641. Soit (C) une conique de centre O et de foyers F et F′. Comment déterminer une conique (C′) d'excentricité donnée, passant par F et F′ et ayant pour foyer un point M de (C) ? Indiquer sans aucune discussion, le principe de la construction. On examinera ensuite les cas particuliers suivants où (C′) est une parabole.

1° (C) est une ellipse. Tout point M de (C) autre que les sommets du grand axe est le foyer de deux paraboles passant par F et F′ et dont les directrices sont les tangentes au cercle principal aux points M′ et M″ où ce dernier est coupé par la perpendiculaire menée de M sur l'axe focal. Ces directrices et la tangente en M à l'ellipse concourent en M_1 sur l'axe focal FF′.

On mène à ces paraboles les tangentes parallèles à FF′. Trouver le lieu des points de contact quand M parcourt l'ellipse.

2° Soit φ l'angle du rayon de OM′ avec OF (φ aigu) ; exprimer en fonction de φ les paramètres des deux paraboles. M étant supposé sur le premier quadrant de l'ellipse, trouver sur le même quadrant un autre point N, tel que l'une des paraboles

de foyer N soit égale à l'une des paraboles de foyer M. Quelle condition doit remplir φ pour qu'il y ait deux positions de N ?

3° (C) est une hyperbole. Tout point M de (C) est le foyer de deux paraboles passant par F et F' et dont les directrices sont les perpendiculaires aux deux asymptotes aux points où celles-ci sont coupées par la perpendiculaire menée de M sur l'axe focal FF'. Ces directrices et la normale en M à l'hyperbole concourent sur l'axe focal. Le produit des deux paramètres est constant quand M parcourt l'hyperbole.

(Alger.)

642. Soient, en axes rectangulaires Ox, Oy, une ellipse de foyers F et F' ($x = \pm c$, $y = 0$), d'axes $2a$ et $2b$, et une droite (D) passant par l'origine et de coefficient angulaire m.

1° Une parallèle (D') à (D) coupe l'ellipse en M et M'. Lieu (Δ) du milieu de MM' lorsque (D') se déplace parallèlement à (D). Solutions algébriques et géométrique.

2° Soient I, J, K les points de rencontre de la directrice relative à F avec la droite (D), avec la droite (Δ) et avec l'axe focal. Démontrer que $\overline{KI}\,.\,\overline{KJ} = -\overline{KO}\,.\,\overline{KF}$. Solutions algébrique et géométrique.

3° Montrer que le cercle circonscrit au triangle OIJ passe par un point fixe lorsque (D) tourne autour de O. En déduire l'orthocentre du triangle OIJ.

4° La parallèle à OI menée par F coupe en R la droite (Δ). On appelle P et P' les points de rencontre de l'ellipse et de la droite (Δ). Démontrer que $\overline{OP}^2 = \overline{OR}.\overline{OJ}$.

(La Réunion, 1949.)

643. On considère deux axes rectangulaires $x'Ox$, $y'Oy$, un point fixe F de Ox d'abscisse positive a, la droite (D) d'équation $y = x \operatorname{tg} u$, où u est un angle aigu positif. Soient M un point variable de (D), d'abscisse x, H la projection de M sur $y'Oy$.

1° Évaluer en fonction de x le rapport $z = \dfrac{\overline{MF}^2}{\overline{MH}^2}$. Variations de ce rapport quand M décrit la droite (D), u restant fixe. Courbe représentative.

2° On désigne par (C) la conique de foyer F, de directrice associée $y'Oy$, d'excentricité e. Utiliser les résultats du premier paragraphe pour discuter l'existence des points communs à (D) et (C) quand e varie.

Cas où $e = \dfrac{1}{\cos u}$. Que peut-on dire alors de la droite (D) relativement à (C)? Déterminer dans ce cas particulier le centre de (C), les asymptotes et les sommets.

3° On prend un point fixe I sur (D) et l'on considère le cercle (I) de centre I et de rayon e . IK, K étant la projection de I sur $y'Oy$.

Déterminer les points Q et R communs à (D) et (C) en utilisant les points communs à $x'Ox$ et au cercle (I). Retrouver ainsi les résultats du deuxième paragraphe.

Lieu, quand e varie, du point de rencontre des tangentes en Q et R à (C).

S étant un point donné du plan, la conique de foyer F, de directrice associée $y'Oy$ et passant par S est bien déterminée. Discuter le genre de cette conique suivant la position de S dans le plan.

4° S étant tel que l'excentricité soit 1, trouver le lieu géométrique du milieu P de QR quand u varie. (Q et R sont encore les points d'intersection de la conique avec la droite (D) d'équation $y = x \operatorname{tg} u$.) (Alger, 1948.)

644. Soient un segment AB, Δ sa médiatrice, ω le centre d'un cercle variable (ω) passant par A et B. Le cercle (ω) coupe Δ en D en D' et les droites BD et BD' coupent respectivement la tangente en A à (ω) en C et C'.

1° Montrer que AD et AD' sont bissectrices de l'angle BAC. En déduire que le lieu de C et C' est une hyperbole (H) de foyer A et de directrice Δ. Préciser les éléments de cette hyperbole. Déterminer en particulier le foyer F autre que A.

2° Soit P le pôle de la droite BC par rapport à (ω). Montrer que la droite CP coupe AB en Q symétrique de A par rapport à B. En déduire que la tangente autre que CA menée de C à (ω) coupe AB en F. Construire les tangentes à (H) en C et en C' ; quel est leur point d'intersection ?

3° Le point C étant du même côté que A par rapport à Δ, démontrer que les côtés $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ du triangle ABC vérifient la relation $a^2 = b(b + c)$. Montrer que l'on doit avoir $b < a < 2b$.

4° Déterminer a, b, c entiers, premiers entre eux dans leur ensemble. Montrer que b doit être carré parfait, puis exprimer a et c.

Application. — Trouver toutes les valeurs entières de a, b, c lorsque $b = 25$.

645. On appelle dans ce problème hyperboles (H) toutes les hyperboles qui admettent une asymptote donnée (D) et un foyer donné F.

1° Rappeler la disposition d'un foyer F d'une hyperbole et de la directrice associée (Δ) par rapport au cercle principal. Préciser la position des points d'intersection de ce cercle et des asymptotes.

2° F et (D) étant donnés, montrer que les cercles principaux des hyperboles (H) sont tangents à une droite fixe en un point fixe, et qu'il en est de même des cercles directeurs qui ont pour centre le foyer F' de (H) autre que F. Quelle est l'enveloppe de la directrice (Δ) associée à F ? Quelle est l'enveloppe de la deuxième asymptote de (H) ? Quelle est l'enveloppe de l'axe non focal de (H) ?

3° Construire (H) lorsqu'on donne, outre F et (D) :

a) un point de la directrice (Δ) associée à F ;

b) un point P de (H). Discuter suivant la position de P dans le plan ;

c) une tangente à (H).

646. On donne, dans le plan orienté, une droite fixe (D) et un point fixe F, dont la distance à (D) est $FH = h$.

Deux demi-droites variables issues de F rencontrent (D) en M et M', et $(\overrightarrow{FM}, \overrightarrow{FM'}) = \pi/3$.

1° Préciser quel est l'ensemble des points M, des points M'. Montrer que le centre C du cercle (C) circonscrit au triangle FMM' décrit une branche d'hyperbole (H) de directrice (D). Préciser la position de ses sommets, de son centre, de ses asymptotes.

2° Construire l'inverse (C') du cercle (C) dans l'inversion de pôle F et de puissance h^2. Montrer que (C') enveloppe un arc de cercle. Retrouver à l'aide de cette inversion les résultats du premier paragraphe.

3° Ensembles de points I et I', centres des cercles inscrit et exinscrit dans l'angle F du triangle FMM'. Comparer la courbe trouvée à l'ensemble des points C. Construire les tangentes en I et I' à la courbe trouvée et indiquer le lieu géométrique du point d'intersection de ces tangentes.

647. Étant donnés deux points fixes F et I, dont la distance est $FI = d$, on considère les ellipses (E), d'excentricité e, qui ont pour foyer F et pour directrice associée une droite variable (D) passant par I.

1° (D) étant donnée, construire les quatre sommets A, A', B, B' de l'ellipse (E). En désignant par u l'angle de (D) avec IF, calculer la longueur du grand axe AA' de l'ellipse (E). Déterminer (D) de manière que AA' ait une longueur donnée. Discuter.

2° H étant la projection orthogonale de F sur (D), montrer que les rapports $\dfrac{\overline{FA}}{\overline{IH}}$ et $\dfrac{\overline{FA'}}{\overline{FH}}$ restent constants quand (D) varie en passant par I.

Lieux géométriques des sommets A, A′, du centre O, du deuxième foyer F′, de l'ellipse (E). Enveloppe du petit axe et de la deuxième directrice (D′).

3° Indiquer comment varie le triangle FOB. Lieux géométriques des sommets B, B′. Un point B étant choisi (sur la courbe trouvée) déterminer le centre, les autres sommets, le deuxième foyer et les directrices de l'ellipse (E) dont le petit axe a une extrémité en B.

N. B. Les constructions demandées seront faites en prenant FI = 3 cm et $e = 1/\sqrt{2}$.

648. On considère une ellipse variable (E) d'excentricité constante, passant par un point fixe O et admettant une directrice fixe (D).

1° Montrer que l'ensemble des foyers F des ellipses (E), relatifs à la directrice (D) est un cercle.

2° Soit K le point d'intersection d'une ellipse (E) avec la droite qui joint le point O au foyer F de l'ellipse. Donner une construction de K. Montrer que le lieu de K est une ellipse (E_1) dont l'un des foyers est O.

3° Indiquer une construction pour les tangentes en K à (E) et (E_1). Montrer que ces deux tangentes coïncident et, par suite que (E) et (E_1) sont tangentes en K.

4° Trouver le lieu du milieu M de OK et trouver son intersection avec une droite quelconque passant par O. (Egypte, 1957.)

649. On considère deux axes de coordonnées rectangulaires Ox, Oy et le point F de coordonnées $(2a, 2a)$ a positif. F est le centre du cercle fixe (C) de rayon $2a$. Un cercle variable (K) de centre $M(x, y)$ passe par le point fixe O et reste tangent au cercle (C).

1° Montrer que l'ensemble des points M est une conique (H). Fixer avec précision les éléments géométriques de cette conique. En particulier, indiquer la construction des directrices et donner leurs équations dans le système d'axes Ox, Oy. Quelle est l'excentricité de cette conique ?

2° Évaluer en fonction de x et de y :

a) le carré de la distance OM ;

b) le carré de la distance de M à la droite (D) ayant pour équation $x + y - a = 0$.

En déduire la relation qui doit lier x et y pour que M appartienne à l'hyperbole équilatère de foyer O et de directrice associée (D). Montrer qu'elle peut s'écrire :

$$y = \frac{a}{2}\,\frac{2x - a}{x - a}.$$

Tracer cette hyperbole et comparer les résultats à ceux du 1°.

3° Un cercle variable (K) défini dans le préambule, coupe Ox en P et Oy en Q.

Exprimer les mesures arithmétiques des longueurs OP et OQ en fonction de l'abscisse x de M. Reconnaître que ces expressions diffèrent l'une de l'autre suivant que x appartient à l'un ou l'autre des quatre intervalles séparés par les nombres 0, $a/2$ et a.

Déduire de cette étude l'expression de la somme $z = OP + OQ$ et tracer la courbe représentative des variations de z quand x varie. (Alger, 1959.)

650. On considère sur une droite xy un segment FK de longueur d, la droite (D) perpendiculaire à xy en K et l'on appelle conique (C) toute conique admettant F pour foyer et (D) pour directrice associée à ce foyer.

1° Montrer que par tout point A du segment FK il passe une conique (C) et une seule. Quel est, d'après la position de A, le genre de cette conique ?

Si (C) est une ellipse ou une hyperbole, comment peut-on construire le point A′ où cette conique recoupe la droite xy et déterminer ainsi le centre O de (C) et son cercle principal (Γ) ?

Comment peut-on déterminer une conique (C) qui a pour centre un point O donné sur xy ; Condition de possibilité ?

Comment peut-on déterminer une conique (C) dont le cercle principal (Γ) a pour diamètre une longueur donnée $2a$? Montrer qu'il y a deux coniques (C) répondant à cette condition et dire quelle relation existe entre leurs excentricités e et e_1.

2° On considère une conique (C) de cercle principal (Γ), on marque un point T sur la droite (D) et l'on trace le cercle (ω) de centre ω et de diamètre FT qui coupe (Γ) en N et N'. Démontrer que les droites TN et TN' sont tangentes à la conique (C) et que les points de contact M et M' appartiennent à la tangente en F au cercle (ω). Comment peut-on adapter ce mode de construction au cas où (C) est une parabole ?

Lorsque (C) est une hyperbole, pour quelles positions de T, pris sur (D), les points de contact M et M' sont-ils sur la même branche de celle-ci ?

3° Démontrer que, si (C) a un centre O, le diamètre apparent du cercle (Γ) vu du point ω est toujours égal au double de l'angle aigu α sous lequel se coupent les tangentes TN et TN'.

Déterminer alors, par une construction, les coniques (C) qui sont telles que si de T donné sur (D), on trace les tangentes à l'une d'elles, celles-ci forment un angle aigu de valeur donnée α. Faire la construction en supposant $\alpha = 60°$.

(Ethiopie, 58.)

CHAPITRE 36

SECTIONS CONIQUES

1. Cône circonscrit à la sphère.

Proposons-nous d'étudier l'ensemble des droites passant par un point donné S et tangentes à une sphère (Σ) donnée, de centre O et de rayon R.

Soient SA et SM deux de ces tangentes. Les plans méridiens SAO et SMO coupent la sphère suivant des grands cercles auxquels SA et SM sont respectivement tangentes en A et M :

$$\sin \widehat{ASO} = R/SO$$
$$\sin \widehat{MSO} = R/SO$$

ce qui montre que $\widehat{ASO} = \widehat{MSO}$: cet angle est indépendant de la tangente envisagée (on pose $\widehat{ASO} = \alpha$) donc les tangentes sont les génératrices d'une surface conique de révolution de sommet S, d'axe SO, de demi-ouverture α.

Inversement, toute génératrice de cette surface conique est tangente à un grand cercle de la sphère, donc à la sphère :

L'ensemble des droites passant par un point S donné et tangentes à une sphère donnée, est une surface conique de révolution de sommet S, appelée surface conique circonscrite à la sphère.

Les segments de tangentes SA et SM sont les côtés de triangles rectangles égaux, donc sont égaux:

Deux tangentes à une même sphère, issues d'un même point, ont même longueur.

Les triangles rectangles égaux, SAO et SMO, ont même hypoténuse SO : les sommets A et M se projettent donc orthogonalement en un même point I sur SO et les hauteurs AI et MI sont égales, ce qui montre que :

l'ensemble des points de contact est un cercle (γ) de centre I. Ce cercle est appelé cercle de contact. Il est la base d'un cône de révolution de sommet S appelé cône circonscrit à la sphère.

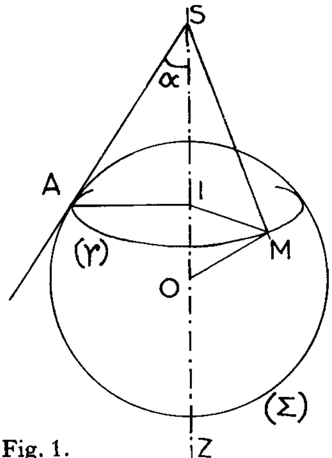


Fig. 1.

Le plan tangent à la surface conique en un point M du cercle de contact est déterminé par la génératrice SM et la tangente en M au cercle de contact, or ces deux droites sont tangentes à la sphère en M, donc elles déterminent le plan tangent en M à la sphère :

la sphère et la surface conique circonscrite admettent même plan tangent en un point quelconque du cercle de contact.

Nous remarquerons que la sphère et la surface conique circonscrite peuvent être engendrées, dans une même rotation d'axe Sz, par une génératrice et un demi grand cercle.

2. Sphères inscrites à une surface conique de révolution et tangentes à un plan donné.

Soit (S) une surface conique de révolution d'axe Sz. Si un **plan méridien quelconque** coupe la surface (S) suivant deux génératrices (g) et (g'), il existe une infinité de cercles (C) tangents aux droites (g) et (g') ; ces cercles engendrent par rotation autour de Sz des sphères inscrites à la surface conique.

Si un **plan (P) quelconque** coupe la surface conique, il existe, en général, un plan (R) et un seul, qui contient Sz et qui est perpendiculaire au plan (P) : ce plan (R) est un plan méridien, il coupe la surface conique suivant deux génératrices (g) et (g'), et le plan (P) suivant une droite (d).

En général, les droites (g), (g') et (d) déterminent un triangle SAA′ et il existe deux cercles centrés sur Sz et tangents aux trois droites, ce sont :

- soit les cercles inscrit et exinscrit dans l'angle S du triangle SAA' (fig. 2 a).
- soit les cercles exinscrits dans les angles A et A' (fig. 2 b).

Ces cercles sont les grands cercles de sphères (Σ) inscrites dans la surface conique et tangentes au plan (P).

Cas particuliers.

Le problème est indéterminé si le plan (P) passe par S*z* ou s'il est perpendiculaire à S*z*.

Si la droite (*d*) est parallèle à une génératrice, donc si le plan (P) est lui-même parallèle à cette génératrice, il n'existe qu'une seule sphère (Σ) (fig. 2 c).

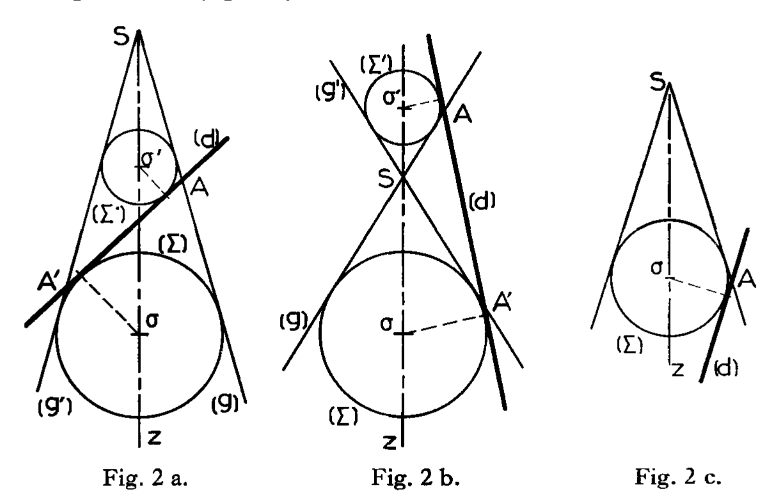


Fig. 2 a. Fig. 2 b. Fig. 2 c.

3. Surface cylindrique circonscrite à une sphère.

Proposons-nous d'étudier l'ensemble des droites parallèles à une direction (δ) et tangentes à une sphère (Σ) donnée, de centre O et de rayon R.

Soient (*g*) et (*g'*) deux de ces droites tangentes respectivement en A et M à la sphère (Σ). Les plans méridiens passant par (*g*) et (*g'*) coupent la sphère suivant des grands cercles auxquels (*g*) et (*g'*) sont tangentes en A et M respectivement, donc ces droites sont équidistantes du centre O, elles sont les génératrices

d'une surface cylindrique de révolution dont l'axe $z'z$, parallèle à la direction (δ), passe par O.

Inversement, toute génératrice de cette surface cylindrique est tangente à un grand cercle de la sphère, donc à la sphère :

l'ensemble des droites parallèles à une direction donnée et tangentes à une sphère donnée est une surface cylindrique de révolution, appelée surface cylindrique circonscrite à la sphère.

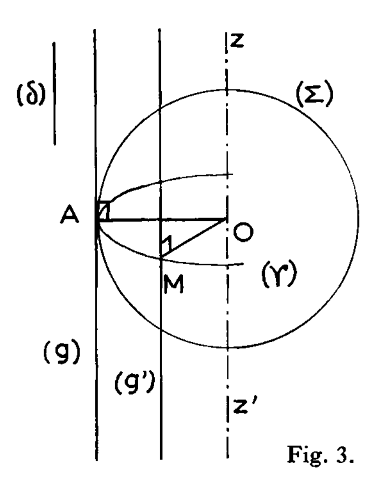


Fig. 3.

Les points de contact A et M se projettent orthogonalement sur l'axe $z'z$ au même point O et sont équidistants de ce point, donc :

l'ensemble des points de contact est un grand cercle de la sphère appelé cercle de contact.

Le plan tangent à la surface cylindrique en un point M du cercle de contact est déterminé par la génératrice passant par M et par la tangente en M au cercle de contact, or ces deux droites sont tangentes à la sphère en M, donc elles déterminent le plan tangent en M à la sphère.

La sphère et la surface cylindrique circonscrite admettent même plan tangent en un point quelconque du cercle de contact.

Nous remarquerons que la sphère et la surface conique circonscrite peuvent être engendrées dans une même rotation par une génératrice et un demi-grand cercle.

4. Sphères inscrites à une surface cylindrique de révolution et tangentes à un plan donné.

Soit (S) une surface cylindrique de révolution d'axe $z'z$. Si **un plan méridien quelconque** coupe la surface (S) suivant deux génératrices (g) et (g'), il existe une infinité de cercles tangents aux droites (g) et (g') : ces cercles engendrent par rotation autour

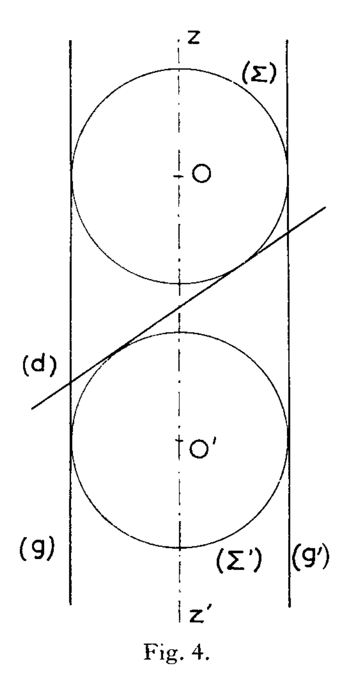


Fig. 4.

de Sz des sphères inscrites à la surface cylindrique.

Si un **plan (P) quelconque** coupe la surface cylindrique, il existe en général un plan (R) et un seul qui contient $z'z$ et est perpendiculaire au plan (P), il coupe la surface cylindrique suivant deux génératrices (g) et (g') et le plan (P) suivant une droite (d).

En général, il existe deux cercles centrés sur $z'z$ et tangents aux trois droites (g), (g') et (d) ; ces cercles sont les grands cercles de sphères (Σ) inscrites dans la surface (S) et tangentes au plan (P).

Cas particulier : il n'existe aucune sphère (Σ) si le plan (P) passe par $z'z$, donc s'il est parallèle aux génératrices.

5. Section plane d'une surface conique de révolution.

Soit (S) une surface conique de révolution de sommet S, d'axe Sz, de demi-ouverture α, coupée par un plan (P) faisant avec Sz un angle aigu θ.

1er cas particulier : le plan (P) passe par le sommet.

L'intersection du plan (P) et de la surface (S) est :

- soit le point S seul si $\theta > \alpha$
- soit une génératrice unique si $\theta = \alpha$
- soit l'ensemble de deux génératrices si $\theta < \alpha$.

(Cours de Première).

2me cas particulier : le plan (P) est perpendiculaire à Sz.

L'intersection du plan (P) et de la surface conique est un cercle (C) centré sur l'axe Sz.

Cas général,

Dans tous les autres cas, on appelle :

(R) le plan méridien perpendiculaire au plan (P) ;

(Σ) une sphère inscrite à la surface conique et tangente au plan (P) ;

(Q) le plan du cercle de contact de (S) et (Σ) ;

(D) l'intersection des plans (P) et (Q) ;

F le point de contact du plan (P) et de la sphère (Σ).

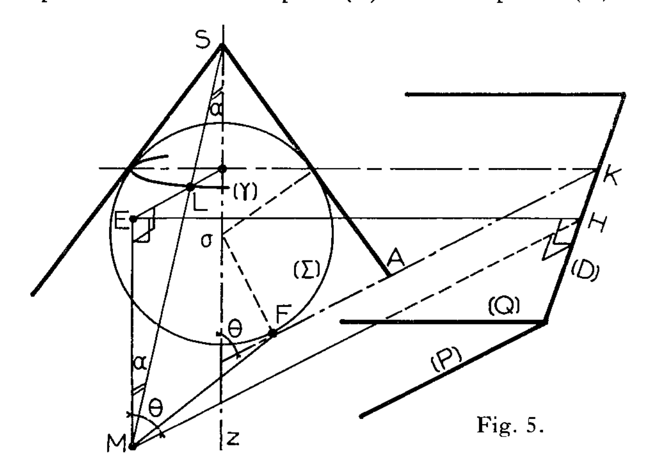


Fig. 5.

Le plan méridien (R) est plan de symétrie de la figure, donc il est perpendiculaire au plan (Q) et à la droite (D) qu'il coupe en K, et il contient le point F. L'angle aigu de Sz et FK est l'angle θ.

Soient M un point quelconque commun au plan (P) et à la surface (S),

H la projection orthogonale du point M sur la droite (D),

E la projection orthogonale du point M sur le plan (Q),

L le point de contact de la génératrice SM et de la sphère (Σ), on remarque que MF et ML sont deux tangentes égales.

Nous nous proposons d'étudier l'ensemble des points M. $\widehat{EMH} = \theta$ car MH est parallèle à FK et ME est parallèle à Sz, donc, dans le triangle MEH rectangle en E, on obtient :

$$ME = MH \cos\theta \qquad (1)$$

ME parallèle à Sz donne $\widehat{EML} = \widehat{LSz} = \alpha$ et, dans le

triangle MEL rectangle en E, on obtient :

$$ME = ML \cos \alpha$$

soit, avec MF = ML : $ME = MF \cos \alpha$ (2)

les relations (1) et (2) entraînent $\dfrac{MF}{MH} = \dfrac{\cos \theta}{\cos \alpha}$

ce qui montre que le rapport des distances d'un point M au point F et à la droite (D) est constant, donc que le point M appartient à la conique de foyer F et de directrice (D).

Réciproquement, tout point N de cette conique appartient à la surface (S) car le plan SNF coupe cette surface suivant deux génératrices dont les intersections avec le plan (P) sont deux points M_1 et M_2 qui appartiennent à la sécante focale NF, or cette sécante ne peut avoir plus de deux points communs avec la conique, donc N est confondu avec l'un des points M_1 ou M_2.

Discussion.

La conique est une **ellipse** si $e = \dfrac{\cos \theta}{\cos \alpha} < 1$

donc si : $\cos \theta < \cos \alpha$

et puisque θ et α sont aigus : $\theta > \alpha$.

On remarque que, dans ce cas, le plan (P) ne coupe qu'une seule nappe de la surface (S).

La conique est une **hyperbole** si $e = \dfrac{\cos \theta}{\cos \alpha} > 1$

donc si : $\cos \theta > \cos \alpha$

et $\theta < \alpha$

dans ce cas le plan (P) coupe les 2 nappes de la surface (S).

Dans les deux cas, il existe deux sphères (Σ) et (Σ') qui déterminent les deux foyers et les deux directrices de la conique.

La conique est une **parabole** si $e = \dfrac{\cos \theta}{\cos \alpha} = 1$

donc si : $\theta = \alpha$

dans ce cas, le plan (P) est parallèle à l'une des génératrices et il n'existe qu'une seule sphère (Σ).

La section d'une surface conique de révolution par un plan ne passant pas par le sommet est une ellipse, une hyperbole ou une parabole.

Ce théorème est connu sous le nom de théorème de Dandelin.

6. Étude de la section elliptique.

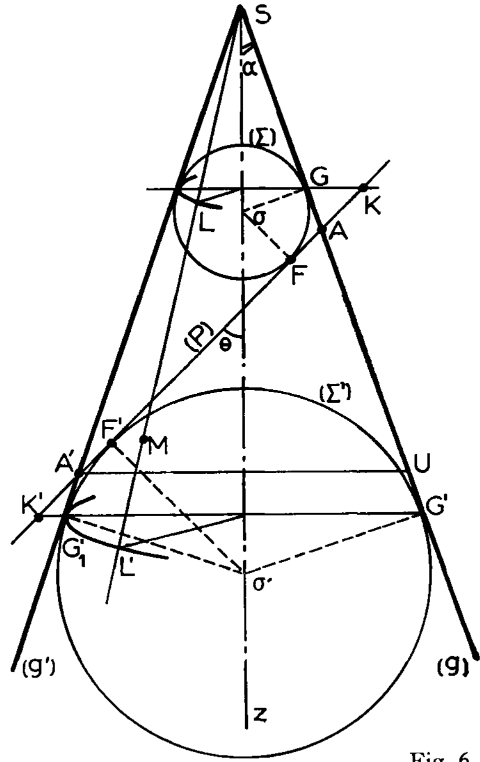


Fig. 6.

Reprenons la figure précédente dans le cas où $\theta > \alpha$. Le plan (P) coupe une seule nappe de la surface (S) et il existe deux sphères (Σ) et (Σ') situées de part et d'autre du plan (P).

Soient (*g*) l'une des génératrices du plan méridien (R), G et G′ ses points communs avec les cercles de contact ; les tangentes égales donnent :

$$\begin{aligned} GG' &= LL' \\ &= ML + ML' \\ &= MF + MF' \end{aligned}$$

F et F′ sont les foyers et l'on aura :

$$\mathbf{MF + MF' = GG' = 2a}.$$

La droite FF′ coupe la surface (S) en deux points, A et A′, qui sont les sommets de l'axe focal, donc

$$\mathbf{AA' = GG' = 2a.}$$

On note d'ailleurs :

$$\left.\begin{aligned} AG &= AF \\ AG' &= AF' \end{aligned}\right\} \Rightarrow GG' = AF + AF' = 2a.$$

Si U est le symétrique de A′ par rapport à l'axe S*z* (U ∈ *g*) on aura successivement : $UG' = A'G'_1 = A'F' = AF$

puis $AU = AG' - UG'$

$$AU = AF' - AF = FF' = 2c \qquad \mathbf{AU = 2c.}$$

7. Placer une ellipse sur une surface conique de révolution.

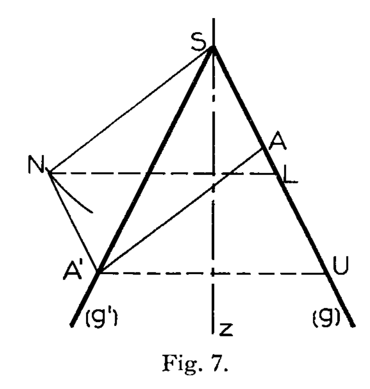


Fig. 7.

L'ellipse est donnée par son grand axe $2a$ et sa distance focale $2c$.

Remarquons d'abord que si le problème admet une solution il en admet une infinité qui se correspondent dans des rotations d'axe Sz. On peut donc choisir arbitrairement le plan méridien (R). Le problème revient à déterminer A sur (g) et A' sur (g') tels que :

$$AA' = 2a \quad \text{et} \quad AU = 2c.$$

On porte sur (g) la longueur $SL = 2c$ et de L on mène la perpendiculaire à l'axe, que l'on coupe en N par le cercle $(S, 2a)$. On mène NA' parallèle à (g) $(A' \in g')$ puis A'A parallèle à SN $(A \in g)$.

Le parallélogramme SNA'A donne : $\mathbf{AA' = SN = 2a}$.

Avec A'U parallèle à NL $(U \in g)$, on aura :

$$\begin{aligned} AU &= AL + LU \\ &= AL + NA' = AL + SA \\ \mathbf{AU} &= \mathbf{SL = 2c}. \end{aligned}$$

La condition $2a > 2c$ montre que le cercle $(S, 2a)$ coupe la droite LN en deux points qui donnent deux solutions symétriques par rapport à Sz.

8. Ensemble des sommets des cônes de révolution passant par une ellipse donnée.

Soient (E) une ellipse de grand axe AA', de foyers F et F' contenue dans un plan (P), et (Σ) une sphère quelconque tangente au plan (P) en F.

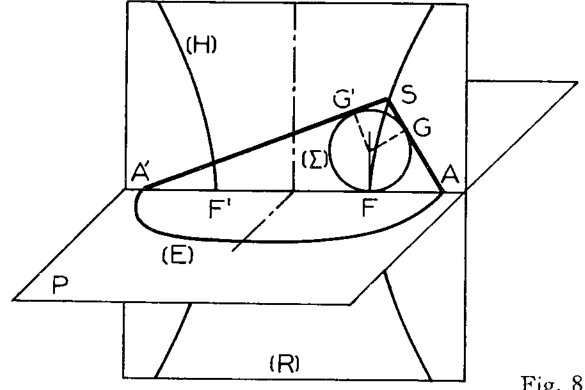


Fig. 8.

Le plan (R) perpendiculaire à (P) et passant par AA′ coupe (Σ) suivant un grand cercle (Γ) ; soient AG et A′G′ les tangentes à (Γ) autres que AF et A′F : elles se coupent en S. Le cône de révolution de sommet S circonscrit à (Σ) est coupé par (P) suivant une conique de grand axe AA′ et de foyer F, c'est-à-dire suivant l'ellipse (E).

Les tangentes égales donnent :

$$SA = SG + GA = SG + AF$$
$$SA' = SG' + G'A' = SG' + A'F$$

en tenant compte de SG = SG′, on obtient par différence :

$$SA' - SA = A'F - AF = FF'.$$

Pour une sphère tangente à (P) en F′, on obtiendrait de façon analogue

$$SA - SA' = FF'.$$

L'ensemble des points S est l'hyperbole de foyers A et A', de sommets F et F', située dans le plan (R) perpendiculaire au plan (P).

9. Étude de la section hyperbolique.

Reprenons la figure 5 dans le cas où $\theta < \alpha$. Le plan (P) coupe les deux nappes de la surface (S) et il existe deux sphères (Σ) et (Σ′) situées d'un même côté du plan (P).

Soit (*g*) l'une des génératrices du plan méridien (R), G et G′ ses points communs avec les cercles de contact ; M est extérieur au segment LL′ et les tangentes égales donnent :

$$GG' = LL' = |ML - ML'|$$
$$= |MF - MF'|$$

F et F′ sont les foyers et l'on aura :

$$|\mathbf{MF - MF'}| = \mathbf{GG' = 2a}.$$

L'axe focal FF′ coupe la surface (S) en 2 points A et A′ qui sont les sommets de la conique, donc :

$$\mathbf{AA' = GG' = 2a}$$

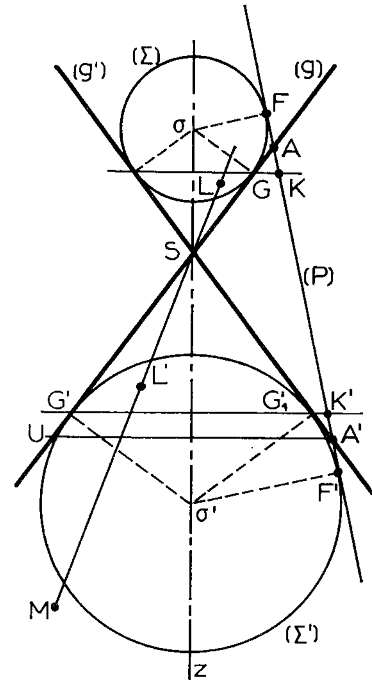


Fig. 9 a.

d'ailleurs :

$$\left.\begin{array}{l} AG = AF \\ AG' = AF' \end{array}\right\} \Rightarrow AG' - AG = AF' - AF$$

$$\text{ou} \quad GG' = AF' - AF = 2a.$$

Si U est le symétrique du point A′ par rapport à Sz, ($U \in g$) on aura successivement :

$$UG' = A'G'_1 = A'F' = AF$$

puis : $AU = AG' + UG' = AF' + AF = 2c$ **AU = 2c**

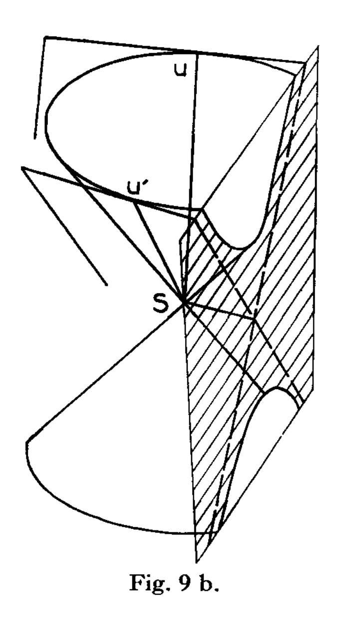


Fig. 9 b.

Asymptotes.

Si le point M s'éloigne indéfiniment sur l'hyperbole (H), la génératrice SM tend à devenir parallèle au plan (P) : les directions des asymptotes sont donc celles des génératrices Su et Su' parallèles au plan (P).

La tangente en M à l'hyperbole est contenue dans le plan tangent le long de la génératrice SM, soit, à la limite, dans l'un des plans tangents le long de Su ou Su', or on sait que les asymptotes à l'hyperbole sont les positions limites des tangentes en M, donc :

les asymptotes sont les intersections du plan (P) et des plans tangents à la surface conique le long de Su et de Su'. $\forall (P) : \widehat{uSu'} \leqslant 2\alpha.$

10. Placer une hyperbole donnée sur une surface conique de révolution.

L'hyperbole est donnée par les longueurs $2a$ et $2c$.

Si le problème admet une solution, il en admet une infinité qui se correspondent dans des rotations d'axe Sz. On peut donc choisir arbitrairement le plan méridien (R). Le problème revient à déterminer A sur (g) et A′ sur (g') tels que : $AA' = 2a$ et $AU = 2c$.

On porte sur (g) la longueur $SL = 2c$ et de L on mène, perpendiculairement à l'axe Sz, la droite LL′ que l'on coupe en N par le cercle (S, $2a$). On mène NA′ parallèle à (g) [$A' \in g'$] puis AA′ parallèle à SN ($A \in g$).

Le parallélogramme SNA'A donne : $AA' = SN = 2a$.

Avec A'U parallèle à NL ($U \in g$), on aura :

$$AU = AL - LU$$
$$= AL - NA' = AL - SA$$
$$AU = SL = 2c.$$

Le point N existe si, et seulement si, le cercle (S, $2a$) a un ou deux points communs avec la droite LL', c'est-à-dire

$$2a \geqslant SL \cos \alpha$$

$$2a \geqslant 2c \cos \alpha \qquad \cos \alpha \leqslant \frac{a}{c}$$

donc si l'angle α est égal ou supérieur à l'angle des asymptotes.

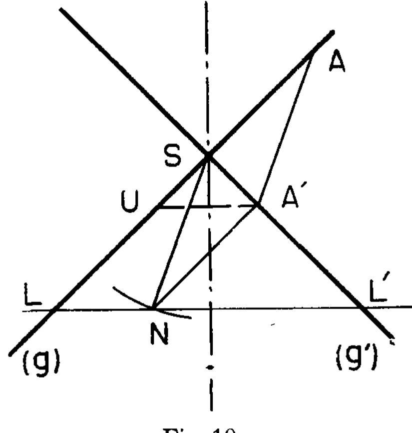


Fig. 10.

11. Ensemble des sommets des cônes de révolution passant par une hyperbole donnée.

Soient (H) une hyperbole de sommets A et A', de foyers F et F', contenue dans un plan (P), et (Σ) une sphère quelconque tangente au plan (P) en F.

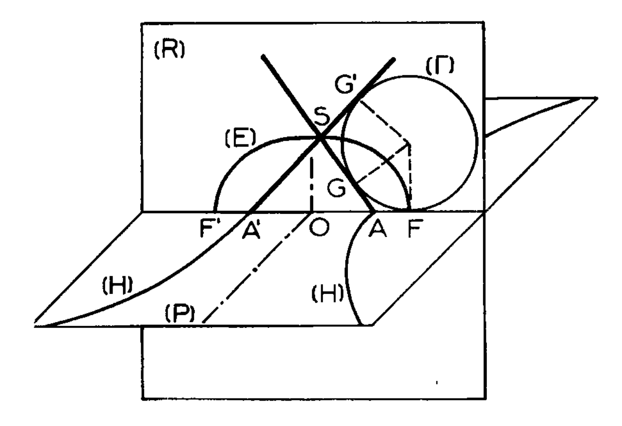


Fig. 11.

Le plan (R) perpendiculaire à (P) et passant par AA' coupe (Σ) suivant un grand cercle (Γ). Soient AG et A'G' les tangentes à (Γ) autres que AF et A'F : elles se coupent en S. Le cône de révolution de sommet S, circonscrit à (Σ), est coupé suivant une conique de sommets A et A', de foyer F, c'est-à-dire suivant l'hyperbole (H).

Les tangentes égales donnent :

$$SA = AG + GS = AF + SG'$$
$$SA' = A'G' - SG' = A'F' - SG'$$

en tenant compte de $SG = SG'$, on obtient par addition :

$$SA + SA' = AF + A'F = 2c.$$

l'ensemble des points S est l'ellipse de foyers A et A', de sommets F et F', située dans le plan (R) perpendiculaire à (P).

12. Étude de la section parabolique.

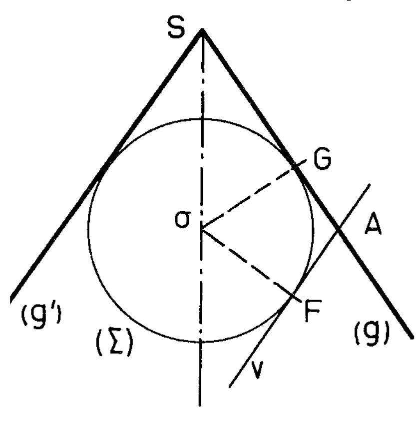


Fig. 12.

Reprenons la figure 5 dans le cas où $\theta = \alpha$.

Le plan (P) est alors parallèle à une génératrice (g') et il n'existe qu'une seule sphère (Σ) inscrite dans la surface conique et tangente au plan (P).

Le plan méridien (R) coupe le plan (P) suivant une droite Fv parallèle à (g') et qui est axe de symétrie de la section. Le sommet A de la parabole est le point commun à Fv et à la génératrice (g). σA est une bissectrice de SAv donc est perpendiculaire à Sz.

Les tangentes égales donnent : $AF = AG = p/2$.

13. Placer une parabole sur une surface conique de révolution.

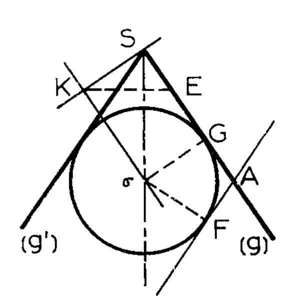


Fig. 13.

La parabole est donnée par son paramètre p.

Si le problème admet une solution, il en admet une infinité qui se correspondent dans des rotations d'axe Sz, on peut donc choisir arbitrairement le plan méridien R.

Il suffit de déterminer les points A et G tels que :

$$\begin{cases} \sigma G \text{ soit perpendiculaire à } (g) \\ (\sigma \in Sz). \\ \sigma A \text{ soit perpendiculaire à } Sz. \\ AG = p/2. \end{cases}$$

On porte, sur (g), $SE = p/2$; on mène SK perpendiculaire à (g) et EK perpendiculaire à Sz. La parallèle à (g) issue de K coupe Sz en σ qui est le centre de la sphère (Σ). On applique ensuite la translation de vecteur $\overrightarrow{K\sigma}$.

$\overrightarrow{SG} = \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{K\sigma}$ déterminent les points G et A. La construction est toujours possible.

14. Ensemble des sommets des cônes de révolution passant par une parabole donnée.

Soit (Π) une parabole de sommet A, de foyer F, contenue dans un plan (P).

Soit (Σ) une sphère quelconque, tangente au plan (P) en F ; le plan (R) perpendiculaire à (P) et passant par AF coupe (Σ) suivant un grand cercle (Γ). La tangente AG (autre que AF) au cercle (Γ) coupe en S la tangente à (Γ) parallèle à AF.

L'intersection du plan (P) et de la surface conique de sommet S circonscrite à (Σ) est une parabole de sommet A et de foyer F, c'est-à-dire la parabole (Π).

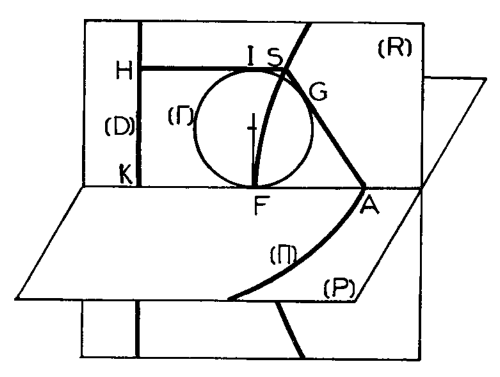


Fig. 14.

Les tangentes égales donnent :

$$SI = SG$$

et :

$$SA = SG + GA = SG + FA.$$

Si K est le symétrique de A par rapport à F, (D) la perpendiculaire au plan (P) en K, et H la projection orthogonale de S sur (D), on a :

$$SH = SI + IH = SG + FA = SA.$$

L'égalité $SH = SA$ montre que :

L'ensemble des points S est la parabole de foyer A, de directrice (D), de sommet F, contenue dans le plan (R) perpendiculaire au plan (P).

15. Section plane d'une surface cylindrique de révolution.

Soit (S) une surface cylindrique de révolution d'axe $z'z$, de rayon R, coupée par un plan (P).

1er cas particulier. Si le plan (P) est parallèle à l'axe $z'z$, l'intersection est

- soit une génératrice unique (plan tangent) ;
- soit l'ensemble de deux génératrices, donc deux droites parallèles.

2me cas particulier. Si le plan (P) est perpendiculaire à l'axe $z'z$, l'intersection est un cercle de rayon R centré sur l'axe. (Cours de Première).

Cas général.

On appelle θ l'angle aigu du plan (P) et de $z'z$ ($0 < \theta < \pi/2$).

Il existe deux sphères (Σ) et (Σ') inscrites dans la surface (S) et tangentes au plan (P) ; elles sont de part et d'autre du plan (P).

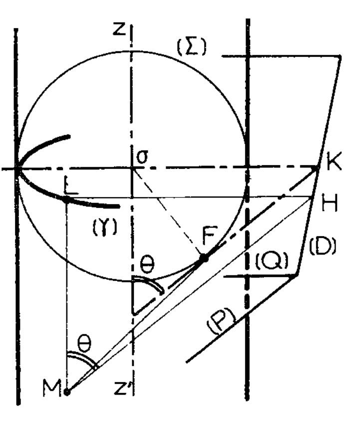


Fig. 15 a.

Soient :

F le point de contact du plan (P) et de la sphère (Σ) ;
(R) le plan méridien perpendiculaire au plan (P) ;
(Q) le plan du cercle de contact de (S) et (Σ) ;
(D) l'intersection des plans (P) et (Q).

Le plan méridien (R) est plan de symétrie de la figure, donc il est perpendiculaire au plan (Q) et à la droite (D) qu'il coupe en K ; il contient le point F. L'angle aigu de $z'z$ et de FK est l'angle θ.

Soient :

M un point quelconque commun au plan (P) et à la surface (S) ;
H la projection orthogonale de M sur la droite (D) ;
L le point de contact de la sphère (Σ) et de la génératrice du point M.

On remarque que ML et MF sont des tangentes égales.

$\widehat{LMH} = \theta$ car LM est parallèle à $z'z$ et MH est parallèle à FK, donc, dans le triangle MLH rectangle en L, on a :

$$\frac{ML}{MH} = \cos\theta$$

soit, avec MF = ML :
$$\frac{MF}{MH} = \cos\theta$$

ce qui montre que le rapport des distances d'un point M au point fixe F et à la droite (D) est constant et inférieur à 1, donc que le point M appartient à l'ellipse de foyer F et de directrice (D), contenue dans le plan (P).

Réciproquement. Tout point N de cette ellipse appartient à la surface (S) car le plan parallèle aux génératrices et passant par N et F coupe la surface (S) suivant deux génératrices dont les intersections avec le plan (P) sont deux points M_1 et M_2 qui appartiennent à la sécante NF. Cette sécante ne peut avoir plus de deux points communs avec l'ellipse, donc N est confondu avec l'un des points M_1 ou M_2.

L'intersection d'une surface cylindrique de révolution et d'un plan non parallèle aux génératrices est une ellipse ou un cercle.

Le second foyer et la seconde directrice sont déterminés par la sphère (Σ').

On aura :

$$\left.\begin{aligned} MF &= ML \\ MF' &= ML' \end{aligned}\right\} \Rightarrow MF + MF' = LL' = 2a$$

soit, avec $LL' = GG'$,

$$\boxed{MF + MF' = GG' = 2a}.$$

Les sommets A et A′ sont les intersections de la droite FF′ et de la surface cylindrique.

Si U est le symétrique de A′ par rapport à l'axe $z'z$, les symétries et les tangentes égales donnent :

$UG' = A'G'_1 = A'F' = AF = AG$

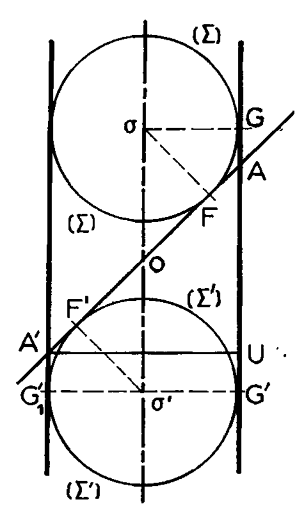


Fig. 15 b.

l'égalité $GG' = AA'$ devient :

$$GG' - (AG + UG') = AA' - (AF + F'A')$$

$$\boxed{AU = FF' = 2c}\,.$$

Dans le triangle rectangle $AA'U$:

$$A'U^2 = AA'^2 - AU^2$$
$$= 4a^2 - 4c^2 = 4b^2$$

donc :

$$\boxed{A'U = 2b}\,.$$

EXERCICES

651. Quelle est l'intersection de deux surfaces coniques de révolution égales dont les axes sont parallèles ?

652. La projection de la section plane d'une surface conique de révolution sur un plan perpendiculaire à l'axe est une conique ayant pour foyer le pied de l'axe sur le plan et pour directrice la projection de l'intersection du plan sécant et du plan perpendiculaire à l'axe mené par le sommet.

653. On considère une surface conique S circonscrite à une sphère O suivant un cercle (C). Un plan quelconque π coupe la surface conique suivant une ellipse (A), la sphère suivant un cercle (E) et le plan du cercle (C) suivant une droite (D). Démontrer que si un point M décrit l'ellipse (A), sa puissance par rapport au cercle (E) et le carré de sa distance à la droite (D) sont dans un rapport constant.

654. On considère la section faite par un plan fixe dans une surface conique de révolution variable S circonscrite à une sphère fixe O. Démontrer que les droites SF et SF′ qui joignent le sommet S de la surface aux foyers de la conique passent par deux points fixes.

655. Lieux des sommets A et A′, des foyers F et F′, du centre O de toutes les sections planes faites dans une surface conique de révolution S parallèlement à un plan donné. Dans le cas où la section obtenue est une ellipse, trouver le lieu des sommets du petit axe.

656. Lieu des foyers F et F′ de toutes les sections coniques ayant la même excentricité situées sur une surface conique de révolution donnée.

657. Lieu des foyers de toutes les paraboles situés sur une surface conique de révolution donnée.

658. Dans quel cas un plan peut-il couper une surface conique de révolution suivant une hyperbole équilatère ? Trouver le lieu des foyers de ces hyperboles.

659. Une surface conique de révolution est donnée par une de ses sections méridiennes XSY qui est un angle droit. Sur cette surface conique, on considère toutes les ellipses dont le plan est perpendiculaire à XSY et dont les grands axes AA′ ont une longueur donnée $2a$. On demande le lieu des sommets de ces ellipses.

660. Enveloppe du plan d'une conique invariable mobile sur une surface conique de révolution donnée.

661. Une sphère (S) est tangente à un plan (P) en un point A. Lieu des sommets des surfaces coniques circonscrites à (S) et qui sont coupées par le plan (P) suivant une hyperbole équilatère.

662. Un plan (P) est tangent à une sphère (S) en A. Trouver le lieu du sommet Σ d'une surface conique circonscrite à la sphère et telle que sa section par le plan (P) soit une conique ayant pour centre un point donné O de ce plan. Indiquer les régions du lieu correspondant à une ellipse ou une hyperbole.

663. Par une droite (D), mener un plan qui coupe une surface conique de révolution suivant une conique d'excentricité donnée e.

664. Par un point P, mener un plan qui coupe une surface conique de révolution suivant une conique égale à une conique donnée.

665. On donne une surface conique de révolution et un point intérieur F. Mener un plan qui coupe la surface conique suivant une conique ayant un foyer en F.

666. Peut-on couper une surface conique de révolution par un plan de façon que la section soit une conique de directrice donnée (D).

667. Couper une surface conique de révolution par un plan de manière que la section soit une parabole dont la directrice (D) passe par un point donné A.

668. Construire une surface conique de révolution contenant une parabole donnée et d'angle au sommet donné.

669. Construire une surface conique de révolution dont l'axe rencontre une droite donnée et qui contienne une ellipse donnée.

670. L'angle xOy mesure 60° ; c'est la section méridienne d'une nappe d'une surface conique de révolution de sommet O. On joint un point A de Oy à un point M de Ox. Par la droite AM on mène un plan sécant perpendiculaire au plan xOy, et déterminant dans la surface conique une ellipse.

1° Connaissant $OA = a$ et $OM = x$, calculer le grand axe de cette ellipse ; en considérant deux des cercles tangents aux trois côtés du triangle AOM, on évaluera la distance des foyers de cette ellipse et on déduira le petit axe.

2° Trouver, quand M décrit Ox, le lieu du centre de l'ellipse ainsi que le lieu des extrémités de son petit axe.

3° Déterminer M sur Ox de manière que la distance des foyers ait une longueur donnée. Discuter. (Rennes.)

671. On donne deux sphères concentriques (S) et (S′) de rayons respectifs 2R et R et un plan P tangent à (S′) en un point fixe P′. M étant un point quelconque de (S) on considère la surface conique C de sommet M dont toutes les génératrices sont tangentes à (S′).

1° Trouver le lieu de M pour que la section de C par P soit une parabole.

2° Déterminer la ou les régions de la sphère (S) dans lesquelles il faut choisir le point M pour que la section de C par P soit : *a)* une ellipse ; *b)* une hyperbole.

3° Trouver le lieu de M pour que la section de C par P soit une ellipse dont le grand axe ait une longueur donnée a. Discuter. (Alexandrie.)

672. On considère une surface conique (C) de révolution dont le demi-angle au sommet est α et dont toutes les génératrices sont tangentes à une sphère (S) de centre O et de rayon R. On coupe cette surface conique par un plan P tangent en p à la sphère (S).

1° Lieu de p pour que la section soit une parabole.

2° Déterminer la ou les régions de la sphère (S) dans lesquelles doit se trouver le point p pour que la section soit : *a)* une hyperbole ; *b)* une ellipse.

3° Lieu du point p pour que la section soit une ellipse dont le grand axe soit égal à une longueur $2a$ donnée. Discuter en cherchant d'une part pour quelles valeurs de a le lieu existe, R et α étant donnés, et d'autre part les valeurs de α pour lesquelles le lieu peut se composer de deux courbes distinctes. (Lyon).

673. Soit une sphère qui a pour centre le point O et qui passe en A ; soient P le plan tangent en A à la sphère, S un point variable de l'espace, (C) la section par le plan P de la surface conique qui a S pour sommet et qui est circonscrit à la sphère.

1° Montrer que (C) a un foyer fixe. Indiquer la nature de (C) suivant la position de S dans l'espace.

2° Lieu de S connaissant une extrémité de l'axe focal de (C).

3° Lieu de S connaissant l'autre foyer F.

4° Lieu de S connaissant la directrice D qui correspond au foyer fixe. (Maroc.)

674. Une sphère de rayon R est tangente à un plan (H). Une tangente (D) à la sphère, normale à (H) est orientée positivement à partir de (H) vers le côté où se trouve la sphère. S étant un point quelconque de (D) et O le point de contact de (D) et de la sphère, on pose :

$$\overline{OS} = z \quad (z \text{ peut varier de } -\infty \text{ à } +\infty).$$

1° Discuter suivant les valeurs de z, la nature de la section par le plan (H) de la surface conique de sommet S circonscrite à la sphère.

2° Le plan passant par (D) et le centre de la sphère coupe (H) suivant une droite qui rencontre la surface conique en A et A'. Démontrer que l'on a dans tous les cas

$$AA' = \frac{2Rz}{z - R}.$$

Lorsque la section précédente est une ellipse ou une hyperbole, calculer son grand axe $2a$, sa distance focale $2c$, le petit axe $2b$, et l'excentricité e.

3° Dans le cas où la section précédente est une ellipse (E), démontrer que le volume V du cône ayant (E) pour base et S pour sommet, est

$$\frac{\pi R^2}{3} z \sqrt{\left(\frac{z+R}{z-R}\right)^3}.$$

Étudier en fonction de $\frac{z}{R} = x$ la variation de

$$u = \frac{9V^2}{\pi^2 R^6}.$$

Combien pourra-t-on trouver de points S tels que V ait une valeur donnée ?

675. On considère une sphère de centre O, de rayon R, tangente au plan P en A. Soit S le sommet d'une surface conique circonscrite à la sphère. Son demi-angle au sommet a pour valeur θ et son axe de révolution SO coupe le plan P en ω et fait avec ce plan l'angle φ.

1° En supposant les trois points S, O, ω dans cet ordre sur l'axe du cône, de façon que O soit plus près de ω que de S, montrer que le grand axe $2a$ de la conique section de la surface par le plan P est donné par l'expression

$$2a = \frac{R \cos \theta}{\sin \varphi - \sin \theta}.$$

2° En désignant par B et C les extrémités du grand axe de cette conique, montrer que son excentricité e est égale à

$$e = \frac{|SB - SC|}{BC}.$$

En déduire la formule

$$e = \frac{\cos \varphi}{\cos \theta}.$$

3° Faire les mêmes calculs demandés dans les deux premières questions, en ne supposant plus les points S, O, ω dans la disposition précédente.

Quelles conventions faut-il faire sur les signes de a, φ et θ pour que les formules obtenues pour $2a$ et e soient générales ?

4° Montrer que $(1 - e)\frac{a}{R}$ et $(1 + e)\frac{a}{R}$ s'expriment simplement en fonction de $\text{tg}\,\frac{\varphi - \theta}{2}$ et $\text{tg}\,\frac{\varphi + \theta}{2}$. En déduire le calcul de $\text{tg}\,\frac{\varphi}{2}$ et $\text{tg}\,\frac{\theta}{2}$ en fonction de a, e, R.

(Rennes.)

676. On envisage la famille de sphères (S) tangentes à une droite donnée D en un point fixe A.

1° En supposant de plus (S) astreinte à être tangente à un plan donné (P) trouver les lieux respectifs du point de contact de (S) et de (P), du centre de (S) et du point de contact de (S) avec le plan tangent parallèle à (P).

2° En supposant (S) astreinte à couper (P) suivant un cercle (C) de rayon donné r, trouver les lieux des centres de (C) et de (S).

3° On considère le plan du cercle de contact de (S) avec la surface conique circonscrite ayant pour sommet le point où D coupe (P). Montrer que ce plan dans l'une ou l'autre hypothèse du 1° ou du 2° reste tangente à un cône fixe à base circulaire.

4° Reprendre toutes les questions du 1°, 2° et 3° en supposant que la condition du début imposée à la famille des sphères (S) soit de passer par deux points fixes A et B de D (au lieu d'être tangentes à D en A). (Dijon.)

PROBLÈMES DE RÉCAPITULATION ET D'EXAMEN

535 [1]**.** On donne un cercle de centre O et deux points A et A' symétriques par rapport à O. Par un point M quelconque du cercle, on mène MB équipollent à OA et MB' équipollent à OA'.

On demande, lorsque M décrit le cercle, quels sont les lieux géométriques des points suivants :

1° Point C symétrique de B par rapport à AM.

2° Point C' symétrique de B' par rapport à A'M.

3° Point D d'intersection de OM avec AC.

4° Point D' d'intersection de OM avec A'C'.

En désignant par DT et D'T' les tangentes en D et D' aux lieux décrits par ces points, on demande en outre les lieux géométriques des points d'intersection de DT avec les droites MC, MA et D'T'. (Montpellier.)

536. ABC étant un triangle équilatéral, avec A, B, C comme centres, on décrit trois cercles (α), (β), (γ) ayant le côté du triangle comme rayon.

1° Sur (α), on prend un point A_1, construire un triangle équilatéral $A_1B_1C_1$ de même orientation que ABC et dont les sommets B_1 et C_1 sont situés respectivement sur (β) et sur (γ). On trouvera deux solutions.

2° Montrer que l'un des triangles trouvés reste de grandeur constante quand A_1 se déplace sur (α) et que ses côtés restent de directions fixes. Trouver le lieu que décrit son centre.

3° Montrer que le second des triangles trouvés a son centre fixe ; trouver les lieux des milieux de ses côtés et les enveloppes des côtés.

(École de Physique et de Chimie industrielles de Paris.)

537. On considère, dans un plan P, deux droites parallèles D, Δ, un point F équidistant de ces deux droites. Les extrémités A, B d'un segment AB de milieu F sont situées respectivement sur D et Δ. On désigne par T les triangles équilatéraux ABC admettant pour côté le segment AB.

1° Déterminer, lorsque AB varie, le lieu des sommets C de ces triangles. On montrera que ce lieu se compose de deux droites perpendiculaires à D et Δ.

2° Quels sont, dans les mêmes conditions, les lieux des centres de gravité, des pieds des hauteurs des triangles ABC ?

3° Montrer que les côtés BC, CA sont tangents à des paraboles de foyer F dont on précisera les tangentes au sommet. (Montpellier, 1936.)

538. 1° Étant donnés deux cercles égaux, construire les centres des rotations d'angle égal à un droit qui transforment un de ces cercles en l'autre.

Quel est le produit de deux de ces rotations de même sens mais de centres distincts ?

---

[1] La numérotation des problèmes de récapitulation ne fait, volontairement, pas suite à celle des exercices d'application qui terminent chaque chapitre de ce volume.

2° Un point variable M décrit un cercle (m) de rayon R. F étant un point fixe à une distance du centre d non égale à R, on construit le carré de sens direct FMSN. Montrer que les sommets N et S de ce carré, ainsi que son centre O, décrivent des cercles (n), (s), (o), dont on précisera les centres et les rayons.

Montrer que la diagonale MN enveloppe une conique (c) d'excentricité égale à $\frac{d}{R}$.

Quelle serait l'enveloppe de MN dans le cas particulier où F serait sur le cercle (m) ? ($d = R$).

3° Revenant au cas général, la droite MN recoupe les cercles (m) et (n) respectivement en M′ et N′. Montrer que le carré de sens direct F′N′S′M′ qui admet N′M′ pour diagonale a son sommet F′ fixe.

4° Soit M″ le transformé de M′ dans le produit des deux rotations (F′, — 90°), (F, — 90°). Comparer l'aire du triangle FM′N′ et la puissance de F par rapport au cercle (m) évaluée sur la sécante FM″.

En déduire le produit des distances des deux points F et F′ à la droite MN, et retrouver ainsi l'enveloppe (c) de cette droite.

5° Montrer que le point de contact T de MN avec son enveloppe est un centre d'homothétie pour les deux carrés FMSN, F′N′S′M′.

Construire les positions de M sur le cercle (m) pour lesquelles la droite MN est tangente à ce cercle. Discuter la possibilité de cette construction selon les valeurs de l'excentricité de (c). Lorsqu'elle est possible, construire le point T correspondant et en déduire que la courbe (c) est bi-tangente aux cercles (m) et (n) en des points situés sur le cercle de diamètre FF′. (Istanbul, 1950.)

539. Dans un plan Π, on considère deux droites $u'u$ et $v'v$ se coupant en O et faisant un angle de 45°. Sur $u'u$ on porte un segment MN de longueur $2h$ et de milieu A distinct de O ; sur $v'v$ on porte un segment PQ de longueur $2\sqrt{2}\,h$ et de milieu B distinct de O.

1° Déterminer dans le plan Π les similitudes directes qui transforment le vecteur MN en le vecteur PQ ou en le vecteur QP ; pour chacune d'elles on étudiera l'angle de rotation, le rapport de similitude et le centre de similitude.

2° Montrer que les centres I_1 et I_2 des similitudes précédentes sont sur le cercle passant par O, A et B.

3° Préciser la position de I_1 et I_2 sur le cercle OAB ; en particulier, montrer que la droite I_1I_2 coupe en son milieu le rayon issu de A.

4° On fait tourner PQ dans le plan Π d'un angle droit autour de A ; préciser la position du segment RS obtenu. Déterminer le centre de la rotation qui transforme le vecteur PQ en le vecteur SR. (Lyon, 1949.)

540. Soient A et B ($AB = a$) deux points qui resteront fixes dans tout le cours du problème : un carré AMNP de grandeur et de position variables, tourne autour de son sommet fixe A. (Le sens du contour AMNP étant le sens trigonométrique.)

1° On suppose ici que le carré AMNP varie de telle manière que :

$$AN^2 = BM^2 + BP^2.$$

Dans ces conditions :

a) Trouver le lieu du centre I du carré, ainsi que les lieux des points M, N, P. Ces différents lieux seront tracés sur une même figure et définis avec précision.

b) Construire le carré AMNP pour que la droite PN, supposée illimitée, passe par un point donné C. Discuter suivant la position du point C dans le plan. A quelle courbe la droite PN reste-t-elle tangente ?

2° On suppose maintenant que le carré AMNP varie de telle manière que la somme des carrés des distances de B à ses quatre sommets soit constante et égale à $10AB^2 = 10a^2$.

Résoudre alors les questions *a)* et *b)* proposées au 1° ;

541. 1° Deux cercles qui sont situés dans un même plan et qui ont pour centres O et O′ se coupent en A et B. Deux mobiles M et M′ parcourent respectivement ces deux cercles dans le même sens avec la même vitesse angulaire constante ω ; en outre ils passent en même temps en A. Montrer : que le triangle AMM′ reste semblable au triangle AOO′ ; que MM′ passe par B. Soit P un point de MM′ tel que $\frac{\overline{PM}}{\overline{PM'}}$ ait la valeur constante donnée *m*. Montrer que P décrit un cercle qui passe en A et construire le centre de ce cercle. Si Q et Q′ sont deux points qui partagent respectivement AM et AM′ dans des rapports constants, montrer que la droite QQ′ passe par un point fixe.

2° On suppose maintenant que les deux cercles décrits par M et M′ sont égaux. mais on ne suppose plus que M et M′ passent en même temps en une intersection des deux cercles. Montrer qu'il existe dans le plan des deux cercles un point I tel que le triangle MIM′ reste isocèle et semblable à lui-même. En déduire le lieu géométrique du milieu de MM′ et l'enveloppe de MM′. (Bordeaux.)

542. Par le sommet A d'un carré ABCD de centre O, on mène deux droites perpendiculaires coupant l'une BC en P et CD en Q, l'autre BC en R et CD en S, la droite APQ restant intérieure à l'angle BAC.

1° Montrer que les triangles AQR et APS sont isocèles.

2° Soient H l'intersection de QR et PS, M le milieu de QR, N le milieu de PS. Quelle est la nature du quadrilatère AMHN ?

3° Quels sont les lieux des points N et M lorsque APQ pivote autour de A dans les conditions indiquées au début ?

· En déduire l'enveloppe de PS et de QR.

On limitera les lieux et les enveloppes.

4° Les quatre points A, M, H, N sont sur un cercle. Montrer que ce cercle passe par un point fixe autre que A et comparer le rayon de ce cercle au rayon du cercle circonscrit au triangle QRS.

5° Lieu de H et lieu du centre du cercle inscrit dans le triangle ACH. On limitera les lieux.

6° AH coupe SQ en U, AC coupe RQ en V et CH coupe RS en W. Montrer que les trois points U, V, W sont alignés. (Poitiers, 1948.)

543. On donne dans le plan deux cercles (C) et (C′), de même rayon R, tangents extérieurement entre eux en un point A. On appelle cercle (S) tout cercle du plan tangent au cercle (C) avec contact intérieur ou extérieur, et orthogonal au cercle (C′).

1° Construire un cercle (S), connaissant son point de contact M avec le cercle (C).

2° Construire un cercle (S), connaissant l'un de ses points d'intersection P et Q avec le cercle (C′).

3° Construire un cercle (S) de rayon donné *r* ; discuter le problème suivant la valeur de *r*.

4° On suppose qu'un point K décrive la tangente commune (D) aux cercles (C) et (C′) en A.

Montrer qu'il passe deux cercles (S) par chaque point K de la droite (D) et que ces deux cercles se coupent sous un angle constant. Quel est le lieu de leur deuxième point d'intersection, K', lorsque K décrit la droite (D) ?

(Espagne, 1950.)

544. On désigne par (F) la famille des cercles d'un plan (P) qui sont vus d'un point fixe O de ce plan sous un angle constant. Soit (C) un cercle de la famille (F), soient A, B les extrémités du diamètre de (C) passant par O, I le conjugué de O par rapport à A et B.

1° Montrer que la connaissance de I détermine le cercle (C), que l'on désignera dans la suite par C(I).

2° Montrer que l'axe radical de $C(I_1)$, $C(I_2)$ est la médiatrice du segment I_1I_2.

3° Montrer que, si C(I) est orthogonal à un cercle fixe (L) de centre L, I décrit un cercle de centre L et que le centre de C(I) décrit aussi un cercle.

4° Montrer que l'axe radical d'un cercle C(I) orthogonal à un cercle fixe (L) et d'un cercle fixe, arbitrairement choisi, de la famille (F) est constamment tangent à une conique. (Strasbourg, 1947.)

545. On considère les cercles (O) et (O'), dont les centres d'homothétie sont S et S'. Tout d'abord ces cercles restent fixes.

1° Étant donné sur le cercle (O) un point P et sur le cercle (O') un point P'_1 tels que la droite PP'_1 passe par l'un ou l'autre des points S ou S', soit S par exemple, sans que P et P'_1 se correspondent par homothétie.

Une droite variable passant par S coupe (O) en M et M_1, (O') en M' et M'_1, de telle manière que M et M' se correspondent par homothétie ; de même M_1 et M'_1.

Lieu des points d'intersection des droites PM, $P'_1M'_1$ et des droites PM_1 et P'_1M'.

Lieu des points d'intersection des droites PM, P'_1M' et des droites PM_1, et $P'_1M'_1$.

2° Soient donnés sur le cercle (O) un point P et sur le cercle (O') un point P' tels que PP' passe par S et que P et P' se correspondent par homothétie.

Une droite variable passant par S' coupe (O) en M, (O') en M' de telle manière que M et M' se correspondent par homothétie.

Lieu du point d'intersection de PM et P'M'.

3° On suppose maintenant que le cercle (O) reste fixe et que le cercle (O') varie en passant par deux points fixes A et B du cercle (O).

Déterminer le cercle (O') connaissant l'un des centres d'homothétie S. Discuter la nature de l'homothétie suivant la position de S sur la ligne des centres.

Soient P un point fixe du cercle (O) et P'_1 le point de (O') qui est sur SP sans être homothétique de P. De même soit Q'_1 le point de (O') qui est sur S'P sans être homothétique de P.

Lieu des points P'_1 et Q'_1.

Enveloppe des rayons des cercles (O') passant par ces points.

546. On donne dans un plan un cercle (C) de centre O et de rayon R et une droite (Δ) extérieure à ce cercle. On désigne par H la projection orthogonale de O sur (Δ) et l'on pose $OH = d (d > R)$. On désigne par (γ) tout cercle tangent à la droite (Δ) et orthogonal au cercle (C).

1° A étant un point donné du plan, construire les cercles (γ) passant par A. Discuter suivant la position de A dans le plan.

Lieu des points par où il passe deux cercles (γ) tangents entre eux.

2° Soit M le point de contact d'un cercle (γ) avec (Δ). On désigne par P le second point de rencontre de OM avec (γ). Lieu de P lorsque M décrit (Δ). En déduire que les cercles (γ) restent tangents à un cercle fixe (C') que l'on construira et dont on déterminera le centre et le rayon. Lieu des centres des cercles (γ).

3° La tangente en P au cercle (γ) coupe (Δ) en I. Montrer que l'axe radical du cercle (γ) et du cercle (C) passe par I. En déduire que (Δ) est l'axe radical des cercles (C) et (C'). Vérifier cette propriété en calculant la puissance du point H par rapport aux cercles (C) et (C').

4° Le cercle de centre I qui passe par M coupe la droite OH en deux points E et F. Montrer que ces points sont fixes lorsque M se déplace sur (Δ). Construire les inverses des cercles (C) et (C') et de la droite (Δ) dans l'inversion de pôle E et de puissance EF^2. Comment se transforment les cercles (γ) dans cette inversion ? Retrouver à l'aide de cette inversion le lieu des points par où passent deux cercles (γ) tangents entre eux. (Maroc, 1950.)

547. Soient O et O' les centres, R et R' les rayons de deux cercles fixes dans un même plan. Deux diamètres MON et M'O'N' varient de telle sorte que MM' et NN' soient parallèles à OO'. Soient P l'intersection de MN et de M'N', Q celle de MN' et de M'N, S la deuxième intersection des deux cercles MNQ et M'N'Q.

1° Montrer que PQ passe par un point fixe.

2° Lieu de P.

3° Établir la relation qui lie les distances de Q aux perpendiculaires à OO' menées par M, M', N, N'. En déduire le lieu de Q. (On trouve un segment de droite, dont on ne cherchera pas les extrémités).

4° Montrer que les deux triangles SMN et SN'M' sont semblables. En déduire le lieu de S.

5° Montrer que P, S, O, O' sont sur un même cercle (variable). En conclure que l'intersection de PS et de OO' est fixe.

6° Évaluer en fonction de R et R' le rapport des distances de Q et celui des distances de S aux deux diamètres MN et M'N'. En conclure que $\widehat{OPO'}$ et $\widehat{QPS}$ ont mêmes bissectrices. (Bordeaux, 1933.)

548. On donne un cercle (C) de centre O. Soient AB un diamètre fixe de ce cercle et M un point fixe pris sur ce cercle.

PQ étant un diamètre mobile, l'une des bissectrices des angles formés par les droites MP et MQ coupe PQ en D et AB en E, l'autre bissectrice coupe PQ en D' et AB en E'.

1° Montrez que le cercle circonscrit au triangle DMD' est orthogonal au cercle (C). Lieu du centre I de ce cercle lorsque PQ tourne autour de O.

2° Prouver que les cercles (γ) et (γ') circonscrits aux triangles DOE et D'OE' sont orthogonaux.

3° Établir que D' appartient à l'axe radical Δ des cercles (C) et (γ).

4° On suppose maintenant que M est le milieu d'un des arcs AB. Démontrer que les triangles DOE et D'OE' sont isocèles ; trouver le lieu du centre radical K des trois cercles (C), (γ), (γ') et le lieu de l'intersection, autre que O, des cercles (γ) et (γ') lorsque PQ tourne autour de O. (Grenoble, 1950.)

549. 1° On appelle angle d'une droite et d'un cercle, l'angle aigu formé par cette droite et la tangente au cercle en un point d'intersection.

Prouver que le lieu géométrique des points M du plan de deux cercles (O_1) et (O_2), tels que leurs polaires par rapport à (O_1) et (O_2) coupent *respectivement* ces cercles sous des angles égaux, est un cercle (Ω) de centre Ω. Discuter en donnant à (O_1) et à (O_2) toutes les positions relatives possibles.

2° Calculer la puissance du pied H de l'axe radical de (O_1) et (O_2), supposés *extérieurs* l'un à l'autre, par rapport au cercle (Ω) et la comparer à ($HO_1^2 - R_1^2$), R_1 étant le rayon de (O_1).

Calculer le rapport $\dfrac{\Omega O_1}{\Omega O_2}$ en fonction de R_1 et R_2 (rayon de (O_2)).

3° Un point M décrivant le cercle (Ω) du paragraphe 2°, trouver et comparer les lieux géométriques des pieds H_1 et H_2 des polaires de M par rapport à (O_1) et (O_2). Établir que la droite H_1H_2 est parallèle à O_1O_2.

Trouver le lieu du milieu de H_1H_2.

4° Construire les points du plan de trois cercles (O_1), (O_2) et (O_3), tangents extérieurement deux à deux, tels que leurs polaires par rapport à ces cercles coupent *respectivement* ceux-ci sous un même angle.

Caractériser la position des points trouvés par rapport au cercle circonscrit au triangle $O_1O_2O_3$.

(École normale de l'enseignement technique.)

550. On considère deux axes rectangulaires $x'Ox$, $y'Oy$ et on donne sur Ox les points A, I, I' par leurs abscisses $\overline{OI} = m$, $\overline{OI'} = -m$, $\overline{OA} = a$ (on suppose a et m positifs avec $a > m$). Un cercle *variable* (γ) passe par I, I' et coupe $y'y$ en P et P' ; les droites AP, AP' recoupent respectivement le cercle (γ) en T, T'.

1° Démontrer que la polaire (Δ) de A par rapport à (γ) passe par un point fixe B qui est l'orthocentre du triangle APP'. Donner de cette polaire (Δ) un tracé uniquement à l'aide de la règle. Démontrer que le point A a même puissance par rapport aux cercles (γ) et au cercle de diamètre BO.

2° On transforme la figure par inversion en prenant A pour centre et $(a^2 - m^2)$ pour puissance d'inversion. Construire les inverses de l'axe $y'y$, d'un cercle (γ) et de la polaire (Δ). Quel est, quand (γ) varie, le lieu de T et T' ?

3° Les tangentes à (γ) menées en P et P' sont coupées par la polaire (Δ) respectivement en M et M'. Montrer que TM et M'T' sont des tangentes à (γ) et que ces droites coupent Ox en un point fixe F dont on donnera la position sur le segment BA. En déduire le lieu de M et M'.

4° On suppose dans ce qui suit que les points I et I' sont confondus avec O $(m = 0)$; construire la courbe (Π) lieu de M dans ce cas particulier. Donner l'équation de cette courbe par rapport aux axes xOy.

La courbe (Π) étant supposée matérielle et parfaitement polie, le point M, de masse négligeable, est attiré par un point J de Ox, d'abscisse $\overline{OJ} = 2a$, par une force proportionnelle à la distance MJ. Quelles sont les positions d'équilibre de M ?

551. On donne un cercle Γ de centre O et de rayon R, un diamètre fixe AB de ce cercle et le point fixe P, sur le prolongement de OA, tel que AP = R. Un diamètre variable coupe Γ en M et M' ; les droites PM et PM' recoupent Γ en N et N'.

1° Montrer que le cercle circonscrit au triangle PMM' passe par le milieu C de OB.

2° En faisant une inversion ayant P pour pôle et dans lequel le cercle Γ est invariant, montrer que la droite NN' passe par un point fixe D de OA et que le cercle circonscrit au triangle PNN' passe par un point fixe E de OA. Préciser la position de ces deux points.

3° Soit Q le point de rencontre des droites MM' et NN'. Montrer que le lieu de Q est la polaire de P par rapport à Γ et que E est sur cette polaire. Quel lieu en déduit-on par l'inversion précédente ?

4° On pose $\widehat{DOQ} = \alpha$ et $\widehat{ODQ} = \beta$. Établir la relation

$$5 \operatorname{tg} \alpha = 3 \operatorname{tg} \beta.$$

Calculer tg α et tg β de manière que le rapport $\frac{OQ}{QD}$ ait une valeur donnée k. Discuter.

5° Calculer, en fonction de α, le rapport des aires des triangles PMM' et PNN'. Entre quelles limites et comment varie ce rapport quand α varie ? (On ne construira pas de courbe représentative.)

(Rennes.)

552. On considère un triangle ABC et le cercle circonscrit à ce triangle de centre O et de rayon R.

On désigne par D, E et F les pôles des côtés BC, CA et AB par rapport au cercle circonscrit.

a) Construire par rapport à ce cercle les pôles α et α_1 des bissectrices de l'angle A du triangle ABC. Montrer que $O\alpha$ et $O\alpha_1$ sont les bissectrices de l'angle EOF. On construit de même les pôles β et β_1, γ et γ_1 des bissectrices des angles B et C. Montrer que ces six points sont alignés trois à trois sur quatre droites dont on indiquera les pôles.

b) On désigne par Δ la polaire du centre I du cercle inscrit dans ABC et par H l'inverse de I dans l'inversion de centre O, de puissance R^2. Le cercle et les points B et C restant fixes, on suppose que A se déplace sur l'un des arcs BC du cercle. Trouver les lieux géométriques des points I et H et la courbe à laquelle Δ reste tangente.

553. On considère un triangle ABC, ses médianes $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ et son cercle circonscrit de centre O, que les médianes recoupent en A′, B′, C′ respectivement.

1° Montrer que les tangentes au cercle circonscrit aux extrémités des cordes AA′, BB′, CC′ se coupent respectivement en trois points P, Q, R alignés.

2° On désigne par A_1, B_1, C_1 respectivement les points d'intersection des tangentes au cercle circonscrit en B et C, C et A, A et B. Montrer que les droites A_1P, B_1Q, C_1R forment un triangle dont les sommets sont respectivement alignés avec O et C_1, O et A_1, O et B_1.

3° Les cercles de diamètres OA, OB, OC se recoupent respectivement deux à deux en C_2, A_2, B_2. Montrer que les cercles circonscrits aux triangles AA_1A_2, AB_1B_2, AC_1C_2 font partie d'un faisceau singulier dont on déterminera la tangente commune et la ligne des centres. (Lyon, 1951.)

554. Soient $x'Ox$, $y'Oy$ deux axes rectangulaires, A et B deux points *fixes sur* Ox, d'abscisses positives a et b (on supposera, dans les questions 1° et 2°, $a < b$), P un point variable sur $y'Oy$, M l'intersection de la droite BP avec la perpendiculaire à Ox en A, enfin (C) le cercle de centre P et de rayon PM.

1° Q et Q′ étant les points de contact avec (C) des tangentes issues de B, trouver le lieu du point de rencontre de BP avec QQ′ quand P décrit $y'Oy$.

2° Montrer que l'angle PBQ reste constant et en déduire le lieu de Q.

3° Soit R un des points de rencontre de (C) avec la parallèle à Ox menée par P. Établir *géométriquement* la relation qui existe entre a, b et les coordonnées x et y de R par rapport aux axes $x'Ox$ et $y'Oy$. Déduire de là une construction de l'hyperbole point par point, connaissant son équation réduite.

4° Prouver par une voie analogue que le pôle de la droite AM par rapport à (C) décrit une conique, dont on déterminera les éléments. (Dijon.)

555. On donne dans un plan, un point fixe O. Soit (C) un cercle variable du plan de centre I et de rayon égal à $\frac{1}{2}$ OI. On désigne par (Δ) la polaire de O par rapport à (C), par J le point d'intersection de (Δ) avec OI.

1° Évaluer le rapport $\frac{\overline{OJ}}{\overline{OI}}$.

2° On suppose que (Δ) passe par un point fixe A :

a) Montrer que (C) reste orthogonal à un cercle fixe.

b) Trouver le lieu de I ;

c) Trouver les lieux des points communs à (Δ) et (C).

3° On suppose que (C) passe par un point fixe B :

a) Trouver les lieux de I et de J.

b) Trouver l'enveloppe de (Δ).

4° Construire (C), connaissant un de ses points B et un point A de (Δ). Discuter le nombre de solutions suivant la position du point A dans le plan, les points O et B étant supposés fixes : déterminer, en particulier, la région du plan où doit se trouver A pour que le problème soit possible, c'est-à-dire admette au moins une solution. (Montréal, 1951.)

556. On considère un cercle fixe de centre O de rayon R, et un point fixe I intérieur à ce cercle et distinct de O ; on désigne par CD la corde du cercle perpendiculaire à OI. Un rayon lumineux issu d'un point A du cercle se réfléchit en I sur le diamètre OI et recoupe le cercle en B.

1° Montrer que AB passe par un point fixe P lorsque A varie sur le cercle (O) ; M désignant le milieu de AB, montrer que AB est bissectrice de l'angle CMD.

2° On désigne par γ et δ les points d'intersection du cercle (O) avec le diamètre OM. Les droites $C\gamma$ et $D\delta$ se coupent en α, les droites $C\delta$ et $D\gamma$ se coupent en β. Montrer que les points α, β, γ, δ sont les centres des cercles inscrit et exinscrits au triangle CMD. Lieux de ces points lorsque A décrit le cercle (O).

3° Montrer que le cercle circonscrit au triangle CMD passe par les milieux des six segments $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\alpha\delta$, $\beta\gamma$, $\beta\delta$, $\gamma\delta$. Montrer que les cercles circonscrits aux triangles $\alpha\beta\gamma$, $\beta\gamma\delta$, $\gamma\delta\alpha$, $\delta\alpha\beta$ sont égaux et donner la valeur commune de leur diamètre. Quels sont les lieux des centres de ces cercles ? (Nancy, 1949.)

557. On considère un point A et une droite (D). On désigne par (D′) la parallèle à (D) menée par A, par (Δ) la parallèle à (D) et (D′) équidistante de ces deux droites, par $2a$ la distance de (D) et (D′).

A tout point M de leur plan, on fait correspondre le point M′ de AM, conjugué harmonique de M par rapport à A et au point d'intersection de AM et (D).

1° Montrer que lorsque M décrit une droite (δ), M′ décrit une droite (δ'), qu'on appellera homologue de (δ). Montrer qu'en général (δ) et (δ') coupent (D′) en deux points symétriques par rapport à A. Cas de (δ) parallèle à (D).

2° Étudier les homologues de deux droites (δ) parallèles, de deux droites (δ) se coupant sur (Δ).

Montrer que trois points dont l'un est le milieu du segment formé par les deux autres ont pour homologues trois points formant une division harmonique avec le point d'intersection de la droite qui les porte et de (Δ).

3° On suppose que M décrit un cercle (C), de centre A, de rayon R. Montrer que M′ décrit une conique (Γ), de foyer A et de directrice (Δ). Étudier la nature de cette conique.

4° Montrer que le centre de (Γ), s'il existe, est l'homologue du pôle de (Δ) par rapport à (C).

5° En utilisant la correspondance entre (C) et (Γ), déterminer le lieu des milieux des cordes de (Γ) parallèles à une direction donnée. (Caen, 1947.)

558. Soient un cercle (O) de centre O, de diamètre $AB = 2R$, et la tangente MT en un point M variable de ce cercle. On transforme la figure par une inversion de pôle A, de puissance $4R^2$.

1° Lieu du centre ω du cercle inverse de la tangente MT.

2° A quelle courbe les droites inverses des cercles de centre M, passant par A, restent-elles tangentes ?

3° Soit Δ la tangente en A au cercle (O). On considère un cercle variable (C) de centre C, tangent à Δ et au cercle (O), puis le cercle (C′) de centre I, inverse de (C) dans l'inversion précédente. Trouver les lieux des centres I et C.

4° Exprimer en fonction du rayon x du cercle (C), le carré y de la distance CI. Étudier les variations de y comme fonction de x. (Nancy, 1952.)

559. 1° On donne un cercle fixe (S) et un point fixe F. Un cercle variable (C) passe par F et est tangent à (S) en un point variable M ; lieu du point de concours des tangentes à (C) en M et en F.

2° Construire le cercle (C′) tangent à (S) et tangent à (C) en F. Soit M′ le point de contact de (C′) avec (S) ; montrer que MM′ passe par un point fixe quand (C) varie.

3° Transformer cette dernière propriété par une inversion de pôle F. Déduire de cette inversion que la somme ou la différence (suivant les cas de figure) de $\frac{1}{R}$ et $\frac{1}{R'}$ est constante, R et R′ étant les rayons de (C) et de (C′).

4° Les formules ainsi trouvées expriment une propriété des segments ayant pour origine un foyer d'une conique donnée et pour extrémité les points de rencontre de la conique avec une sécante variable passant par le foyer. En donner une démonstration directe basée sur la définition commune des coniques. Démontrer que le second centre d'homothétie (autre que F) de (C) et (C′) décrit une droite.

560. On considère un cercle (C) de centre O, de rayon $R = 2a\sqrt{2}$, un point fixe A tel que $OA = 4a$, le point B situé sur la demi-droite OA tel que $OB = 2a$; puis les cercles (γ), dont les centres ω sont situés sur le cercle (C) et qui sont vus de A sous l'angle $\frac{\pi}{3}$.

1° Construire avec précision le cercle (C) et un cercle (γ).

Démontrer que tous les cercles (γ) sont vus du point B sous un angle constant que l'on calculera.

Lieux des points de contact des tangentes menées de A aux cercles (γ) ?

Enveloppes des rayons de ces cercles qui passent aux points de contact ?

2° On élève la perpendiculaire à Aω en A ; elle coupe en T la tangente ωT en ω au cercle (C). Le cercle (Γ) de diamètre ωT coupe le cercle (γ) de centre ω en deux points M et M′.

Démontrer que la droite MM′ passe par un point fixe I de OA et que les cercles (γ) coupent orthogonalement un cercle fixe de centre I.

(On pourra établir au préalable que les projections de ωA et ωM sur ωT sont dans un rapport constant).

3° On considère deux cercles (γ) et (γ') dont les centres ω, ω' sont alignés avec A. Démontrer que (γ) et (γ') sont homologues dans une inversion de centre A et de puissance constante que l'on calculera, et que B et I sont homologues dans cette inversion. (Lyon, 1951.)

561. Soit un segment fixe AB de milieu O et de longueur donnée $2a$.

On considère les cercles (C) tangents en A à la droite AB et les cercles (D) tangents en B à la droite AB.

1° Déterminer le centre D du cercle (D) orthogonal à un cercle donné (C) de centre C. On montrera d'abord que D est sur la perpendiculaire à BC passant par O.

Quelle relation existe-t-il entre les rayons de deux cercles orthogonaux (C) et (D) ?

2° Quelles sont les transformées des cercles (C) et des cercles (D) dans l'inversion de pôle A et de puissance $4a^2$? Préciser en particulier les transformées de deux cercles orthogonaux (C) et (D).

Trouver le lieu des points d'intersection P et Q de deux cercles orthogonaux (C) et (D).

Examiner comment varie la droite PQ.

3° Montrer qu'il existe un cercle (ω) tangent en P au lieu de P et en Q au lieu de Q.

Trouver le lieu du centre ω du cercle (ω) puis l'enveloppe de la droite des centres des cercles orthogonaux (C) et (D). (Besançon, 1947.)

562. Soient MAB un triangle, γ le cercle circonscrit, O le milieu de AB ; Q la deuxième intersection de MO avec γ ; P la deuxième intersection avec γ de la parallèle à AB menée par Q ; ω l'intersection de AB et de la tangente à γ en M.

1° Montrer que MP et MQ ont les mêmes bissectrices que MA et MB, que AB est bissectrice de $\widehat{MOP}$, que le pôle de AB par rapport à γ est sur MP, que la polaire de ω est MP, que

$$\overline{OM}.\overline{OP} = OA^2.$$

2° A et B restant fixes, on suppose que M varie (dans un plan qui contient A et B) de telle sorte que $\frac{MA}{MB}$ reste constant. Quels sont alors les lieux de P et Q ?

Montrer que ω est fixe, ainsi que l'intersection ω' de AB avec la tangente en Q au cercle γ.

Étudier le lieu H de l'intersection de ωM et de ω'Q. (Maroc.)

563. On donne deux droites fixes (Δ) et (D) parallèles entre elles et un point fixe A sur D. Un cercle variable (γ) passe par A et est tangent en K à Δ.

1° Lieu du centre ω de ce cercle.

2° Ce cercle recoupe D en un deuxième point P. Montrer que la droite PK passe par un point fixe I. En déduire que la tangente en P à (γ) reste tangente à un cercle fixe (C) de centre I.

3° Un cercle (γ) étant donné, montrer qu'il existe deux cercles (γ') et (γ'') de centres ω' et ω'' passant par A, tangents à Δ et orthogonaux à (γ).

4° On considère l'un d'eux, (γ'). Soit P' le point autre que A où (γ') coupe D. Montrer que les tangentes en P et P' respectivement à (γ) et (γ') sont perpendiculaires. Lieu de leur point de rencontre M quand (γ) et par suite (γ') varient.

5° On effectue l'inversion de centre A qui transforme la droite Δ en le cercle (C). Comment sont transformés deux cercles (γ) et (γ') orthogonaux ? En déduire le lieu de leur deuxième point de rencontre B autre que A. (Caen, 1950.)

564. On donne dans un plan deux points A et A' et le milieu O de AA'. ($AA' = 2a$).

1° On fait passer par A deux droites rectangulaires (Δ) et (Δ'). Construire un cercle (Γ) passant par A' et tangent à (Δ) et (Δ'). Trouver, quand (Δ) et (Δ') varient, le lieu du centre de (Γ), les lieux des points de contact M et M' de (Γ) avec (Δ) et (Δ') et l'enveloppe de MM'.

2° On fait passer par A et A' deux cercles orthogonaux (C) et (C') de centres ω, ω'.

On pose $\omega\omega' = d$. On désigne par N et N' les points de contact de (C) et (C') avec une tangente commune (D). Trouver les lieux des points N et N' quand (C) et (C') varient en restant orthogonaux ; montrer que $NN'^2 = 2ad$.

3° Étudier les variations de $y = NN'^2$ en fonction de $x = O\omega$ (supposé $\geqslant 0$) courbe représentative. (Il est permis, dans cette question, de prendre $a = 1$).

(Lyon, 1951.)

565. On donne dans le plan deux droites fixes D et E parallèles et un point fixe O. On mène la perpendiculaire issue de O aux deux droites et l'on désigne par A et B ses points de rencontre avec D et E. On suppose

$$OA = AB = a.$$

On appelle (C) un cercle quelconque tangent à D et E respectivement en M et N.

1° Courbes tangentes aux axes radicaux d'un cercle variable (C) associé soit au cercle de diamètre OA, soit à celui de diamètre OB.

2° La polaire de O par rapport à un cercle (C) rencontre MN en Q. Lieu du point Q quand (C) varie. Courbe tangente à cette polaire.

3° P étant un point donné du plan, déterminer ceux des cercles (C) par rapport auxquels O et P sont des points conjugués. Discuter suivant la position du point P dans le plan.

4° Quelle est l'inversion qui fait correspondre aux droites D et E les cercles de diamètre OB et OA ?

Construire le cercle (F) inverse du cercle (C). Lieu du centre de (F) quand (C) varie. Montrer que la droite qui joint les inverses des points M et N passe par un point fixe quand (C) varie. Indiquer, relativement aux cercles (F), une propriété du cercle inverse de la médiatrice de AB. (Alger, 1947.)

566. On donne deux cercles (Γ) et (Γ') ; soient R et R' leurs rayons, d la distance de leurs centres O et O', (γ) l'inverse de (Γ) dans l'inversion (O', R'^2) et (γ') l'inverse du cercle (Γ') dans l'inversion (O, R^2).

1° Calculer en fonction de R, R' et d les rayons r et r' des cercles (γ) et (γ').

Désignant par ω et ω' les centres de ces deux cercles, calculer $\overline{O\omega}$ et $\overline{O'\omega'}$, le sens positif adopté sur la droite OO' étant le sens de O vers O'.

2° Démontrer que si les rayons R et R' sont différents, la relation $r = r'$ entraîne

soit (1) $\quad d^2 = R^2 + R'^2 - RR'$,

soit (2) $\quad d^2 = R^2 + R'^2 + RR'$.

Énoncer et établir la réciproque. Montrer que dans chacune de ces deux hypothèses les cercles (Γ) et (Γ') se coupent et, A désignant alors l'un de leurs points communs, calculer, dans chacun de ces deux cas, l'angle OAO'.

3° Montrer que dans l'une des deux hypothèses (1) ou (2) les cercles (γ) et (γ') sont confondus. Calculer alors la valeur du rapport $\dfrac{\overline{\omega O}}{\overline{\omega O'}}$ et dire quelle position remarquable occupe alors le point ω. (Paris, 1951.)

567. Étant donnés un cercle (C) de centre O, de rayon R et une droite (D) de son plan située à une distance OH = 2R du centre, on appellera (γ) tout cercle tangent à (D) et orthogonal à (C).

1° Construire un cercle (γ) de rayon donné r. Discuter.

2° Construire un cercle (γ) passant par un point donné A de (C). Discuter. On trouve en général deux solutions (γ_1) et (γ_2) dont on évaluera les rayons r_1 et r_2 en fonction de R et de l'angle HOA $= \theta$. On exprimera facilement r_1 et r_2 à l'aide de R et de $\operatorname{tg} \dfrac{\theta}{2} = t$, et l'on achèvera le calcul dans les deux cas $\theta = \dfrac{\pi}{3}$, $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

3° Construire un cercle (γ) tangent à (D) en un point B. Que devient la solution si B s'éloigne indéfiniment sur (D) ?

4° Prenant H pour origine et pour axes des abscisses et des ordonnées HO orientée positivement vers O, et (D), trouver une relation entre les coordonnées (x, y) du centre d'un cercle (γ) et R. En déduire, lorsque (γ) varie, le lieu géométrique de son centre, et montrer que (γ) reste constamment tangent à un cercle fixe dont on précisera le centre et le rayon.

5° Construire l'inverse (γ') de (γ) dans l'une des inversions transformant (C) en (D), puis, considérant l'enveloppe des cercles (γ'), retrouver les résultats du (4°). (Nancy, 1947.)

568. On donne une droite (D) et un cercle (C) de rayon a, tangent à la droite (D) en un de ses points I, et on considère l'ensemble de tous les cercles (Γ) qui sont tangents à la droite (D) et orthogonaux au cercle (C).

1° Montrer comment on peut construire ceux des cercles (Γ) qui passent par un point donné du cercle (C).

2° Montrer que les cercles (Γ) sont également tangents à un cercle fixe (G) qu'on déterminera. (Cette proposition se démontre facilement en transformant la figure par une inversion que l'on peut du reste choisir de différentes façons. On examinera successivement les diverses inversions susceptibles de conduire au résultat.)

3° En déduire le lieu géométrique des centres des cercles (Γ).

4° Traiter le même problème en remplaçant les cercles (Γ) par une nouvelle famille de cercles (Γ') également tangents à la droite (D), mais coupant le cercle (C) sous un angle donné V. Calculer en particulier le rayon du cercle (G') auquel les cercles (Γ') resteront tangents.

569. 1° Montrer qu'il existe une infinité d'inversions (S) qui conservent deux cercles C_1 et C_2 d'un même plan [c'est-à-dire que chaque inversion (S) transforme C_1 en C_1, C_2 en C_2]. Trouver le lieu de leurs pôles S. Montrer qu'il existe une infinité de cercles C qui sont conservés par toutes ces inversions. Existe-t-il des points possédant la même propriété ?

2° Soient dans un même plan deux points fixes A et M et une droite fixe Δ. On considère toutes les inversions (S) dont le pôle S est sur Δ et dont la puissance d'inversion est SM^2, c'est-à-dire les inversions qui conservent le point M et la droite Δ. Soit B l'inverse de A dans l'inversion de pôle S.

Quel est le lieu de B quand S décrit Δ ?

Soit γ le cercle qui passe par S, M, B. Montrer que γ coupe Δ et une infinité de cercles fixes sous des angles constants, que γ reste tangent à un cercle fixe ω, et que ce cercle ω est tangent à MA. Construire le point de contact de ω et de MA, le centre de ω. Calculer la distance à M de ce centre, et le rayon de ω connaissant la distance a de M à Δ et l'angle θ de MA et Δ.

Lieu H du centre de γ. Ce lieu peut-il être une parabole ?

Nota. — On peut chercher le lieu H avant l'enveloppe ω.

(Bordeaux.)

570. On donne sur une droite trois points A, B, C pris dans cet ordre : $AB = 2R$, $BC = a$. Sur AB comme diamètre, on décrit un cercle (Γ) de centre O et de rayon R ; en C, on élève la perpendiculaire (D) à AB. D'un point variable M pris sur (D), on trace les tangentes au cercle (Γ), qui touchent le cercle en P' et Q' et qui coupent respectivement en P et Q la tangente (T) en A au cercle.

1° Montrer que la droite P'Q' coupe AB en un point fixe I. Les droites BP' et BQ' coupent la tangente (T) respectivement en P" et Q". Comparer les longueurs AP et AP" ainsi que les longueurs AQ et AQ".

2° On transforme par inversion le cercle (Γ) en la droite (T). P'Q' devient un cercle (S). Montrer que ce cercle coupe AB en deux points fixes. Quels sont les points où (S) coupe (T) ? En déduire que, si M varie sur (D), le produit AP.AQ conserve une valeur constante, que l'on calculera.

3° Soient (ω) le cercle circonscrit au triangle MPQ et O' le centre du cercle exinscrit dans l'angle M de ce triangle. La droite MO rencontre le cercle (ω) en un point μ et la droite (T) en un point α. Montrer que la division αMOO' est harmo-

nique ; trouver le milieu du segment OO'. En déduire les lieux des points O' et μ.

4° Montrer que les cercles (ω) sont tangents à une droite fixe et demeurent invariants dans une certaine inversion. On en déduira qu'ils sont tangents à un cercle fixe et l'on indiquera quel est le lieu de leurs centres. (Aix-Marseille, 1952.)

571. On donne dans un plan un cercle (C) de centre O et de rayon R.

1° M étant un point quelconque du plan et (D) une droite quelconque passant en M dans le plan, construire les cercles (α) et (β) passant par M et tangents à la droite (D) et au cercle (C). (On pourra utiliser une inversion de pôle M.) A et B étant les points de contact avec (C), montrer que le cercle ABM est orthogonal à la droite (D) et au cercle (C).

2° Soit M' le point diamétralement opposé à M sur le cercle ABM. Montrer que le lieu de M', quand la droite (D) tourne autour de M, supposé fixe, est une droite (m). Quel est, dans les mêmes conditions, le lieu du point de rencontre des tangentes en A et B au cercle (C) ?

3° On suppose maintenant que (D) est une droite fixe passant à la distance $OH = \frac{R}{2}$ de O et que M est un point de (D) à la distance $HM = x$ de H. Calculer, en fonction de R et x, les rayons des cercles (α) et (β). Comment varie le rapport de ces rayons quand M décrit (D) ? Dans les mêmes conditions trouver les lieux des centres des cercles (α) et (β). (Paris, 1951.)

572. On donne un cercle Γ de centre O, de rayon k, un diamètre AB de ce cercle et l'on considère l'inversion de centre A et de puissance $4k^2$.

1° Inverse de Γ. On prend sur Γ un point quelconque M et l'on considère l'inverse C de la tangente en M à Γ. Quel est cet inverse ? Lieu de son centre quand le point décrit Γ.

2° Soit toujours M un point de Γ ; montrer qu'il existe deux cercles C' et C" (inverses de tangentes à Γ) orthogonaux au cercle C (inverse de la tangente en M à Γ). Quel est le lieu des points d'intersection de C et C', de C et C" quand M décrit Γ ?

3° Le plan de Γ étant orienté, on fixe la position de M sur ce cercle par l'angle (OA, OM) $= \varphi$. La notation (OA, OM) désigne l'angle dont le côté origine est OA et le côté extrémité OM. On prendra φ compris entre $-\pi$ et $+\pi$.

Soient R, R' et R" les rayons respectifs des cercles C, C' et C" ; calculer, en fonction de φ, le rapport $\frac{R' + R''}{R}$. Étudier les variations de ce rapport quand M parcourt Γ.

Déterminer la position de M de manière que $\frac{R' + R''}{R} = \lambda$, où λ désigne un nombre positif donné. Discuter. (Indochine, 1949.)

573. Deux cercles (C) et (C'), de centres O et O', de rayons R et R' sont tangents extérieurement en A. La droite OO' recoupe (C) en K et (C') en K'. On appelle (Γ) tout cercle tangent à (C) et à (C').

1° Soient M et M' les contacts de (Γ) avec (C) et (C'). Démontrer que la droite MM' passe par un point fixe S. En déduire la construction d'un cercle (Γ).

2° De S on mène une tangente à (Γ). Quel est le lieu (L) du point T de contact quand (Γ) varie ? Réciproquement, T étant donné sur (L), combien existe-t-il de cercles (Γ) tangents en T à la droite ST ? Effectuer la construction de ces cercles.

3° On transforme la figure dans une inversion de pôle A et de puissance $\overline{AK}.\overline{AK'}$; construire avec soin les transformées de (C), (C'), (Γ) et (L).

4° Quel est le lieu des centres ω des cercles (Γ) ? Prenant OO' pour axe des x et la médiatrice du segment OO' pour axe des y, donner l'équation de ce lieu. Calculer le rayon ρ de (Γ) en fonction de l'abscisse x de son centre ω.

Discuter le nombre des cercles (Γ) ayant un rayon ρ donné, suivant la valeur de ρ. (La Réunion, 1951.)

574. On considère, dans un plan, deux cercles (C) et (C') de centres O et O', de rayons R et R' tangents respectivement en I et I' à une droite fixe D.

1° Montrer que, I et I' étant fixes, si (C) et (C') se coupent en P et Q, la droite PQ passe par un point fixe J et que le produit $\overline{JP}.\overline{JQ}$ est constant.

2° On suppose maintenant que, (C) étant fixe, I' variable ,(C') varie en coupant (C) sous un angle constant.

Montrer par une inversion de pôle I par exemple, que les cercles (C') appartiennent à deux familles, les cercles (C'_1) de la première étant tangents à un cercle fixe (γ_1) tangent en I à D et les cercles (C'_2) de la deuxième étant tangents à un cercle fixe (γ_2) tangent également à D en I. Les cercles (γ_1) et (γ_2) seront déterminés par leurs rayons r_1 et r_2 exprimés en fonction de R et de α. Examiner les cas particuliers $\alpha = 0$ et $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Lieu des centres O'_1 des cercles (C'_1) et des centres O'_2 des cercles (C'_2).

3° On suppose enfin que, I restant fixe, R varie, (C') coupant encore (C) sous un angle constant α.

A chaque valeur de R correspondent un cercle (γ_1) et un cercle (γ_2) ; R variant, les rayons de ces cercles, r_1 et r_2, varient.

a) Montrer qu'à chaque valeur de R correspondent un cercle (C'_1) et un cercle (C'_2) tangents à D en un point I' donné.

b) Établir que, si R varie, I' restant fixe, les produits $r_1R'_1$, $r_2R'_2$, RR'_1, RR'_2 [R'_1 et R'_2 désignant les rayons de (C'_1) et (C'_2)] ont des valeurs constantes que l'on déterminera en fonction de II' et de α.

Donner les valeurs de ces constantes pour $\alpha = 0$ et $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

575. Soient (C), (C') des cercles de rayons R, R' de centres O, O', tangents extérieurement en S. Ces cercles coupent la droite OO' en S et respectivement en A et A'. Une tangente commune autre que la tangente D au point S coupe D au point P et la ligne des centres OO' en S' ; M et M' sont les points de contact. Soit T le milieu de OO'.

1° Montrer que le cercle de diamètre OO' est tangent en P à MM'. Évaluer SS' et ST en fonction des rayons.

2° Montrer que A, A', M, M' sont sur un même cercle (Ω) dont le centre ω est diamétralement opposé à P sur le cercle de diamètre OO', et que les droites AM, A'M' se coupent en P' sur D.

α et β étant les projections de ω sur OO' et sur D, montrer que les quatre points S', P, T, β sont sur un même cercle, ainsi que les quatre points S', P', α, β.

3° Les droites SM, SM' recoupent (Ω) en N, N'. Montrer que la droite NN' est perpendiculaire à D et que sa distance à S est égale à 2SP. (On pourra considérer le cercle circonscrit à SMP'M' et utiliser une inversion bien choisie.) Montrer que S'P' est l'axe radical de (Ω) et du cercle-point S.

4° En supposant la droite OO' et le point S fixes et les rayons variant de manière que $R - R' = d$ (d étant une longueur donnée), déterminer le lieu de ω, l'enveloppe de MM' et l'enveloppe de S'P'. (Dijon, 1951.)

576. On donne un cercle fixe (C) de centre O.

1° Soit (D) une droite et M un point de cette droite. Construire les deux cercles tangents à la droite (D) au point M et tangents au cercle (C). On désignera par P et Q les points de contact respectifs du cercle (C) et de chacun des cercles cherchés.

Les droites MP et MQ coupent à nouveau le cercle (C) en deux points P′ et Q′, dont on précisera les positions, remarquables, sur le cercle (C).

Démontrer que le cercle circonscrit au triangle MPQ est orthogonal à (C) et à (D). Soit M′ le point diamétralement opposé au point M sur ce cercle circonscrit. Trouver le lieu du point M′ lorsque, M et (C) restant fixes, la droite (D) tourne autour de M.

2° On mène en P et Q les tangentes au cercle (C). Soit R leur point d'intersection.

Lieu du point R lorsque, la droite (D) étant fixe, M décrit cette droite.

Lieu du point R lorsque le point M décrit un cercle (Γ) de centre O, la droite (D) étant astreinte à couper le cercle (Γ) sous un angle constant.

Lieu du point M lorsque le point R décrit un cercle (Γ') de centre O, la droite (D) étant astreinte à couper le cercle (Γ') sous un angle constant.

3° On choisit comme axes Ox et Oy deux axes rectangulaires, Oy étant parallèle à la droite (D). Le rayon du cercle (C) étant pris pour unité de longueur, on désigne par x_0 et y_0 l'abscisse et l'ordonnée du point M.

Calculer, en fonction de x_0 et y_0, les coordonnées des points P et Q, ainsi que celles des intersections P_1 et Q_1 de OP et OQ avec la droite (D). Donner la valeur du rapport $z = \dfrac{MP_1}{MQ_1}$ (ou de son inverse).

4° Étudier les variations de z (ou de son inverse) en fonction de x_0 lorsque, la droite (D) se déplaçant parallèlement à l'axe Oy, le point M décrit la parallèle d'ordonnée à l'axe Ox $y_0 = 2$. (Strasbourg.)

577. α. AC, AC′ étant deux droites fixes, AX une de leurs bissectrices, soient γ_1 et γ_2 deux cercles qui varient en restant égaux entre eux, tangents aux deux droites AC et AC′ et centrés sur AX. On demande le lieu des points où γ_1 et γ_2 touchent leurs tangentes communes parallèles à AX.

β. Dans toute la suite du problème, C et C′ sont deux cercles fixes qui se coupent en A et B. On sait qu'il existe une infinité de cercles Γ, orthogonaux à C et C′, dont les centres sont sur AB.

1° Montrer que chacune des deux inversions qui transforment C en C′ laisse invariant tout cercle Γ.

2° Soient M et N les points où un cercle Γ coupe C ; M′ et N′ ceux où il coupe C′ (N étant intérieur à C′, et M′ intérieur à C). Montrer que, quand Γ varie, les droites qui joignent deux à deux les points M, N, M′, N′ passent chacune par un point fixe.

3° Que devient la figure (cercles C, C′, Γ, points M, N, M′, N′) dans une inversion de pôle B ? Montrer qu'il existe quatre cercles γ_1, γ_2, γ_3, γ_4 tangents à C et C′ : le premier en M et N′ ; le deuxième en N et M′ ; le troisième en M et M′ ; le quatrième en N′ et N (γ_1 pouvant être exceptionnellement une droite).

4° Montrer que quand Γ varie la somme ou la différence des inverses des rayons de γ_1 et γ_2 est constante ; la calculer connaissant AB $= a$ et les angles θ et θ' des deux cercles C et C′ avec AB.

5° Montrer qu'il existe deux cercles γ et γ' qui passent en B et sont tangents à γ_1 et γ_2 ; qu'en B ces deux cercles ont même tangente et que cette tangente est fixe quand Γ varie.

6° Lieux des points de contact de γ et γ' avec γ_1 et γ_2.

7° Calculer l'angle sous lequel doivent se couper C et C' pour qu'il existe un cercle qui passe en B et soit tangent à γ_1, γ_3, γ_4. (Maroc, 1935.)

578. Soient, dans un plan, C et C' deux cercles fixes, extérieurs l'un à l'autre, γ les cercles tangents à C et C' avec contacts de même nature, γ' les cercles tangents à C et C' avec contacts de natures différentes. Soit, en outre, S le point de contact de deux cercles γ tangents entre eux.

1° Lieu de S quand varient les deux cercles γ tangents en S.

2° Montrer qu'il passe en S deux cercles γ' qui se coupent entre eux (et qui coupent aussi les deux cercles γ tangents en S) sous un angle constant quand S varie (le calcul de ces angles dans le cas général n'est pas demandé).

3° Montrer que, dans une inversion de pôle S, les deux cercles c et c', inverses des cercles fixes C et C', ont des rayons égaux et forment une figure dont la forme est invariable quand S varie.

4° La puissance de l'inversion étant positive et choisie pour chaque pôle S de telle sorte que les rayons de c et c' aient une valeur fixe donnée r, on demande de trouver les lieux Ω et Ω' des centres ω et ω' de c et c' et de montrer que la droite $\omega\omega'$ passe par un point fixe K.

5° *Application numérique.* — Les deux cercles C et C' ont respectivement les rayons $R = 1$, $R' = 3$; la distance OO' de leurs centres est 14 ; et $r = 2$. Préciser les positions du lieu de S, de ω, ω' et K ; calculer la longueur $\omega\omega'$.

6° Indiquer brièvement (sans application numérique) comment se généralisent ces résultats quand S est l'intersection de deux cercles γ qui se coupent sous un angle constant donné.

7° Lieu des pôles S des inversions qui changent C et C' en deux cercles de rayons donnés r et r' (la discussion n'est pas demandée).

Nota. — Les candidats pourront utiliser la propriété suivante : *Deux cercles qui ne se coupent pas peuvent par inversion être transformés en deux cercles concentriques.* (Bordeaux.)

579. On considère trois points fixes, P, A, B, situés sur une droite (D), A entre P et B, et une droite (Δ) mobile passant par P. On trace les deux cercles C_1 et C_2 tangents à (Δ) et passant par A et B. Soient M_1 et M_2 leurs points de contact avec (Δ). Lorsque (Δ) tourne autour de P, on demande de répondre aux questions suivantes :

1° Lieu des points M_1 et M_2.

2° Démontrer que le cercle C_3 circonscrit au triangle AM_1M_2 rencontre la droite (D) en un point fixe A' autre que A. Déterminer ce point A'.

3° Les droites BM_1 et BM_2 coupent respectivement le cercle C_3 en deux autres points N_1 et N_2. Lieu des points N_1 et N_2.

4° Lieu du point de rencontre des droites M_1M_2 et N_1N_2.

5° On transforme toute la figure par inversion, le pôle d'inversion étant le point B et la puissance d'inversion étant $\overline{BA}.\overline{BP}$. Que deviennent les droites (D) et (Δ), les cercles C_1, C_2 et C_3, les points N_1 et N_2 et le lieu du 4° ?

(Syrie.)

580. On donne dans le plan un axe $x'Ox$ et sur cet axe deux points fixes S, S' d'abscisses respectives a, a'. Dans toute la suite du problème, A et B sont les extrémités d'un diamètre variable d'un cercle donné (C) de centre O et de rayon R, et A', B' sont les points où les droites SA et S'B coupent à nouveau respectivement le cercle (C). On supposera a positif, pour fixer les idées, et différent de R.

1° On se place tout d'abord dans le cas où le point S' est confondu avec le point S.

Montrer que le cercle circonscrit au triangle SAB passe par un point fixe I autre que S ; en déduire que la droite A'B' passe par un point fixe K.

Montrer que le cercle circonscrit au triangle SA'B' est orthogonal au cercle (C) et qu'il passe par un point fixe I' autre que S.

Trouver les abscisses des points I, I' et K. Quelle particularité présente la disposition des points O, K, S, I' ?

2° Supposant encore S' confondu avec S, on mène les hauteurs du triangle SAB.

Trouver leurs enveloppes et le lieu de leur point de concours. Montrer que le cercle circonscrit au triangle ayant pour sommets les pieds de ces hauteurs coupe la droite $x'Ox$ en deux points fixes dont on déterminera les abscisses.

3° On se place enfin dans le cas général où les points S et S' sont distincts, et l'on suppose $a + a'$ différent de zéro.

Montrer que le lieu géométrique du point M où se coupent les droites SA et S'B est un cercle ; trouver en fonction de a, a', R, l'abscisse du centre de ce cercle et le rayon de ce cercle.

Trouver le lieu géométrique du centre du cercle circonscrit au triangle MA'B'.

(Toulouse, 1948.)

581. On donne une sphère (S) de centre O et de rayon R, et un plan diamétral (Π) perpendiculaire au diamètre PP'. On effectue de P' la projection stéréographique de (S) sur (Π).

1° Soient m et m' deux points de (Π) inverses par rapport à la sphère (S). Ils sont images de deux points M et M' de (S) par la projection stéréographique.

On fera la figure dans le plan contenant les points P, P', M, M', m, m'. Sous quel angle se coupent les cercles passant l'un par P', m, m', l'autre par P', M, M' ? Du résultat précédent, montrer, en employant les propriétés de l'inversion, qu'on peut en déduire sous quel angle se coupent les droites MM' et mm'.

Soient M et M' deux points de la sphère (S) tels que les deux droites MM' et PP' soient parallèles. Peut-on affirmer que les projections stéréographiques m et m' sont inverses l'une de l'autre dans l'inversion de pôle O et de puissance R^2 ?

2° On prend dans le plan (Π) deux axes de coordonnées rectangulaires Ox, Oy, tels que le trièdre Ox, Oy, OP soit direct. Au point M de la sphère (S) on fait correspondre l'axe Ou du plan (Π), support du vecteur $\overrightarrow{Om}$, et orienté de O vers u. Le point M sera défini par les angles $\varphi = (Ox, Ou)$ (longitude) et $\theta = (Ou, OM)$ compté positivement de Ou vers OP (latitude). On supposera $-\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi$ et $-\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$.

a) Soient x et y les coordonnées de la projection stéréographique m du point M. En posant $2\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta$, calculer en fonction de α et de φ la longueur Om et les coordonnées x et y.

b) On suppose $\varphi = \theta$, calculer en fonction de α les quantités x, $2R - x$, y. Déterminer la relation $y = f(x)$ qui lie les coordonnées de m.

c) Construire la courbe (C) représentant la variation de la fonction $y = f(x)$.

3° On effectue sur (C) une inversion de centre O et de puissance R^2. Comparer à (C) la courbe obtenue par cette inversion. (Maroc, 1949.)

582. On considère, dans un plan P, une droite fixe Δ et deux points fixes A et B non situés sur Δ et placés d'un même côté de cette droite. La droite AB coupe Δ en un point ω. On désignera par a et b les longueurs ωA et ωB ($a > b$) et par θ l'angle aigu de AB avec Δ.

1° Construire les cercles passant par A et B et tangents à Δ en α et β. Calculer leurs rayons en fonction de a, b, θ. Où faut-il choisir le centre O d'un cercle passant par A et B pour que ce cercle coupe Δ en deux points μ et ν ?

Quelle est alors la disposition des points α, β, μ, ν ?

Montrer que, pour que le cercle passant par A et B et qui a son centre sur la perpendiculaire menée de A sur Δ coupe Δ, il faut que θ soit inférieur à un angle aigu φ dont on calculera le cosinus. Cette condition sera supposée remplie dans ce qui suit.

2° On considère les sphères Σ qui ont pour grands cercles les cercles du plan P passant par A et B. Montrer que les cercles (σ) d'intersection de ces sphères par un plan (π) perpendiculaire au plan P suivant Δ forment un faisceau à points limites.

Comment se transforme la figure formée par le cercle (ω) du plan P qui a pour diamètre $\alpha\beta$ et un cercle (σ) dans l'inversion de centre α qui laisse le cercle (σ) invariant ? En déduire que toute sphère passant par le cercle (ω) est orthogonale à une sphère quelconque passant par un cercle (σ).

3° Soit S celle des sphères Σ dont le diamètre passant par A est perpendiculaire à Δ. Elle coupe le plan (π) suivant un cercle (S). On considère l'inversion (A) de centre A qui laisse le cercle (S) invariant. Montrer que dans cette inversion les cercles (σ) se transforment en cercles (σ') découpés sur une sphère fixe par des plans passant par une droite fixe dont on précisera la position. (Bordeaux, 1952.)

583. 1° Lieu du foyer F' d'une conique dont on donne un foyer F, le rayon $2a$ du cercle directeur et une tangente T.

2° Construire une conique connaissant le foyer F, le rayon $2a$ du cercle directeur et deux tangentes T_1 et T_2 non parallèles.

3° Discuter la construction précédente : en supposant a constant et les droites T_1 et T_2 fixes, on déterminera la région R du plan dans laquelle doit se trouver le point F pour que le problème admette des solutions. Avec les mêmes hypothèses, trouver le lieu du foyer F', lorsque le foyer F décrit un cercle ayant pour centre le point de rencontre P de T_1 et T_2. Ce lieu se compose en général de deux courbes distinctes ; comment faut-il choisir T_1 et T_2 pour que ces courbes soient confondues.

4° Étudier suivant la position de F dans la région R la nature des coniques construites dans la deuxième question. On pourra supposer successivement

$$PF < 2a \text{ et } PF > 2a.$$

584. On considère trois points A, B, S fixes sur la droite $x'x$ et le faisceau des cercles C du plan qui sont tangents à $x'x$ en S. Les tangentes variables menées de A et B à C se coupent en un point M.

1° Démontrer que le lieu de M est une conique de foyers A et B. Discuter le genre de cette conique suivant les positions respectives de A, B, S, et examiner, en particulier, ce qu'elle devient quand A ou B s'éloigne à l'infini.

2° S étant entre A et B, déterminer les cercles C pour lesquels M est rejeté à l'infini. Retrouver ainsi la construction des asymptotes d'une hyperbole dont on connait les sommets et les foyers.

3° On se place dans le cas où le lieu de M est une parabole. Montrer que la tangente en M à ce lieu passe alors par le centre de C et que la polaire de M par rapport à C rencontre $x'x$ en un point fixe.

4° Déduire de ce qui précède des constructions simples de l'intersection d'une parabole et d'une droite, lorsque celle-ci est parallèle à l'axe, passe par le foyer ou par le sommet de cette parabole.

5° Étant donnée une conique de foyers F, F' décrite par un point M, montrer que deux des quatre cercles tangents aux trois côtés du triangle FMF' ont leurs centres sur deux droites fixes. A-t-on une propriété analogue pour la parabole ?

585. On considère une inversion (I) de pôle I et de puissance R^2. Cette inversion transforme en lui-même tout point du cercle C de centre I et de rayon R.

1° Comment un cercle Γ orthogonal à C (c'est-à-dire le coupant à angle droit), est-il transformé par l'inversion (I) ?

2° Soit C_1 un cercle tangent à C en un point O. Montrer que les cercles Γ orthogonaux à C et tangents à C_1 restent tangents à une seconde courbe fixe C_2 : C étant donné, comment faut-il choisir C_1 pour que C_2 soit une droite ? Dans le cas général, C_2 est un cercle. En désignant par R_1 et R_2 les abscisses des centres c_1 et c_2, évaluées à partir de O sur le diamètre OO′ de C orienté de O vers O′, établir la relation qui existe entre R_1 et R_2.

3° Déterminer C_1 de manière que la somme des carrés des inverses des rayons des cercles C_1 et C_2 soit égale à $\frac{1}{a^2}$, a étant une longueur donnée. Discuter et montrer que toute valeur de a inférieure à une certaine limite définit un couple unique de cercles C_1 et C_2 se correspondant. Que devient le couple pour $a = \frac{R}{2}$?

4° Dans le cas particulier, $a = \frac{R}{2}$, déterminer le lieu du centre du cercle variable Γ tangent à C_1 et C_2. Soient T_1 et T_2 les points de contact de Γ avec C_1 et C_2. Étudier comment varie la droite T_1T_2.

5° Dans le cas général montrer que le lieu des centres des cercles Γ est une conique dont on précisera la nature suivant la valeur de a.

586. On donne, sur une droite orientée, trois points fixes A, F, F′ tels que $\overline{AF} = m$, $\overline{AF'} = m'$, $0 < m < m'$. On appellera (F) le cercle de centre F, de rayon m, (F′) le cercle de centre F′, de rayon m' et (C) tout cercle tangent à (F) et à (F′) ; C sera le centre de (C), P son point de contact avec (F), P′ son point de contact avec (F′).

1° Démontrer que le lieu de C se compose d'une ellipse et d'une droite.

2° Démontrer que, si P et P′ sont distincts, la droite PP′ passe par un point fixe I. Qu'est le point I par rapport à (F) et (F′) ? Calculer $\overline{AI}$ en fonction de m et m'.

3° Déduire du 2° une construction géométrique de l'intersection de l'ellipse (E) de foyers F et F′ et passant par A avec une droite issue de F (ou F′).

4° Qu'est le lieu géométrique du point de rencontre des tangentes en P et P′ à (C) ? Déduire une construction géométrique des tangentes menées à (E) d'un point de la perpendiculaire en A à FF′.

5° Que sont, dans l'inversion de pôle A et de puissance $4mm'$, les inverses de (F), (F′), (C) ? Qu'est l'inverse de la droite PP′ ?

Utiliser cette inversion :

a) pour retrouver tous les résultats du 2° ;

b) pour démontrer que les cercles (C) restent orthogonaux à un cercle fixe si P et P′ sont distincts ; calculer $\overline{AK}$, K étant le centre de ce cercle.

(Caen, 1950.)

587. 1° On considère une ellipse de foyers F et F′, de grand axe $2a$. Soient (C) le cercle directeur de centre F, M un point de l'ellipse, (Γ) le cercle de centre M passant par F′.

Comment se transforment, dans une inversion de centre F′, le cercle (Γ) et la tangente en M à l'ellipse ? Préciser le centre du cercle transformé de cette tangente, et son lieu lorsque M décrit l'ellipse, la puissance d'inversion restant constante

2° On considère deux ellipses (E) et (E') de même cercle directeur (C), dont on désigne les seconds foyers par F' et F''.

Déterminer les points communs à ces deux ellipses. Montrer qu'il y en a toujours deux, et deux seulement, M et M'.

Enveloppe de MM' lorsque, F' restant fixe, F'' décrit un cercle (Ω) [nécessairement intérieur à (C)]. Cas où ce cercle (Ω) passe par F'.

3° On se place dans cette dernière hypothèse [cercle (Ω) passant par F'] et l'on désigne par I et I' les centres des cercles inverses des tangentes en M et M' à (E), dans l'inversion de centre F' qui conserve (C).

Montrer que II' passe par un point fixe lorsque M varie sur (E).

En déduire le lieu du point commun aux tangentes à (E) en M et M'.

Montrer que le résultat obtenu peut être établi indépendamment de tout ce qui précède, en considérant l'ellipse (E) comme projection d'un cercle.

(Caen, 1948.)

588. On donne deux cercles (C) et (C') de centres O et O', tangents intérieurement au point A et de rayons respectifs 2R et R. On propose l'étude de la famille des cercles (Γ) tangents à la fois aux cercles (C) et (C') à l'exclusion des cercles tangents en A.

1° Le lieu des centres γ des cercles (Γ) est une ellipse, que l'on déterminera.

2° On considère deux cercles (Γ_1) et (Γ_2) de centres γ_1 et γ_2, appartenant à cette famille. Soient M_1 et M_2 leurs points de contact avec le cercle (C) et M'_1 et M'_2 leurs points de contact avec le cercle (C'). Démontrer que les droites M_1M_2, $M'_1M'_2$ et $\gamma_1\gamma_2$ concourent en un point D qui est pôle d'une inversion échangeant (Γ_1) et (Γ_2) et dont on déterminera le lieu.

3° Construire les cercles (Γ) de rayon donné r. Discuter. L'un de ces cercles étant choisi, construire les cercles (Γ) qui lui sont tangents.

4° Démontrer qu'il existe un cercle orthogonal à tous les cercles (Γ). Déterminer son centre et son rayon. En déduire le lieu du pied de la polaire de A par rapport aux cercles (Γ) sur la droite Aγ quand γ varie. Quelle est l'enveloppe de ces polaires ? (Caen, 1952.)

589. 1° On donne un cercle (F) de centre F et de rayon R et un point fixe F' de son plan. On pose $FF' = 2c < R$. Deux droites perpendiculaires se coupant en F' peuvent pivoter autour de ce point ; elles rencontrent le cercle (F) respectivement en A et C, en B et D. I désignant le milieu du segment de droite AB, on demande d'évaluer la somme $IF'^2 + IF^2$ en fonction de R. Trouver le lieu du point I. En déduire que les côtés du quadrilatère ABCD restent tangents à une ellipse (E) dont on précisera les éléments essentiels : foyers, longueur du grand axe, longueur du petit axe, cercle principal.

2° Réciproquement, on donne une ellipse (E) dont les foyers sont F et F', dont le grand axe a pour mesure $2a$. On pose $FF' = 2c$. Deux demi-droites issues de F' forment un angle droit qui peut pivoter autour de ce point. Soit (t) une tangente quelconque à l'ellipse (E) ; elle coupe les côtés de l'angle droit respectivement en A et B. Soit, d'autre part, I le pied de la perpendiculaire abaissée de F sur (t). Montrer que si le point I est le milieu du segment de droite AB, les segments FA et FB ont une valeur constante que l'on évaluera en fonction des éléments de l'ellipse.

En déduire pour une position quelconque de l'angle droit, de sommet F' :

a) la construction de la tangente unique à l'ellipse (E) rencontrant les deux côtés de l'angle respectivement en A et B, ces points étant équidistants du point F;

b) la construction d'un cercle (F) et d'un seul tel qu'il existe une infinité de quadrilatères convexes (Q) inscrits dans le cercle (F), circonscrits à l'ellipse (E) et dont les diagonales se coupent orthogonalement au point F'.

3° L'ellipse (E) et le cercle associé (F) étant connus, on considère un quadrilatère ABCD appartenant à la famille des quadrilatères (Q) découverte dans les deux ques-

tions précédentes. Soient L, M, N, P, S, T les pôles respectifs des droites AB, BC, CD, DA, AC, BD par rapport au cercle (F), H le point d'intersection des droites AD, BC ; K celui des droites AB, CD. Montrer :

a) que les points L, M, N, P appartiennent à un cercle fixe (Γ) inverse du cercle principal de l'ellipse (E) dans une inversion dont on précisera le pôle et la puissance ;

b) que les ensembles de points (H, K, S, T), (L, F', N, H), (P, F', M, K) appartiennent respectivement à trois droites (Δ), (Δ'), (Δ'') dont l'une (Δ) est fixe, les bissectrices des angles formés par les deux autres étant les diagonales du quadrilatère (Q) choisi ;

c) que sur chaque droite (Δ), (Δ'), (Δ'') les quatre points associés forment une division harmonique. (Bordeaux, 1950.)

590. (E) est une ellipse donnée, de centre O, de foyers F et F'. On désigne par a le rayon du cercle principal (O) et par $2c$ la distance FF'.

1° Soit H la projection de F sur une tangente (Δ) à l'ellipse (E). Soient M et M' les points de (Δ) définis par

$$HM = HM' = HF'.$$

Rappeler quel est, lorsque (Δ) varie, le lieu de H. Calculer FM et FM' en fonction de a et c. En déduire que, lorsque (Δ) varie, le lieu de M et M' est un cercle (C) de centre F.

2° Soit I le point de rencontre des tangentes au cercle (C) en M et M'. Par quelle transformation simple peut-on déduire I de H ? Montrer que le lieu de I est, lorsque (Δ) varie, un cercle (C').

3° Les droites rectangulaires F'M et F'M' recoupent respectivement (C) aux points P et P'. Montrer que les quatre côtés du quadrilatère MM'PP' sont tangents à (E). En déduire qu'il existe une infinité de quadrilatères inscrits à (C) et circonscrits à (E), puis qu'il existe une infinité de quadrilatères inscrits à (C') et circonscrits à (C).

4° On désigne par K' le pied sur la droite FF' de la directrice associée au foyer F' [on rappelle que cette directrice est la polaire de F' par rapport au cercle principal (O)]. Montrer que F' et K' sont conjugués par rapport à (C). Montrer que les trois cercles (O), (C), (C') appartiennent à un même faisceau à points limites. [A cet effet il pourra être utile de considérer le faisceau de cercles orthogonaux aux cercles (O) et (C)]. (Strasbourg, 1950.)

591. On considère une ellipse de grand axe $AA' = 2a$, de petit axe $BB' = 2b$, de foyers F et F' ($FF' = 2c$) et les tangentes BT et B'T' menées aux extrémités du petit axe. Une tangente à l'ellipse rencontre BT et B'T' respectivement en P et P'.

1° Démontrer que $BP \times B'P' = a^2$.

2° Démontrer que le cercle circonscrit au triangle FF'P est tangent en P à la droite PP' et que le cercle circonscrit au triangle FF'P' est tangent en P' à cette même droite.

Démontrer que l'angle P'F'P reste constant quand la tangente PP' se déplace.

Soit φ le symétrique de F par rapport à PP'. Démontrer que le quadrilatère $F'P\varphi P'$ est inscriptible.

3° On suppose que $b = c$ et l'on admet de plus que les points P, P' et F sont d'un même côté de la droite BB'. En désignant par x l'angle BPF', calculer les longueurs F'P, F'P' et l'aire du triangle PF'P'.

4° Si, dans l'expression de l'aire du triangle PF'P', on exprime $\sin x$ et $\cos x$ en fonction de $\operatorname{tg} x = t$, on obtient une fonction $y = \dfrac{b^2(1 + t^2)}{2t(1 - t)}$.

Étudier la variation de y en fonction de t et construire la courbe en portant en abscisses les valeurs de t et en ordonnées celles de y. Indiquer la partie de cette courbe répondant aux conditions indiquées au 3°. (Lille, 1952.)

592. On considère une ellipse de foyers F et F′ dans laquelle la distance focale $FF' = 2c$ est égale à la longueur $2b$ du petit axe ; la longueur du grand axe est $2a$.

1° M étant un point quelconque de cette ellipse, calculer les longueurs $MF = x$ et $MF' = y$ en fonction de a et de l'angle $FMF' = \alpha$. Quelle est la valeur maximale de α ?

2° Calculer, en fonction de x, y, α puis en fonction de a et α, la puissance du point M par rapport au cercle de diamètre FF′. Déduire de ce résultat l'expression de la puissance du point M par rapport au cercle principal ; quelle est la longueur de la corde du cercle principal perpendiculaire à OM ? O est le milieu de FF′.

3° Les droites MF et MF′ recoupent le cercle de diamètre FF′ en P et P′ Calculer, en fonction de a et α, la distance PP′ et déterminer α pour que la droite PP′ soit perpendiculaire à FF′.

4° On considère les ellipses (E) dans lesquelles $b = c$, dont un sommet du petit axe est fixe et dont le foyer F décrit une droite (D). Trouver le lieu du deuxième foyer ainsi que les enveloppes des deux directrices. (Maroc, 1943.)

593. Dans une ellipse (E) on suppose fixes un foyer F et un sommet A du grand axe.

1° Montrer que le lieu géométrique des sommets B et B′ du petit axe est une parabole de foyer F. Distinguer les arcs correspondant aux ellipses (E_1) ou (E_2) dans lesquelles A et F sont d'un même côté ou de part et d'autre du centre.

2° Construire le centre O de l'ellipse (E) tangente à une droite donnée (D). Discuter et indiquer comment on doit choisir la droite (D) pour obtenir une ellipse (E_1) ou (E_2).

3° Appelant θ l'angle OFB, établir la relation $\operatorname{tg} FAB = \sin\theta$.

En déduire, en utilisant le cercle de centre F de rayon FA et la perpendiculaire en F à FA, une construction géométrique simple des deux sommets B_1 et B_2 situés sur une droite passant par A convenablement choisie.

4° Montrer que les ellipses (E_1) et (E_2) correspondant aux points B_1 et B_2 précédents sont semblables.

Évaluer, en fonction de $AF = p$ et des lignes trigonométriques de l'angle $\frac{\theta}{2}$ leurs demi-axes et leur rapport de similitude. Trouver le lieu géométrique du milieu $I(x, y)$ de B_1B_2, en utilisant les axes de coordonnées rectangulaires AFx et Ay.

(Lille.)

594. 1° On considère une ellipse E de grand axe AA′ et de foyer F (A et A′ sont les sommets de E sur l'axe focal. A est le sommet voisin de F). Une tangente variable à cette ellipse perce en P et Q les tangentes à E en A et A′ ; montrer que l'angle QFP est droit et que le produit AP.A′Q est constant (trouver la valeur de cette constante).

2° Inversement soient deux droites parallèles Δ, Δ' et un point F compris entre Δ et Δ' ; un angle droit pivote autour de F, ses côtés rencontrant Δ et Δ' respectivement en P, Q. Trouver l'enveloppe de la droite PQ. Si f désigne la projection orthogonale de F sur PQ, montrer que les triangles QFP et $A'fA$ sont semblables ; lieu du point f. (A et A′ sont les projections de F sur Δ et Δ'.)

3° FP prolongée coupe Δ' en P′, FQ prolongée coupe Δ en Q′ ; montrer que dans le trapèze PQP′Q′ la somme des carrés des deux côtés parallèles est égale à la somme des carrés des deux côtés non parallèles. Inversement, prouver que dans un trapèze convexe qui possède cette propriété, les diagonales PP′, QQ′ se coupent à angle droit en un point F qui est foyer d'une ellipse inscrite dans le trapèze et ayant pour grand axe AA′, A et A′ étant les projections de F sur les bases PQ′ et QP′.

4° Montrer que les points de contact PQ et P'Q' avec E sont en ligne droite avec le point F.

5° Posant $\alpha = (\widehat{FA, FP})$, trouver le minimum de la longueur PQ et le minimum de l'aire du trapèze. (Saint-Cyr.)

595. A) On considère un point P variable sur un cercle fixe (C) et un point F fixe, *extérieur* à (C) et situé dans son plan. (Δ) étant une droite passant par P et située dans le plan de (C) on désigne par α l'angle orienté (PF, Δ) défini à $k\pi$ près et compté positivement dans le sens trigonométrique. α reste constant dans les trois questions suivantes.

1° Montrer que l'on passe de P à la projection orthogonale Q de F sur (Δ) par une similitude ; en déduire le lieu de Q.

2° Quand P décrit (C), la droite (Δ) reste tangente à une hyperbole (H) que l'on caractérisera par ses foyers et son cercle principal. Construire le point M de contact de (Δ) et de (H). [On pourra utiliser deux positions voisines de (Δ).]

3° Le point de contact M de (Δ) et de (H) se trouve sur la circonférence tangente en P à (C) et passant par F : en déduire que (H) est tangente à (C) et construire les points de contact.

B) Deux points P et P' décrivent, respectivement, deux cercles fixes (C) et (C') d'un même plan, extérieurs l'un à l'autre. On désigne par O et O' les centres de ces cercles et par α l'angle orienté de vecteur $(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{O'P'})$ défini à $2k\pi$ près et compté positivement dans le sens trigonométrique.

1° Construire le centre de similitude des segments $\overline{OP}$ et $\overline{O'P'}$ (similitude qui transforme O en O' et P en P') ; montrer qu'il est fixe quand α reste constant et en déduire que, dans les mêmes conditions, le lieu du point Q qui divise PP' dans un rapport donné λ est un cercle (Γ).

2° L'angle α restant toujours constant, montrer que les droites PP' restent tangentes à une hyperbole (H). Que peut-on dire des cercles (Γ) quand λ varie ?

3° Les deux cercles (C) et (C') restant fixes, quel est le lieu des foyers de (H) quand α varie ? Existe-t-il, sur ce lieu, des foyers d'hyperboles équilatères ?

(Montpellier, 1949.)

596. On donne deux cercles (C) et (C') égaux et orthogonaux, de centres O et O', de rayon R, se coupant en A et B. Soit I le milieu de OO'. Une demi-droite Ix coupe (C) en P et (C') en P' ; OP et O'P' se coupent en M.

1° Montrer que le produit IP.IP' reste constant lorsque Ix tourne autour de I. On effectue l'inversion de pôle I et de puissance IA^2 ; que deviennent les cercles (C) et (C') ? en déduire que le triangle MPP' est isocèle et que le cercle (γ) circonscrit au triangle MPP' est orthogonal à un cercle fixe dont on précisera le centre et le rayon.

2° Lieu géométrique du point M lorsque Ix tourne autour de I ; tangente en M à ce lieu. Lieu géométrique du point T diamétralement opposé à M sur le cercle (γ).

3° Un point Q décrit l'axe radical des cercles (C) et (C').

Lieux géométriques des points U et U' respectivement inverses du point Q dans les inversions de pôles O et O' et de même puissance R^2. Montrer que OU' et O'U se coupent en un point S de l'axe radical, conjugué harmonique de Q par rapport à A et B. (Lille, 1950.)

597. Soient deux axes rectangulaires O*u*, O*v*. Un point F du plan de ces deux axes a pour abscisse *d*, pour ordonnée $d\sqrt{3}$, *d* étant une longueur donnée. On considère les ellipses ayant pour foyer F et pour tangentes O*u* et O*v*.

1° Déterminer les lieux du second foyer F' et du centre ω de ces ellipses. Montrer que leur petit axe reste tangent à une parabole.

2° On désignera par x la distance du point O au second foyer F'. Calculer en fonction de d et x le demi grand axe, le demi petit axe, l'excentricité de l'ellipse correspondante ainsi que la distance FP du foyer fixe à la directrice attachée à ce foyer. Pour quelle valeur de x obtient-on l'ellipse d'excentricité minimale ?

3° Soit D une droite du plan uOv parallèle à OF ; soit Q l'intersection de cette droite avec FF' ; montrer que le produit FP.FQ est constant. En déduire que la directrice relative au foyer F passe par un point fixe, qu'on déterminera.

(Nancy.)

598. On considère les hyperboles (H) qui ont une asymptote donnée D et un foyer donné F.

1° Rappeler la disposition d'un foyer F d'une hyperbole et de la directrice associée Δ par rapport au cercle principal (qui a pour diamètre l'axe transverse). Où les asymptotes coupent-elles ce cercle ?

2° F et D étant donnés, montrer que les cercles principaux des hyperboles (H) sont tangents à une droite fixe en un point fixe, et qu'il en est de même des cercles directeurs qui ont pour centre le foyer F' de (H) autre que F. Quelle est l'enveloppe de la directrice Δ associée à F? Quelle est l'enveloppe de la deuxième asymptote de (H) ? Quelle est l'enveloppe de l'axe non transverse de (H) ?

3° Construire (H) lorsqu'on donne, outre F et D :

a) un point de la directrice Δ associée à F ;

b) un point P de (H). Se ramener au cas *a)* et discuter suivant la position de P dans le plan ;

c) une tangente à (H) (on pourra commencer par déterminer le point de contact de cette tangente). (Nancy, 1949.)

599. On donne un point fixe F, une droite fixe D ne passant pas par F, et l'on considère les hyperboles (H) qui admettent pour foyer le point F et pour asymptote la droite D.

1° Lieu du deuxième foyer F'. Enveloppes de la deuxième asymptote et de l'axe non focal. Que peut-on dire du cercle directeur relatif au foyer F' ? de la directrice relative à F ?

2° Construire F', sachant que (H) satisfait à l'une des conditions supplémentaires :

a) (H) a une excentricité donnée ;

b) (H) est tangente à une droite donnée ;

c) (H) passe par un point donné M.

Dans le dernier cas, le problème admet deux solutions. Comment choisir M pour que les deux hyperboles se coupent orthogonalement au point M ?

(Brésil, 1950.)

600. On considère un cercle fixe (O) de centre O et de rayon R, et un point fixe A tel que OA = 2R. On désigne par (C) un cercle de centre C passant par A et tangent au cercle (O).

1° Quel est le lieu du centre C ? On précisera les éléments remarquables de ce lieu : foyers, centre, axes, sommets, directrices, excentricité,...

2° On désigne par M le point de contact des cercles (O) et (C) : les tangentes en A et M à (C) se coupent en P. Quel est le lieu de P ?

Montrer que ce lieu peut se déduire de la polaire de A par rapport au cercle (O) au moyen d'une transformation très simple.

3° Une droite arbitraire ayant été menée par A, il existe en général deux cercles (C_1) et (C_2) ayant leurs centres sur celle-ci, passant par A et tangents au cercle (O).

Soient M_1, M_2 les points de contact du cercle (O) avec (C_1) et (C_2) respectivement.

Quel est le lieu du point Q où M_1M_2 coupe la ligne des centres C_1C_2 lorsque celle-ci varie (en passant toujours par A) ?

4° On désigne par (C′) et (C″) deux cercles tangents à (O) et se coupant en A sous l'angle donné V. Quel est le lieu de leur second point d'intersection ? Donner une construction précise de ce lieu lorsque V est droit, puis lorsque $V = \frac{\pi}{3}$.

(Nancy, 1950.)

601. On donne un cercle (C) de centre O, de rayon a, et un point fixe F extérieur au cercle (C) ; on pose $OF = c$.

1° Soit γ la perpendiculaire en O à OF. Au point ω variable sur γ on associe le cercle (λ) de centre ω qui se déduit de (C) par la similitude de centre F qui transforme O en ω. Construction précise de ce cercle ; démontrer que les cercles (λ) sont vus de F sous un angle constant 2α.

2° Soit F′ le symétrique de F par rapport à γ ; le cercle ωFF′ coupe (λ) en deux points M, M′. Soit I l'intersection de γ et de la droite MM′. Démontrer que le rapport $\frac{\overline{\omega I}}{\overline{\omega O}}$ est constant.

Si P est la projection de F sur la tangente en M au cercle (λ) ,démontrer que P est sur le cercle (C).

3° On considère l'hyperbole (H) de foyers F et F′ qui passe en M et M′. Démontrer qu'elle est tangente en M et M′ au cercle (λ). Quel est son cercle principal ? Que peut-on dire de cette hyperbole quand (λ) varie ?

4° La droite ωF coupe MM′ en K ; montrer que K est le pied de la polaire de F par rapport à (λ) ; lieu du point K lorsque (λ) varie. (Lyon, 1951.)

602. On donne deux cercles fixes (O) et (O′), égaux, de rayon R et tangents extérieurement en A. A un point M de (O) on fait correspondre le point M′ de (O′) tel que

$$(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{O'M'}) = +\frac{\pi}{2}.$$

A) 1° Dans quelle transformation se correspondent les points M et M′ ? Montrer que la médiatrice de MM′ passe par un point fixe.

2° Lieu du milieu I de MM′. Montrer que l'enveloppe de MM′ est une courbe (H) dont on précisera les éléments remarquables : centre, axes, foyers, excentricité,...

3° Montrer que cette courbe (H) est bitangente aux deux cercles (O) et (O′).

4° Si l'on désigne par F et F′ les foyers de la courbe (H), F′ étant le point tel que l'angle MF′M′ ne soit pas droit, démontrer que l'aire du triangle MF′M′ est constante.

B) Soient Ax et Ay deux axes perpendiculaires, Ax porté par O′O et orienté de O′ vers O et Ay perpendiculaire à O′O.

a) On considère un point P de coordonnées (x, y). Soit P′ le transformé de P dans l'inversion de centre A et de puissance $\frac{R^2}{2}$. Exprimer x et y en fonction des coordonnées X, Y de P′ et de R.

b) On transforme par l'inversion précédente la courbe (H) trouvée en (2°). On obtient une courbe (L). Présente-t-elle des points à l'infini ? Préciser ses éléments de symétrie, ainsi que les tangentes parallèles aux axes et les tangentes à l'origine.

Faire un tracé de la courbe (L).

Trouver l'équation de la courbe (L) en utilisant (*a*). On écrira d'abord l'équation de (H) et ensuite on cherchera celle de (L). (Nancy, 1951.)

603. On donne deux axes rectangulaires $x'Ox$ et $y'Oy$. A et A' sont deux points fixes de l'axe $x'Ox$, symétriques par rapport à l'origine. On pose $\overline{OA} = -\overline{OA'} = a > 0$. On considère un cercle variable (C), de centre C, passant par les points fixes A et A'. M est l'un des points du cercle (C) où la tangente à (C) est parallèle à $y'Oy$.

1° En exprimant de deux manières différentes la puissance par rapport à (C), de la projection orthogonale N de M sur $x'Ox$, trouver une relation entre les coordonnées x et y de M, indépendante de la position du point C sur $y'Oy$. En déduire le lieu (H) du point M lorsque (C) varie.

2° On se propose de déterminer la tangente à la courbe (H) en M, sans utiliser le résultat précédent : on considère une autre position C' du point C, le cercle (C') correspondant ; on prend le point M' du même côté de $y'Oy$ que M. Montrer que la droite MM' passe par le centre d'homothétie positive I des cercles (C) et (C'). Montrer que le cercle de diamètre IJ passe par A et A', J étant le centre d'homothétie négative de (C) et de (C'). En déduire que lorsque C' tend vers C la droite MM' tend vers MP, P étant le pôle de la droite AA' par rapport au cercle (C). En déduire que la tangente en un point M d'une hyperbole équilatère et la droite qui joint M au centre de l'hyperbole, sont également inclinées sur ses asymptotes.

3° Sans utiliser le résultat du 1°, déterminer les cercles (C) tels que les points M correspondants soient sur une droite donnée (D). Quand (D) coupe $y'Oy$ en un point K, on pourra construire d'abord un cercle (γ), homothétique du cercle (C) cherché dans une homothétie de centre K. Discuter le nombre de solutions.

4° Soit F le point de $x'Ox$ d'abscisse $\overline{OF} = a\sqrt{2}$. On considère les cercles (ω) passant par F et centrés sur $x'Ox$. Montrer qu'à tout cercle (C) on peut associer deux cercles (ω_1) et (ω_2) de la famille des cercles (ω) tangents à (C) respectivement en T_1 et T_2 ; montrer que la médiatrice de FT_1 ou de FT_2 enveloppe, lorsque le cercle (C) varie, un cercle dont on déterminera le centre et le rayon. On aura avantage à considérer une inversion de centre F. (Lille, 1952.)

604. 1° On donne deux droites parallèles (D) et (D') coupées en A et A' par une perpendiculaire. On pose AA' $= 2a$. Soient F et F' deux points du segment AA' symétriques par rapport à O, milieu de AA'. On pose FF' $= 2c$.

Un cercle variable (C) passe par F et F' et coupe (D) et (D'). Soient P sur (D) et P' sur (D') deux de ces points d'intersection non symétriques par rapport à la médiatrice de AA'.

Démontrer que PP' enveloppe une ellipse (E).

Démontrer que les cercles (Γ) et (Γ') de centres P et P', de rayons PA et P'A' sont tangents à MF et MF' [M étant le point de contact de PP' avec (E)].

Démontrer que

$$\frac{PM^2}{MF.MF'} = \frac{PA^2}{AF.AF'}.$$

2° On donne deux droites parallèles (D) et (D') coupées en B et B' par une perpendiculaire. On pose BB' $= 2b$. Soient F et F' deux points situés sur la médiatrice de BB', symétriques par rapport à BB'. On pose FF' $= 2c$.

Un cercle variable (Γ) du faisceau dont F et F' sont les points limites coupe (D) et (D'). Soient N sur (D) et N' sur (D') deux de ces points d'intersection non symétriques par rapport à la droite FF'.

Démontrer que NN' enveloppe une ellipse.

3° On donne deux droites (D) et (D') se coupant en O. Soient F et F' deux points d'une bissectrice de l'angle (D, D') symétriques par rapport à O.

Un cercle variable (C) passant par F et F′ coupe (D) et (D′). Soient P et P′ deux de ces points d'intersection, non symétriques par rapport à une bissectrice de (D, D′).

Démontrer que PP′ enveloppe une hyperbole.

Soit FT la tangente à (C) en F. Démontrer que le faisceau FT, FF′, FP, FP′ est harmonique. (Rome, 1950.)

605. On considère deux droites rectangulaires I*x* et I*y* et un point F de leur plan.

1° Soient (C) les coniques tangentes à ces deux droites et dont l'un des foyers est en F.

a) Quel est le lieu des centres de ces coniques ?

b) Quel est le lieu de leur deuxième foyer F′ ?

Y a-t-il une parabole parmi les coniques (C) ? On distinguera sur chacun des lieux *a)* et *b)*, les parties qui correspondent à des ellipses et celles qui correspondent à des hyperboles.

2° Quelle est l'enveloppe de l'axe non focal des coniques (C) ?

3° Démontrer qu'il existe, en dehors de I, un point fixe J tel que les tangentes à une conique (C) menées de ce point soient également rectangulaires ; démontrer que les directrices associées à F des coniques (C) passent par un point fixe de la droite IJ.

4° Déterminer, parmi les coniques (C), une ou plusieurs coniques (s'il en existe) qui sont tangentes à une droite donnée D du plan. Soit (Γ) une telle conique.

5° On suppose que les points I et F et la droite D restant fixes, l'angle droit *x*I*y* prend toutes les positions possibles autour de I. Démontrer que, dans ces conditions, les cercles principaux des coniques (Γ) définies au 4° passent par deux points P et P′ et que le milieu du segment FI se trouve sur PP′.

Démontrer que les coniques (Γ) restent toutes tangentes à une deuxième droite fixe D′ autre que D.

6° Chercher à quelles conditions D et D′ sont perpendiculaires l'une à l'autre (la droite D doit être tangente à une parabole dont on indiquera les éléments). (Poitiers, 1949.)

606. On donne un triangle ABC *rectangle* en A, et l'on projette (orthogonalement) un point variable M de la droite BC sur les droites AB et AC respectivement en P et en Q.

1° Trouver le lieu des centres des cercles de diamètre PQ. En déduire que ces cercles passent par un second point fixe, F, que l'on déterminera.

2° Soient H et I les projections (orthogonales) respectives de F sur PQ et sur AB. Montrer que les triangles FAI et FQH sont semblables. En déduire le lieu du point H.

3° Montrer que la droite PQ reste tangente à une parabole, dont on déterminera le foyer, la directrice, ainsi que les points de contact avec les droites AB et AC. Calculer le paramètre de cette parabole en fonction des éléments du triangle ABC.

4° En posant $AB = c$, $\cos B = x$, ce paramètre a pour valeur $2c(x - x^3)$. Étudier ses variations quand x varie de 0 à 1, c restant constant. Déterminer la valeur de x correspondant à son maximum. (Marseille.)

607. Une parabole (P) varie en gardant fixe sa directrice D et en passant par un point fixe A.

1° Déterminer les lieux :

a) du foyer F ;

b) du sommet S ;

c) des intersections N et T de l'axe de (P) avec la normale et la tangente en A à (P).

2° Trouver la courbe (Π), lieu du second point d'intersection B de (P) avec la droite AF. Montrer que (P) et (Π) sont tangentes en B.

3° Déterminer la parabole (P) pour qu'elle passe par un second point donné M. Discuter suivant les positions de M : on montrera que l'existence et le nombre des solutions dépend de la position de M par rapport à une courbe que l'on précisera.

Montrer que chaque parabole (P) est tangente à cette courbe en un point que l'on déterminera et qu'en tout point de cette courbe passe une parabole (P) qui lui est tangente. (Clermont, 1949.)

608. A. — On considère dans un système d'axes rectangulaires les paraboles P et P' représentatives des fonctions

$$(P)\ y = x^2 - x, \quad (P')\ y = -x^2 + 2x.$$

a) Représenter, avec soin, sur le même graphique les courbes P et P'. La droite (Δ), $x = \lambda$, coupe P en M, P' en M'. Écrire les équations des tangentes MT en M à P, M'T' en M' à P'.

b) Calculer les coordonnées du point commun A à MT et M'T' en fonction de λ. Quel est le lieu géométrique de A lorsque λ varie ? Préciser la droite sur laquelle ce lieu se trouve.

B. — Étude géométrique de la même question ; soient P et P' deux paraboles dont les axes sont parallèles : P de foyer F et de directrice D, P' de foyer F' et de directrice D'. Une droite Δ variable parallèle aux axes de P et P' coupe P en M, P' en M', D en H, D' en H'.

a) Construire le point A commun aux deux tangentes en M et M' aux deux paraboles pour une position donnée de Δ.

b) Soit D_1 la médiatrice de HH', D_2 celle de FF'. Le point A se projette orthogonalement en H_1 sur D_1, en H_2 sur D_2. On choisira des orientations sur Δ et sur FF', ce qui donnera des valeurs algébriques aux distances AH_1 et AH_2.

Évaluer dans le triangle FAF' $F'A^2 - FA^2$,
Évaluer dans le triangle HAH' $H'A^2 - HA^2$.

Qu'en conclure pour le rapport des segments $\overline{H_1A}$, $\overline{H_2A}$? En déduire que A est sur une droite fixe δ quand Δ varie.

c) Chercher quel est le lieu du point A. Discuter suivant l'existence des points communs à δ et à P. Montrer que si P et P' ont des points communs, ces points sont aussi sur δ. En déduire que deux paraboles d'axes parallèles ne peuvent avoir plus de deux points communs et donner un moyen de les construire.

(Madagascar, 1951.)

609. Soient dans un plan trois points alignés A, F, A' (F étant situé entre A et A'), (P) la parabole de foyer F et de sommet A, (P') la parabole de foyer F et de sommet A', M et M' les points communs aux deux paraboles.

1° On suppose que F restant fixe, A et A' se déplacent sur deux droites parallèles du plan, D et D' ; trouver les enveloppes des tangentes aux sommets des paraboles (P) et (P'), ainsi que les enveloppes des directrices de ces paraboles.

2° A, F, A' étant donnés, construire géométriquement les points M et M'. Calculer en fonction des longueurs des segments FA et FA' la longueur de la corde MM'.

3° Trouver l'enveloppe de la droite MM' lorsque, F restant fixe, A et A' décrivent deux droites parallèles D et D'.

4° A et A' restant fixes, F décrit le segment AA'. Trouver le lieu géométrique des points M et M' ainsi que le lieu géométrique des points H, H', orthocentres des triangles MAA', M'AA'.

5° A et A′ restant toujours fixes, on pose $\overline{OF} = R\cos(\pi - t)$. ($AA' = 2R$, O milieu de AA′, la droite AA′ orientée de O vers A, $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$). Construire les tangentes aux courbes lieux de M et H aux points M, H correspondant à une position de F, et calculer en fonction de t la tangente trigonométrique de l'angle aigu α que font ces droites entre elles. (Liban, 1950.)

610. Une parabole (P) a pour foyer F et pour directrice Δ. L est le milieu d'une corde fixe M_1M_2 de (P) et λ, m_1, m_2 les projections orthogonales de L, M_1, M_2 sur Δ.

1° Montrer que $F\lambda$ est perpendiculaire à M_1M_2.

2° N étant un troisième point de (P), on désigne par n sa projection orthogonale sur Δ, par n_1 et n_2 les milieux de nm_1 et nm_2 et par n' le symétrique de n par rapport à F. Montrer que les angles de droites (NM_1, NM_2) et ($n'm_1$, $n'm_2$) sont égaux à un multiple de π près.

3° Construire les points d'intersection de (P) avec un cercle (C) de centre O passant par M_1 et M_2.

Montrer qu'il peut exister deux points d'intersection N_1 et N_2 généralement distincts de M_1 et M_2 et que, pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que le point O soit sur une certaine demi-droite O_1X que l'on déterminera. Que peut-on dire du cercle (C_1) de centre O_1 passant par M_1 et M_2 ?

4° Montrer que, lorsque O décrit O_1X, N_1N_2 se déplace parallèlement à elle-même et qu'une bissectrice de l'angle (M_1M_2, N_1N_2) est parallèle à l'axe de la parabole.

J étant le milieu de N_1N_2 et I le milieu de JL, démontrer que I est sur l'axe de (P). (Aix-Marseille, 1951.)

611. On considère un triangle rectangle isocèle fixe OAB, dans lequel $OA = OB = 2a$, $\widehat{AOB} = 1$ droit.

Soient M et N deux points qui varient respectivement sur les côtés OA et OB de manière que l'on ait constamment

$$OM + ON = 2a.$$

On désigne par F le milieu de AB.

1° Montrer que FM = FN et que l'angle MFN est droit. Quel est le lieu du milieu I du segment MN ?

2° Montrer que la droite MN reste tangente à une parabole fixe (P) dont on indiquera le foyer, la directrice, la corde focale perpendiculaire à l'axe et les tangentes aux extrémités de cette corde.

3° La droite MN rencontre AB en S et touche (P) en T. Montrer que S et T sont conjugués harmoniques par rapport à M et N.

4° On considère l'ellipse *variable* (E) de foyers M et N et passant par O.

a) Montrer que la tangente à (E) en O reste fixe et que (E) reste tangente à AB.

b) La tangente à (E) en O coupe MN en un point variable R. Montrer que la seconde tangente menée de R à (E) passe par un point fixe. (Clermont, 1952.)

612. On considère un triangle ABC. Le cercle inscrit de centre I, de rayon r, est fixe. Il est tangent en F au côté BC dont le support est fixe. Le sommet A décrit une droite D parallèle au côté BC. La hauteur, constante, relative à BC est égale à h.

1° Démontrer que pour tous les triangles ABC ainsi définis il existe un rapport constant entre le demi-périmètre p et la longueur a du côté BC (on pourra utiliser l'aire du triangle ABC).

En déduire la valeur du produit FB.FC en fonction de r et de h (cette valeur est constante).

2° On fait tourner autour de IF le cercle inscrit et la tangente en F, engendrant ainsi une sphère S et un plan P. On considère les cônes de sommet A tangents à la sphère S. Quelle est la nature des sections de ces cônes par le plan P ? En préciser les éléments.

3° On revient à la figure primitive. Sur le cercle (O) de centre O, circonscrit au triangle ABC, on désigne par M le milieu de l'arc BC ne contenant pas le point A. Montrer que le rayon du cercle exinscrit dans l'angle A a une valeur constante. En déduire le lieu du point M.

4° Montrer que le cercle (O) est tangent à un cercle fixe, passant par F, lui-même tangent à D (on pourra utiliser une inversion de pôle F).

5° Quel est le lieu géométrique du point O ? (Caen, 1949.)

613. On donne un cercle de centre O, de rayon R, tangent en I à une droite (Δ) et un diamètre PQ de ce cercle.

1° Montrer que l'on peut déterminer le foyer et la directrice d'une parabole (π) tangente en P et Q aux droites IP et IQ.

2° Si le diamètre PQ varie, on obtient une famille de paraboles (π) :

a) Quel est le lieu des foyers de ces paraboles ?

b) Montrer que toutes les paraboles (π) passent par un point fixe A ;

c) Construire les paraboles (π) qui passent par un point donné M différent de A. Montrer que, pour certaines positions de M, le problème n'admet qu'une seule solution. Lieu de M répondant à cette condition. Indiquer, suivant la position de M dans le plan, le nombre de solutions.

d) Construire les paraboles (π) tangentes à une droite donnée (D). Montrer que, pour certaines positions de la droite (D), le problème n'admet qu'une solution ; dans ce cas, la droite (D) passe par un point fixe ou est tangente à une courbe que l'on déterminera. Indiquer, suivant la position de (D), le nombre de paraboles (π) tangentes à (D).

3° On considère les deux paraboles (π_1) et (π_2) qui correspondent à deux positions rectangulaires de PQ : P_1Q_1 et P_2Q_2.

a) Montrer que ces paraboles se coupent en A sous un angle droit.

b) Construire le deuxième point B commun à ces deux paraboles.

c) Quel est le lieu de B lorsque P_1Q_1 et P_2Q_2 tournent autour de O en restant perpendiculaires ? (Aix-Marseille, 1952.)

614. On considère une parabole de foyer F et de sommet S. Par S, on mène une droite SX faisant un angle variable θ avec l'axe SF de la parabole.

1° Construire le second point M d'intersection de SX avec la parabole. Déduire de cette construction que si M' et M'' sont les points où les perpendiculaires à SX menées par F et S rencontrent la parallèle à l'axe SF menée par M, les lieux de M' et M'' lorsque θ varie, sont des droites perpendiculaires à l'axe.

2° Soit N le second point d'intersection de la perpendiculaire SM'' à SX avec la parabole. Montrer que lorsque θ varie, la droite MN coupe l'axe SF en un point fixe A.

3° Soient P le milieu de MN, I le point de rencontre des tangentes à la parabole en M et N ; en utilisant la construction des tangentes à la parabole issues de I, prouver que IP est parallèle à l'axe de la parabole et que, si la parallèle à MN menée par S recoupe la parabole en D, le milieu de SD est sur IP. En déduire que le lieu de P est une parabole.

4° La droite SP rencontre la parallèle à l'axe menée par D en un point Q ; montrer que la longueur DQ est constante. En s'appuyant sur les résultats de la première partie, en déduire que le symétrique de D par rapport à l'axe de la parabole est sur le cercle circonscrit au triangle SMN et que le centre de gravité du triangle EMN est sur l'axe.

5° Soient H et K les points où MI et NI rencontrent la tangente au sommet de la parabole ; montrer que le produit $\overline{SH}.\overline{SK}$ est constant quand θ varie. En déduire que le lieu de I est une droite perpendiculaire à l'axe SF. (Nancy.)

615. 1° Étant donné un triangle PHK, de hauteurs PF, HA, KB, montrer que les symétriques du pied F par rapport aux quatre droites HP, HA, KP et KB sont en ligne droite avec les pieds A et B. On appliquera cette propriété à ce qui suit.

2° Soient A et B deux points fixes sur un cercle donné de centre O, et PQ un diamètre de ce cercle. Montrer que les droites AP, AQ, BP, BQ sont tangentes à une parabole, dont on précisera le foyer et la directrice. Lieu du foyer quand PQ tourne autour de O.

3° M étant un point donné du plan, déterminer le diamètre PQ de façon que la parabole (π) correspondante passe par M. Discuter : pour quelles régions du plan le problème est-il possible et quel est le lieu du point M tel qu'il existe deux paraboles (π) correspondantes qui soient confondues ?

4° Peut-on obtenir deux paraboles (π) orthogonales en M ? Montrer que les points M réalisant cette condition sont tels que la somme des carrés de leurs distances à un point et à une droite *fixes* est constante. Chercher l'équation du lieu de M en prenant comme origine le milieu de la distance du point fixe à la droite fixe. (Dijon, 1948.)

616. Soit une conique (C) de directrice (D) et de foyer F relatif à (D). Soient deux points M et M' de cette conique et le point I où MM' coupe (D). Montrer que IF est une des bissectrices de l'angle $\widehat{MFM'}$. Préciser suivant la position de M et M' et la nature de la conique si IF est bissectrice intérieure ou extérieure de $\widehat{MFM'}$.

2° Soit (C) une des coniques dont on connaît la directrice (D) et deux points M et M'. Quel est le lieu du foyer F relatif à (D) ? Distinguer sur ce lieu les parties qui correspondent à une hyperbole, à une ellipse ou les points correspondants à une parabole, en supposant que les points M et M' sont d'un même côté de la droite (D).

3° Soit (Γ) une des coniques dont on connaît le foyer F et deux points M et M'. Montrer que la directrice de (Γ) relative à F passe par un point fixe. Distinguer suivant la position de la directrice la nature de la conique (Γ).

4° Construire le foyer d'une conique connaissant la directrice (D) (relative à F) une tangente (T) à cette conique et son point de contact M ; et l'excentricité e de cette conique. Discuter suivant les valeurs de e en supposant invariables (D), (T) et M. (Syrie.)

617. 1° Soient une droite (D) et deux points fixes M et N, H et K leurs projections sur (D). Trouver le lieu des foyers des coniques (C) de directrice (D) passant par les points M et N. (On appellera I et J les points où ce lieu coupe la droite MN).

Déterminer, suivant la position de F sur son lieu, la nature de la conique correspondante.

Examiner les cas particuliers où MN est parallèle ou perpendiculaire à (D).

2° Déterminer les coniques (C) d'excentricité e donnée. Discuter suivant les valeurs de e. (On posera $MH = l$ et $NK = l'$, $MN = a$.)

M étant fixe, où doit se trouver N pour qu'il y ait des coniques (C) d'excentricité donnée e ? Montrer que, pour qu'il y ait une seule solution, N doit se trouver sur une conique (Γ). La courbe (Γ) est tangente en N à la conique (C) correspondante.

3° Si N décrit une droite Δ, trouver le lieu des points I et J. Cas particulier où Δ passe par M. Trouver l'enveloppe des polaires de I et J par rapport au cercle de diamètre MN.

Lieu des points I et J quand M et N sont diamétralement opposés sur un cercle (γ) de centre O.

618. A) Soient F l'un des foyers d'une conique (E) et (Δ) la directrice qui correspond à ce foyer. M et N étant deux points de la conique, P l'intersection de MN et de (Δ), montrer que FP est l'une des bissectrices des deux droites FM et FN ; que si la tangente en M coupe (Δ) en T, l'angle MFT est droit.

Montrer comment on peut, à l'aide de ces propriétés, déterminer le foyer F d'une conique dont on connaît une directrice (Δ) et trois points ; ou encore une directrice (Δ), deux points et la tangente en un de ces points. On ne fera dans le cas général aucune discussion.

B) On considère toutes les ellipses (E) qui ont une directrice donnée (Δ) et un sommet donné S sur l'axe non focal (δ) parallèle à (Δ). On nommera S' la projection de S sur (Δ), (γ) le cercle de diamètre SS', (Γ) le cercle de centre S qui passe en S'.

1° Lieu du foyer F des ellipses (E).

2° Déterminer les ellipses (E) qui passent par un point donné M, et, par suite, par son symétrique M' par rapport à (δ). Montrer que si M est sur (Γ) le problème n'a qu'une solution, qu'il en a deux si M est intérieur à (Γ). (On pourra utiliser une inversion de pôle S'.)

3° Montrer que quand M décrit (Γ), F ne décrit qu'un arc de (γ). En conclure que les (E) se partagent en deux familles : les (E_1) qui ont avec (Γ) deux points communs, et les (E_2) qui n'ont avec (Γ) aucun point commun. Entre quelles limites varient les excentricités des (E_1) et celles des (E_2) ?

4° Montrer que par tout point M intérieur à (Γ), il passe au moins une ellipse de la famille (E_1). (Bordeaux.)

619. On donne dans un plan un point fixe F et une droite fixe (Δ) ne passant pas par F. Sur Δ on prend un point quelconque ω et l'on considère le cercle (γ) de centre ω et de rayon $\frac{\omega F}{2}$.

1° Montrer que les cercles (γ) sont vus du point F sous un angle constant. K étant le pied de la polaire de F par rapport au cercle (γ), établir que le point K décrit une droite D et trouver l'enveloppe de la polaire quand ω décrit Δ. Montrer que pour tout point P de (γ) on a

$$\frac{PF}{PK} = 2. \tag{1}$$

2° Deux cercles (γ) et (γ') se coupent en P et P', établir en se servant de la relation (1) que P et P' sont sur la médiatrice de KK'. Le cercle (γ) restant fixe, le cercle (γ') se rapprochant indéfiniment de (γ), donner une construction simple des positions limites M et M' des points P et P', connaissant (γ).

3° Lieu (H) des points M et M' quand ω décrit Δ. Préciser les éléments du lieu (foyers, directrices, excentricité, sommets, asymptotes).

4° On considère le cercle (C) de centre M passant par F. Établir qu'il coupe Δ sous un angle constant. La tangente en F à ce cercle coupe D en T. Construire la tangente en M au lieu (H). Montrer que les quatre points F, T, K, M sont sur un cercle orthogonal à (γ) et en déduire que (H) et (γ) sont tangents en M et M'.

(Nancy, 1947.)

620. On considère deux axes de coordonnées rectangulaires $x'Ox$, $y'Oy$, F le point de l'axe $x'Ox$ d'abscisse donnée a positive. On désigne par (P) la parabole de foyer F et de directrice $y'Oy$, par (D) la droite d'équation $x = 2a$, par (C) une conique de foyer F, de directrice associée (D) et d'excentricité variable e supérieure à 1/3.

1° M étant un point de (P) d'abscisse x, MH la distance de M à (D), évaluer en fonction de a et de x le rapport $z = \frac{MF^2}{MH^2}$. Variations de ce rapport quand M décrit (P). Courbe représentative.

2° A tout point M de (P) est associée une conique (C) passant par M. Discuter suivant la position de M sur (P) la nature de (C). Comment sont disposés les points qui donnent une même conique (C) ? Enveloppe des asymptotes des hyperboles de la famille (C).

3° L'excentricité e étant donnée, comment peut-on construire les points communs à la conique (C) correspondante et à la parabole (P)? Discuter, suivant la valeur de e, le nombre de points obtenus. Dans le cas particulier où e $=$ 2, calculer en grades les angles des tangentes à (P) et (C) en chacun des points communs.

4° Déterminer M sur la parabole (P) de manière que la conique (C) associée admette pour centre un point de l'axe $x'Ox$. Discuter. (Alger, 1951.)

621. Un point M est variable sur une ellipse fixe donnée (S), de foyers F, F' ; on désigne par A et A' les sommets du grand axe de l'ellipse (S), par $2a$ la distance AA', par $2c$ la distance focale FF'.

On considère l'ellipse (E) dont un foyer est F', qui passe par F et qui est tangente en M à l'ellipse (S).

1° Montrer que la longueur du grand axe de l'ellipse (E) demeure constante quand M parcourt (S) ; en déduire que le lieu géométrique du deuxième foyer φ de (E) est un cercle (F) de centre F.

2° La droite FF' coupe l'ellipse (E) en un point N distinct du point F. Les tangentes en M, F, N à l'ellipse (E) forment un triangle PQR. Trouver les lieux de P, Q, R.

3° Indiquer une construction simple de la directrice (Δ) de (E) relative au foyer φ. Trouver le lieu du pôle ω de (Δ) par rapport au cercle (F).

4° On projette orthogonalement le point F en I sur la directrice (Δ). Trouver le lieu du point I et en déduire l'enveloppe de la droite (Δ).

Discuter la nature de cette enveloppe suivant la valeur de l'excentricité de l'ellipse donnée (S). (Toulouse, 1951).

622. Une ellipse ou une hyperbole peut être considérée comme le lieu des points M du plan qui sont centres des cercles (C) passant par un foyer F et tangents à un cercle fixe (A) dont le centre est le deuxième foyer F'. On désigne par (D) la directrice associée au foyer F, par H le point où (D) coupe la droite FF', et par P le point de contact des cercles (C) et (A).

1° On opère une inversion de pôle F et de puissance FH^2. Montrer que (A) et (D) sont transformés en deux cercles concentriques. Que devient (C) ? Distinguer les cas de figure de l'ellipse et de l'hyperbole.

2° Montrer que le cercle (B), passant par F et P et orthogonal à (C), passe par un deuxième point fixe que l'on précisera.

3° (B) coupe (A) en P et P'. Montrer que la droite PP' passe par un point fixe.

4° On suppose maintenant que la conique est une hyperbole. Le cercle (C) rencontre alors (D) en Q et R. On demande l'enveloppe du cercle (E) qui passe par Q et R et qui est orthogonal à (C).

5° Ce cercle (E) peut-il en particulier passer par un point fixe ?

(Maroc, 1948.)

623. Soit une droite (D) et un point F non situé sur (D). On désigne par K la projection orthogonale de F sur (D) et l'on pose KF $= d$.

1° M étant un point quelconque, distinct de F et non situé sur (D), on désigne par (γ) le cercle de diamètre FM de centre C. La tangente en F à (γ) coupe la média-

trice Δ de FK en un point I. Montrer que ce point I a même puissance par rapport à (γ) et par rapport à tous les cercles du faisceau qui a pour points limites F et K.

Démontrer qu'il existe un cercle (O) de ce faisceau qui est tangent à (γ). Déterminer son centre O et son point de contact P avec (γ).

2° La droite FP coupe (D) en E et recoupe le cercle (O) en N. Démontrer que le faisceau (O, PNFE) est harmonique. Montrer que CF et ON sont parallèles. Déduire de ce qui précède que les trois points O, M, E sont alignés.

3° H désignant la projection orthogonale de M sur (D), on pose $\frac{MF}{MH} = e$.

Évaluer le rapport $\frac{\overline{OF}}{\overline{OK}}$ d'abord en fonction du rapport $\frac{ON}{OK}$, puis en fonction de e et calculer le rayon R de (O) en fonction de d et e. Quelle est la valeur du rapport $\frac{PF}{PK}$?

4° On suppose que M décrive une conique (C) de foyer F, de directrice (D) et d'excentricité e.

Montrer qu'à tous les points M de cette conique il correspond un même cercle (O) qui est le cercle principal de cette conique.

Quel est l'angle que fait la tangente en M à la conique avec la droite FE ?

5° Déduire de ce qui précède la solution du problème suivant :

Soient (C) une conique de centre O ; $x'Ox$ son axe focal ; $y'Oy$ son axe non focal. M étant un point quelconque de la conique, on désigne par λ le coefficient angulaire de OM par μ le coefficient angulaire de la tangente en M à la conique. Évaluer le produit $\lambda\mu$ en fonction de l'excentricité e de (C).

(A. O. F., 1951.)

624. On donne un cercle (O) de centre O, de rayon R, un point F non situé sur ce cercle tel que OF $= d$ et l'on considère les coniques (Γ) qui ont comme foyer F et pour cercle principal tout cercle ayant pour diamètre une corde de (O) portée par une droite passant par F.

1° Lieux géométriques du centre et du deuxième foyer de (Γ) ? Quelle est la nature de (Γ) suivant la position de F par rapport à (O) ?

2° Montrer que, quelle que soit la conique (Γ) :

les tangentes aux sommets de l'axe focal sont tangentes à une conique fixe (Γ_0) ;

la directrice associée à F est tangente à une parabole fixe (P) ;

la deuxième directrice est tangente à la parabole (P') symétrique de (P) par rapport à O.

3° Calculer en fonction de la distance du centre de (Γ) au point O l'excentricité de (Γ). Quelle est, lorsque (Γ) est une ellipse, son excentricité maximum ? Comment faut-il prendre F pour qu'il existe parmi les coniques (Γ) une hyperbole équilatère ? un cercle ?

Lorsque (Γ) est une ellipse, calculer son petit axe.

4° Montrer que :

lorsque (Γ) est une hyperbole, ses asymptotes sont tangentes à un cercle fixe ;

lorsque (Γ) est une ellipse, les tangentes aux sommets du petit axe sont tangentes à un cercle fixe.

5° Combien peut-il exister de coniques (Γ) tangentes à une droite donnée ? (On se contentera d'indiquer la construction du cercle principal en supposant le problème possible, sans chercher à discuter.) (Liban, 1948.)

625. Dans un plan on considère un axe Ox sur lequel on a choisi une origine O et un point fixe I_0 d'abscisse a positive. On considère les deux droites (D) et (D') passant par O et faisant respectivement avec Ox les angles $+\frac{\pi}{3}$ et $-\frac{\pi}{3}$. La perpendiculaire (Δ) en I_0 à Ox coupe (D) au point A_0 et (D') au point B_0.

1° Étant donné un point I sur (Δ), construire géométriquement un segment rectiligne AB de milieu I ayant son extrémité A sur (D) et son extrémité B sur (D').

2° Montrer que, quand I varie sur (Δ), A et B se correspondent dans une rotation dont on déterminera le centre F et l'angle. Quelle est l'enveloppe de la droite AB ?

3° Soit (γ) le cercle tangent en A à FA et en B à FB. Trouver le lieu du centre de ce cercle quand I décrit (Δ).

Montrer que si P est un point quelconque de (γ) le rapport $\frac{PF}{PI}$ a une valeur numérique bien déterminée, que l'on indiquera. En déduire le lieu (Γ), quand I décrit (Δ), des points d'intersection M et M' de (γ) et de la parallèle à Ox menée par I. Établir qu'en M et M' ce lieu est tangent au cercle (γ).

4° Soit Oy l'axe directement perpendiculaire à Ox. Écrire, dans le système d'axes Ox, Oy l'équation de (Γ).

Calculer les coordonnées du point N d'intersection de (Γ) et de la droite d'équation $y = m(x - 2a)$; calculer les coordonnées du point N' d'intersection de (Γ) et de la droite passant par le point $x = 2a$, $y = 0$ et perpendiculaire à la précédente. Former l'équation de la droite NN'. Montrer que cette droite passe par un point fixe lorsque m varie et indiquer les coordonnées de ce point fixe.

(Maroc, 1951.)

626. *Notation* : A et B étant deux points quelconques, le cercle dont le segment AB est un diamètre sera appelé cercle (AB).

1° On donne une conique Γ de centre O, de foyers F et F', et dont les sommets de l'axe focal sont appelés A et A' (A et F étant d'un même côté de O).

Un point M décrivant la conique Γ, quelle est l'enveloppe du cercle de centre M passant par F (c'est-à-dire la courbe à laquelle ce cercle reste tangent) ?

En déduire par homothétie l'enveloppe du cercle de diamètre MF [qu'on appellera simplement cercle (MF) d'après la convention du début].

2° On considère maintenant une corde MM' de Γ, qui varie en passant constamment par F, et le but du problème est de trouver, lorsque la corde focale MM' pivote autour de F, l'enveloppe du cercle (MM') et le lieu de son centre P (milieu de MM').

Pour cela, on effectue d'abord l'inversion de centre F qui conserve le cercle principal de Γ.

A) En se servant du résultat de la première question, construire d'une manière très simple les inverses des cercles (MF) et (M'F).

B) En déduire la construction du transformé (C) du cercle (MM'). Montrez que (C) a un rayon constant et trouvez le lieu de son centre (on désignera par I le milieu de OF).

C) En déduire que, lorsque la corde focale MM' pivote autour de F, le cercle (C) reste tangent aux cercles de centre I qui passent l'un par A, l'autre par A'.

3° En revenant alors à la figure initiale, montrez que le cercle (MM') reste tangent à deux cercles fixes dont l'un passe par A (on l'appellera Ω et son centre sera désigné par ω) et l'autre passe par A' (on l'appellera Ω' et son centre sera désigné par ω'). Montrez que le faisceau défini par les cercles Ω et Ω' admet F pour point de Poncelet et, pour axe radical, la directrice Δ de la conique Γ associée au foyer F. N'y a-t-il pas un autre cercle très simple faisant partie de ce faisceau ?

On désigne par Φ le deuxième point de Poncelet de ce faisceau. Montrez, en vous servant de la figure inverse étudiée à la 2e question, que, si l'excentricité e de Γ est inférieure à 2, les points F et Φ sont de part et d'autre du cercle (MM') quelle que soit la position de la corde MM'. Au contraire, si $e > 2$, les points F et Φ sont d'un même côté de MM'. Que se passe-t-il si $e = 2$? Dire ce que devient alors le cercle Ω' et caractériser les coniques Γ correspondantes par l'angle de leurs asymptotes. (Lyon, 1952.)

627. On donne un cercle fixe (F) de centre F et de rayon R et un point F' de son plan, non situé sur (F). Soient M un point variable du plan, (μ) sa polaire par rapport à (F), *m* le centre du cercle (*m*) qui passe par F' et qui appartient au faisceau défini par le cercle (F) et par la droite (μ). On désigne par (T) la transformation ponctuelle qui transforme M en *m* et par (T') la transformation inverse qui transforme *m* en M.

1° *a)* H désignant le point d'intersection de FM et de (μ), construire le deuxième point où HF' coupe le cercle (*m*). En déduire la construction de *m*, connaissant M. Discuter.

Montrer que M et *m* sont alignés avec F. Montrer que le lieu des points M qui n'ont pas de transformés dans (T) est la polaire de F' par rapport au cercle (F).

b) Inversement, connaissant *m*, indiquer les constructions qui permettent d'obtenir le point M correspondant. Discussion. Trouver le lieu des points *m* qui n'ont pas de transformés dans la transformation (T').

2° *a)* Montrer que la transformée d'une droite D dans la transformation (T) est une droite *d*.

Examiner :

α) le cas où D passe par F ;

β) le cas où D ne passe pas par F. Remarquer, dans ce cas, que lorsque M décrit la droite D, (μ) passe par un point fixe.

b) Quelle est la transformée d'une droite donnée *d* dans la transformation (T') ?

c) Déduire de ce qui précède que, dans chacune des transformations (T) ou (T') :

Une division harmonique portée par une droite ne passant pas par F se transforme en une divison harmonique ; un faisceau harmonique se transforme en un faisceau harmonique, puisqu'une division harmonique portée par une droite passant par F se transforme en une division harmonique.

3° Quelle est la figure transformée du cercle (F) dans la transformation (T) ?

Application : On considère une conique à centre définie par ses deux foyers F et F' et le cercle directeur (F) relatif au foyer F. Par un point fixe *p* de son plan, on mène une sécante *pab* qui coupe la conique en *a* et *b* ; lieu géométrique du conjugué harmonique *n* de *p*, par rapport à *a* et *b*, lorsque la sécante pivote autour de *p*. (Bordeaux, 1952.)

628. On donne une sphère (S) de centre O et de rayon R ; deux plans tangents (*f*) et (*m*), dont les points de contact seront désignés par F et M, se coupent suivant une droite D. On appelle I le milieu du segment FM et H la projection de M sur D.

1° Montrer que la droite D est perpendiculaire au plan FOM. Quelle relation existe-t-il entre OI, OH et R ?

2° M décrit un cercle donné (C) tracé sur (S). Le point F étant donné sur (S), déterminer la courbe (C') lieu de I et la courbe (Γ) lieu de H. Le cercle (C) étant fixe, où doit se trouver le point F pour que (Γ) soit une droite ?

3° Déterminer, dans les mêmes conditions, la courbe (K) du plan (*f*) à laquelle la droite D reste tangente lorsque M décrit (C). Discuter la nature de (K) suivant la position de F sur (S) [on pourra laisser de côté le cas où F est sur le cercle (C)].

4° Montrer que, lorsque F n'est pas situé sur (C), la courbe (K) est la section par (*f*) du cône (ou cylindre) circonscrit à (S) le long de (C). Retrouver ainsi les résultats de la discussion précédente (question n° 3).

629. On donne un losange ABCD de côté a dans lequel l'angle B a pour mesure 60°. On prend sur le segment BA le point H et sur le segment AD le point K, tels que $BH = AK = x < a$.

1° Évaluer en fonction de a et de x les côtés et l'aire du triangle CHK.

2° Lieu du centre du cercle circonscrit à ce triangle.

3° Montrer que le milieu de HK décrit un segment de droite et que HK reste tangente à une parabole.

4° On coupe le cône de révolution d'axe BD et d'angle au sommet ABC par le plan mené par CH perpendiculairement au plan du losange ; calculer l'excentricité de la conique de section et étudier sa variation.

5° Lieu du centre de cette conique et des extrémités de l'axe non focal.

(Poitiers.)

630. 1° On coupe un cône de révolution de sommet S, d'axe SX et de demi-angle au sommet α par un plan P rencontrant l'axe de révolution en un point I. En désignant par d la longueur SI, par θ l'inclinaison de l'axe du cône sur le plan P, étudier la nature de la section du cône par le plan.

Calculer les éléments de la section : longueur des axes, distance focale, excentricité, angle des asymptotes s'il y a lieu, et seulement le paramètre si la section est une parabole.

2° Étudier la variation de l'axe focal quand, l'angle θ restant fixe, l'angle α varie.

3° En un lieu M de latitude $\lambda = 48°$ est édifié un mur vertical perpendiculaire au plan méridien de M. Sur la face de ce mur exposé au sud, en un point I situé sur la verticale de M on fixe une tige matérielle IS parallèle à l'axe du monde et de longueur $d = 1$ m. Déterminer l'ombre projetée par le point S sur le mur le jour du solstice d'été. On sait que l'inclinaison de l'écliptique sur l'équateur est $\varepsilon = 23°27'$.

631. *a)* On considère un cône de révolution S, circonscrit à une sphère Σ et un plan P. Montrer que les foyers de la conique C section du cône par le plan P sont obtenus en prenant les traces sur ce plan des droites qui joignent le sommet du cône aux points de contact avec la sphère Σ des plans tangents parallèles au plan P.

b) On suppose la sphère Σ tangente au plan P en un point F, on désigne par (S) la famille des cônes S obtenue en faisant varier le sommet s sur une droite Δ extérieure à la sphère Σ de direction quelconque (Δ ne sera ni parallèle, ni perpendiculaire au plan P) ; on désigne par (C) la famille des coniques C obtenue en coupant les cônes par le plan P.

1° Caractériser suivant la position du sommet s sur Δ, la nature de la conique C, section du cône correspondant S par le plan P.

2° Les coniques C ainsi obtenues admettent pour foyer F. Quel est le lieu de leur second foyer F′ et de leur centre O ? Montrer que la perpendiculaire en O à FF′ est tangente à une parabole dont on précisera le foyer et la directrice.

3° Montrer que les directrices des coniques (C) relatives au foyer F, passent par un point fixe A et que les directrices relatives au foyer F′ sont tangentes à une parabole. (Saint-Cyr.)

632. On considère deux plans rectangulaires H et F qui se coupent suivant la droite D et un point S placé dans H à la distance a de D ($a \neq 0$). Un point P variable décrit D ; sur la perpendiculaire au plan H menée par P, on prend les deux points situés à une distance de P égale à SP. M désigne l'un quelconque de ces points.

1° Prouver que la droite SM engendre un cône de révolution dont l'axe est perpendiculaire à H et dont l'angle au sommet est égal à $\frac{\pi}{2}$; montrer que le lieu du point M est une hyperbole équilatère C dont on placera le centre, les sommets, les foyers, les asymptotes.

2° Les plans horizontal et frontal de projection étant respectivement H et F, faire l'épure de la figure en Géométrie descriptive ; construire par points la courbe C.

Retrouver la nature de la courbe C en déterminant son équation ; on prendra pour axe $x'x$ la ligne de rappel du point S et pour axe $y'y$ la ligne de terre D.

3° soit M_1 un autre point de C se projetant en P_1 sur D ; montrer que le point où MM_1 coupe D est le pied d'une des bissectrices de l'angle S du triangle SPP_1. Que devient cette propriété lorsque M_1 tend vers M supposé fixe ?

4° Soit A un point quelconque de l'axe non transverse d'une hyperbole équilatère de sommets S et S' ; construire les deux tangentes à la courbe qui passent par A. La corde des contacts coupant l'axe non transverse en B, mener de B les deux tangentes à la courbe et montrer que la corde des contacts passe par A.

On désigne par l et l' les longueurs de ces deux cordes de contacts ; établir la relation $\frac{1}{l^2} + \frac{1}{l'^2} = \frac{1}{SS'^2}$.

633. On considère les coniques (C) ayant un foyer F donné et tangentes à une droite (Δ) en un point fixe A.

1° Lieu du second foyer F' de (C). Discuter suivant la position de F' sur son lieu la nature de (C). Y a-t-il parmi ces coniques une parabole ? Prouver que les cercles directeurs (F') de centres F' forment un faisceau de cercles tangents.

2° Dans cette question, on associe deux coniques (C) ayant la même excentricité e : prouver que les axes focaux FF'_1, FF'_2 relatifs à ces deux coniques (C_1) et (C_2) restent également inclinés sur deux droites fixes, lorsque e varie : les cercles directeurs (F'_1) et (F'_2) se correspondent dans une inversion fixe (I) que l'on déterminera. Situer l'inverse du point F dans l'inversion envisagée. Étudier les points communs à deux coniques (C_1) et (C_2) ; en dehors du point A, si (C_1) et (C_2) sont deux ellipses, elles n'ont aucun point commun : deux hyperboles ont toujours deux points communs. Sur quelle ligne se déplacent ces points lorsque e varie ?

3° Revenant aux coniques (C) du 1°, prouver que les directrices relatives à F passent par un point fixe K ; la directrice associée à F' est homothétique de l'axe non focal dans une homothétie de centre K. En déduire la courbe à laquelle cette directrice reste tangente.

4° On considère une sphère fixe (O) et un plan P tangent en F à la sphère (O). Un cône de sommet S circonscrit à la sphère coupe le plan P suivant une conique (C) de foyer F. Lieu du point S pour que (C) soit tangente en A à une droite (Δ) du plan P. Retrouver, à partir de cette nouvelle définition de (C), le lieu de F' et le résultat relatif à la directrice associée à F.

634. 1° On considère une ellipse (E) de centre O, d'axes AA' et BB', de foyers F et F'. $AA' = 2a$; $BB' = 2b$; $(b < a)$; $FF' = 2c$. Soit H la projection de F sur la directrice D qui lui est associée. Montrer que la division AA'FH est harmonique.

La perpendiculaire à AA' en F coupe (E) en K et K' ; en utilisant le cercle principal, montrer que la tangente KT à (E) en K passe par H. Calculer FK, OH, FH et la tangente de l'angle KT avec le grand axe. On donnera des expressions rationnelles en a, b, c.

2° On considère dans un plan vertical (V) deux axes perpendiculaires x'_1Sx_1, $z'Sz$ (Sx_1 est horizontal et orienté vers la droite, Sz est vertical et orienté vers le

haut). D'autre part on désigne par (Q) le plan horizontal perpendiculaire à $z'Sz$ en un point O situé sur Sz'. Un segment de longueur constante $2l$, dont les extrémités se déplacent sur les demi-droites Sx_1 et Sz, est le diamètre d'un cercle (C) dont le plan est perpendiculaire au plan (V). Soit α l'angle aigu du segment avec x'_1Sx_1 et soit (E) la projection du cercle (C) sur le plan (Q). On propose l'étude des courbes (E) :

a) Calculer les demi-axes, la demi-distance focale à l'aide de l et α. Quelle est l'excentricité ? Trouver le lieu des sommets et celui des foyers. Trouver l'enveloppe des cercles directeurs.

b) Soient ω le centre de (E) ; $y'Oy$ la tangente en O à (E) ; $x'Ox$ l'axe perpendiculaire en O à $y'Oy$; A et A' les sommets du grand axe, F et F' les foyers. La perpendiculaire en F à AA' coupe (E) en deux points ; on désigne par K le point le plus près de $y'Oy$. Soit H la projection de F sur la directrice D qui lui est associée ; A est entre F et H ; la tangente en K à (E) passe par H et coupe $x'Ox$ en I. Calculer FK, ωH, FH en fonction de l et α. Si β est l'angle de IH avec le grand axe, montrer que $\operatorname{tg} \beta = \sin \alpha$. Montrer que $\omega I = l$. Soit K' la projection de F sur $y'Oy$; IK' coupe le grand axe en J. Montrer que OK passe par J. En déduire une construction simple des points K et H quand on se donne le point F sur son lieu. Montrer que l'angle de IJ avec le grand axe est $\frac{\alpha}{2}$. IH coupe $y'Oy$ en L ; montrer que FL coupe $x'Ox$ en un point fixe Ω.

c) Le cercle de centre Ω, de rayon l, coupe $x'Ox$ en O et en O_1 : IH coupe ce cercle en M et M_1 ; les perpendiculaires en M et M_1 à IH coupent $x'Ox$ en φ et en φ_1.

Montrer que Ω est le milieu de $\varphi\varphi_1$.

Montrer, en évaluant la puissance de I par rapport au cercle de diamètre $\varphi\varphi_1$, que φ et φ_1 sont fixes. Évaluer le produit $\overline{\varphi M}.\overline{\varphi_1 M_1}$. Montrer que l'enveloppe de IH est une hyperbole dont on demande les éléments.

La droite IH coupe la perpendiculaire $y'_1O_1y_1$ à $x'Ox$ en un point L_1. Évaluer OL et O_1L_1 en fonction de l et α. Quelle est la valeur du produit $\overline{OL}.\overline{O_1L_1}$?

(Bordeaux, 1951.)

TABLE DES MATIÈRES

Chapitre 1. — Vecteurs — Produit scalaire (Révision) 11

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

Chapitre 2. — Généralités — Représentations paramétriques d'une droite 26
Chapitre 3. — Barycentre 35
Chapitre 4. — Repère orthonormé. Droite et plan . . 49
Chapitre 5. — Repère orthonormé. Sphère. Cylindre. Cône 62
Chapitre 6. — Hélice circulaire 72
Chapitre 7. — Vecteur variable fonction d'un paramètre 81

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

Chapitre 8. — Représentation du point 94
Chapitre 9. — La droite 102
Chapitre 10. — Le plan 115
Chapitre 11. — Changement de plan de projection . . 126
Chapitre 12. — Intersections de droites et de plans . . 137
Chapitre 13. — Positions relatives des droites et des plans 144

GÉOMÉTRIE ORIENTÉE ET TRANSFORMATIONS

Chapitre 14. — Arcs et angles orientés 158
Chapitre 15. — Puissance. Axe radical 181
Chapitre 16. — Cercles orthogonaux 191

Chapitre 17. — Faisceaux linéaires de cercles 199
Chapitre 18. — Polaire d'un point par rapport à un cercle 214
Chapitre 19. — Transformations ponctuelles. Généralités 225
Chapitre 20. — Figures égales. Figures isométriques. Translation 231
Chapitre 21. — Rotation plane 242
Chapitre 22. — Rotation autour d'un axe 254
Chapitre 23. — Retournements 267
Chapitre 24. — Symétries 279
Chapitre 25. — Homothétie 292
Chapitre 26. — Similitude 321
Chapitre 27. — Affinité (Géométrie plane). Rabattement (Géométrie descriptive) 335
Chapitre 28. — Inversion 356
Chapitre 29. — Transformation par polaires réciproques (Géométrie plane) 387

LES CONIQUES

Chapitre 30. — Définition et propriétés élémentaires des coniques 394
Chapitre 31. — Équation des coniques 408
Chapitre 32. — La parabole 436
Chapitre 33. — Tangentes aux coniques bifocales . . 451
Chapitre 34. — Coniques et affinité orthogonale . . . 475
Chapitre 35. — Directrices d'une conique 491
Chapitre 36. — Sections coniques 506
Problèmes de récapitulation et d'examen 526

Imprimé en Belgique
Avril 1964 - N° 7093
Imprimerie Saint-Luc à Ramegnies-Chin
Dépôt légal : 2e trimestre 1964
N° d'éditeur : 12.474